Examen 2021/2022 (II)
4M003 - Algèbre commutative
Anna Cadoret

Durée: 2:00

Avertissement.

Sont autorisés: le polycopié du cours, les notes manuscrites du cours, les dictionnaires de langues papier. Tous les autres documents sont interdits, notamment les corrigés polycopiés et manuscrits des travaux dirigés, du devoir maison et des annales des années antérieures.

Les réponses peuvent être rédigées en français ou en anglais. Le sujet est long; le barême sera adapté en conséquence. Prenez donc le temps de *justifier soigneusement* vos réponses. Vous pouvez bien sûr admettre certaines questions.

Exercice . Soit A un anneau commutatif.

(1) Soit M un A-module. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
   (a) Pour toute suite exacte $N' \to N \to N''$ de A-modules la suite $N' \otimes_A M \to N \otimes_A M \to N'' \otimes_A M$ est exacte.
   (b) Pour toute suite exacte courte $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ de A-modules la suite $0 \to N' \otimes_A M \to N \otimes_A M \to N'' \otimes_A M \to 0$ est exacte.
   (c) Pour toute suite exacte $0 \to N' \to N$ de A-modules la suite $0 \to N' \otimes_A M \to N \otimes_A M$ est exacte.
   On dit qu'un A-module M qui vérifie les propriétés équivalentes (a), (b), (c) est A-plat.

(2) Soit M_i, $i \in I$ une famille de A-modules. Montrer que $\oplus_{i\in I} M_i$ est A-plat si et seulement si M_i est A-plat, $i \in I$. En déduire qu'un A-module libre est A-plat.

(3) Soit $S \subset A$ une partie multiplicative. Montrer que $S^{-1}A$ est A-plat.

(4) Soit M un A-module. Montrer que M est A-plat si et seulement si $M_{\mathfrak{p}}$ est $A_{\mathfrak{p}}$-plat, $\mathfrak{p} \in spec(A)$.

(5) Si A est un anneau principal et M un A-module de type fini, montrer que M est A-plat si et seulement si M est sans torsion.

(6) Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte courte de A-modules. Supposons que M'' est A-plat. Montrer que:
   (a) Pour tout A-module N la suite $0 \to M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to 0$ est encore exacte.
   (b) M est A-plat si et seulement si M' est A-plat.

(7) Soit $0 \to M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_r \to 0$ une suite exacte de A-modules. Montrer que si $M_1, \ldots, M_r$ sont A-plats alors M_0 est A-plat.

Problème. Soit B un anneau et $A \subset B$ un sous-anneau.

(1) Montrer que pour $b \in B$ les propriétés suivantes sont équivalentes:
   (a) Il existe un polynôme unitaire non nul $0 \neq P_b \in A[T]$ tel que $P_b(b) = 0$;
   (b) La sous A-algèbre $A[b] \subset B$ est de type fini comme A-module;
   (c) Il existe une sous-A-algèbre $C \subset B$ contenant $A[b]$ qui est de type fini comme A-module.

On dit qu'un élément $b \in B$ qui vérifie les propriétés équivalentes (a), (b), (c) ci-dessus est entier sur A.

(2) Montrer que l'ensemble $B^A \subset B$ des éléments de B entiers sur A est une sous-A-algèbre de B.

On dit que B^A est la clôture intégrale de A dans B. Si $A = B^A$, on dit que A est intégralement clos dans B. Si $B^A = B$ on dit que B est entier sur A. Si A est intègre, $B = K$ est le corps des fractions de A et $A = K^A$, on dit simplement que A est intégralement clos.

(3) Supposons B entier sur A.
  (a) Montrer que si $S \subset A$ est une partie multiplicative alors $S^{-1}B$ est entier sur $S^{-1}A$.
  (b) Montrer que $S^{-1}(B^A) = (S^{-1}B)^{S^{-1}A}$.

(4) Soit $f : M \to N$ un morphisme de A-modules.
  (a) Montrer que pour tout $\mathfrak{p} \in spec(A)$, $f : M \to N$ induit un morphisme canonique de $A_\mathfrak{p}$-modules $f_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$.

  (b) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:
    (i) $f : M \to N$ est surjectif;
    (ii) Pour tout $\mathfrak{p} \in spec(A)$, $f_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ est surjectif;
    (iii) Pour tout $\mathfrak{m} \in spm(A)$, $f_\mathfrak{m} : M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ est surjectif.

  (c) Supposons A intègre. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:
    (i) A est intégralement clos;
    (ii) Pour tout $\mathfrak{p} \in spec(A)$, $A_\mathfrak{p}$ est intégralement clos;
    (iii) Pour tout $\mathfrak{m} \in spm(A)$, $A_\mathfrak{m}$ est intégralement clos.

Si $I \subset A$ est un idéal, on note encore $B^I \subset B^A$ l'ensemble des éléments de B tels qu'il existe un polynôme unitaire non nul $0 \neq P_b \in I[T]$ tel que $P_b(b) = 0$.

(5) On suppose A, B intègres, A intégralement clos dans B. Soit $I \subset A$ un idéal. On note $I^B := BI \subset B$ l'idéal engendré par I dans B. Montrer que $B^I = \sqrt{I^B}$ (donc en particulier $B^I \subset B$ est un idéal).

(6) On suppose A, B intègres, A intégralement clos dans B. Notons $K = Frac(A)$ le corps des fractions de A. Soit $I \subset A$ un idéal et $x \in B^I$. Par définition x est algébrique sur K; on note $P_x = T^n + \sum_{1 \leq i \leq n} a_i T^{n-i} \in K[T]$ le polynôme minimal de x sur K. Montrer que $a_1, \ldots, a_n \in \sqrt{I}$

(7) On suppose toujours A, B intègres, A intégralement clos dans B et on note $K = Frac(A)$ le corps des fractions de A. On veut montrer que pour toutes suites d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_n$ de A, toute suite d'idéaux premiers $\mathfrak{q}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{q}_m$ de B telle que $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap A$, $i = 1, \ldots, m$ peut se prolonger en une suite d'idéaux premiers $\mathfrak{q}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{q}_n$ de B telle que $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap A$, $i = 1, \ldots, n$.

  (a) Dire pourquoi on peut supposer $m = 1$, $n = 2$.

  (b) Soit $f : R \to S$ un morphisme d'anneaux. Soit $\mathfrak{p} \in spec(R)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:
    (i) il existe $\mathfrak{q} \in spec(S)$ tel que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$;
    (ii) $\mathfrak{p} = f^{-1}(f(\mathfrak{p})S)$.
  En déduire qu'il suffit de montrer que $\mathfrak{p}_2 = B_{\mathfrak{q}_1}\mathfrak{p}_2 \cap A$.

  (c) Soit $x \in B_{\mathfrak{q}_1}\mathfrak{p}_2$, que l'on écrit sous la forme $x = y/s$ avec $y \in B\mathfrak{p}_2$, $s \in B \setminus \mathfrak{q}_1$.

    (i) Montrer que $y \in B^{\mathfrak{p}_2}$ et que les coefficients $a_1, \ldots, a_n$ de son polynôme minimal $P_y = T^n + \sum_{1 \leq i \leq n} a_i T^{n-i} \in K[T]$ sur K sont dans $\mathfrak{p}_2$.

    (ii) On suppose maintenant $x \in B_{\mathfrak{q}_1}\mathfrak{p}_2 \cap A$. Calculer le polynôme minimal P_x de x sur K en fonction de P_y et de x. Justifier que $P_x \in A[T]$.

    (iii) Montrer que $x \in \mathfrak{p}_2$.

anna.cadoret