Examen 2021/2022 (I)
4M003 - Algèbre commutative
Anna Cadoret

Durée: 2:00

Avertissement.

Sont autorisés: le polycopié du cours, les notes manuscrites du cours, les dictionnaires de langues papier. Tous les autres documents sont interdits, notamment les corrigés polycopiés et manuscrits des travaux dirigés, du devoir maison et des annales des années antérieures.

Les réponses peuvent être rédigées en français ou en anglais. Le sujet est long; le barême sera adapté en conséquence. Prenez donc le temps de *justifier soigneusement* vos réponses. Vous pouvez bien sûr admettre certaines questions.

Exercice 1. Soit k un corps de caractéristique 0 et V un k-espace vectoriel de dimension finie $d \geq 2$ sur k. On note $T^0(V) := k$, $T^1(V) := V$ et $T^{n+1}(V) := V \otimes_k T^n(V)$, $n \geq 1$.

(1) On fait agir $\mathcal{S}_n$ sur V^n par $\sigma \cdot (v_1, \cdots, v_n) = (v_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, v_{\sigma^{-1}(n)})$. Montrer que cette action induit une action de $\mathcal{S}_n$ sur $T^n(V)$ par automorphismes k-linéaires.

Soit W un k-espace vectoriel. Une application n-k-multilinéaire $f : V^n \to W$ est dite symmétrique si pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on a $f(\sigma \cdot (v_1, \dots, v_n)) = f(v_1, \dots, v_n)$.

(3) On note $R^n(V) \subset T^n(V)$ le sous-k-espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $t - \sigma \cdot t$, $t \in T^n(V)$, $S^n(V) := T^n(V)/R^n(V)$ et $\pi_n : T^n(V) \twoheadrightarrow S^n(V)$ la projection canonique. Montrer que l'application canonique $p_n : V^n \to T^n(V) \stackrel{\pi_n}{\twoheadrightarrow} S^n(V)$ vérifie la propriété universelle suivante: pour tout k-espace vectoriel W et pour toute application n-k-multilinéaire symétrique $f : V^n \to W$ il existe un unique morphisme de k-espaces vectoriels $S^n(f) : S^n(V) \to W$ tel que $S^n(f) \circ p_n = f$.

On note $v_1 \cdot \cdots \cdot v_n := \pi_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$.

(4) On note $T^*(V) := \oplus_{n\geq 0} T^n(V)$, $S^*(V) := \oplus_{n\geq 0} S^n(V)$. Par construction $T^*(V)$, $S^*(V)$ sont des k-espaces vectoriels (de k-dimension infinie...). Montrer que l'application k-bilinéaire $T^*(V) \times T^*(V) \to T^*(V)$ définie par

$$T^m(V) \times T^n(V) \to T^{m+n}(V), \quad (v_1 \otimes \cdots \otimes v_m, v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_n) \mapsto v_1 \otimes v_m \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_n$$

se factorise canoniquement *via*

$$\begin{tikzcd}
T^m(V) \times T^n(V) \arrow[r] \arrow[d] & T^{m+n}(V) \arrow[d] \\
S^m(V) \times S^n(V) \arrow[r] & S^{m+n}(V)
\end{tikzcd}$$

et munit ainsi $S^*(V)$ d'une structure de k-algèbre commutative dont on préciséra le zéro et l'unité.

(5) Montrer que le morphisme canonique de k-modules $\iota_V : V = S^1(V) \hookrightarrow S^*(V)$ vérifie la propriété universelle suivante: pour toute k-algèbre commutative A et pour tout morphisme de k-modules $f : V \to A$ il existe un unique morphisme de k-algèbres $S^*(f) : S^*(V) \to A$ tel que $S^*(f) \circ \iota_V = f$.

(6) Montrer que le choix d'une k-base $\underline{v} = v_1, \ldots, v_d$ de V définit un morphisme canonique de k-algèbres $S^*(V) \tilde{\to} k[X_1, \ldots, X_d]$.

Exercice 2. Soit $n, r \geq 1$ des entiers. On note $S(n,r)$ le nombre de sous-$\mathbb{Z}$-modules $M \subset (\mathbb{Z}/n)^{\oplus r}$ de cardinal $\leq n$. L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe une constante $\alpha(r) > 0$ telle que $S(n,r) \leq n^{\alpha(r)}$.

(1) Rappeler pourquoi il existe une unique suite d'entiers positifs $d_1 | d_2 | \cdots | d_s$ telle que $M \simeq \mathbb{Z}/d_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_s$ et que, nécessairement, $d_s | n$ et $s \leq r$.

(2) Montrer qu'on a des isomorphismes canoniques de $\mathbb{Z}$-modules
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, (\mathbb{Z}/n)^{\oplus r}) \tilde{\to} \prod_{1 \leq i \leq s} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/d_i, (\mathbb{Z}/n)^{\oplus r}) \tilde{\to} \prod_{1 \leq i \leq s} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/d_i, \mathbb{Z}/n)^r.$$

(3) Que vaut $|\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/d_i, \mathbb{Z}/n)|$?

(4) En déduire que $S(n,r) \leq d(n)^r n^r$, où $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n.

(5) Conclure.

Exercice 3. Soit A un anneau commutatif. Pour un idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ on note $c_{\mathfrak{p}} : A \to A_{\mathfrak{p}} := (A \setminus \mathfrak{p})^{-1} A$ le morphisme de localisation.

On définit la hauteur $ht_A(\mathfrak{p})$ d'un idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ par
$$ht_A(\mathfrak{p}) = sup\{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} | \ \exists \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p},\ \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r \in spec(A)\}.$$

(1) Montrer que $ht_A(\mathfrak{p}) = ht_A(\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}})$.

On rappelle (TD 1, Exo 11) que dans un anneau artinien, tout idéal premier est de hauteur 0 (*viz* est maximal).

Dans ce qui suit, on supposera A noetherien. On rappelle qu'en particulier A ne possède qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux (TD 2, Exo 3).

(2) Soit $a \in A \setminus A^{\times}$. Notons $\mathcal{P}_a := \{\mathfrak{p} \in spec(A) \mid a \in \mathfrak{p}\}$. Montrer que $\mathcal{P}_a$ ne possède qu'un nombre fini d'éléments minimaux pour $\subset$.

(3) Soit $I \subset A$ un idéal contenu dans le radical de Jacobson de A et M un A-module de type fini. Montrer que $M = IM$ implique $M = 0$.

(4) Supposons A local d'unique idéal maximal $\mathfrak{m}$. Montrer que si $\mathfrak{m}$ est nilpotent alors A est artinien.

L'objectif des questions qui suivent est de montrer que tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_a$ minimal pour $\subset$ est de hauteur 1.

(5) Montrer qu'on peut supposer que A est local, d'unique idéal maximal $\mathfrak{p}$. ** On fait cette hypothèse dans ce qui suit **.

(6) Montrer qu'il suffit de montrer que pour tout idéal premier $\mathfrak{q} \in spec(A)$, $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$, $\mathfrak{q} A_{\mathfrak{q}}$ est nilpotent.

(7) Montrer que $\sqrt{Aa} = \mathfrak{p}$.

(8) Montrer qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $Aa \supset (\sqrt{Aa})^N$.

(9) En déduire que A/Aa est artinien.

(10) On note $\mathfrak{q}^{(n)} := c_{\mathfrak{q}}^{-1}(\mathfrak{q}^n A_{\mathfrak{q}}) \subset A$. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\mathfrak{q}^{(n)} + Aa = \mathfrak{q}^{(n+1)} + Aa$ puis que $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)} + x\mathfrak{q}^{(n)}$.

(11) En déduire que $\mathfrak{q}^n A_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}^{n+1} A_{\mathfrak{q}}$. Conclure.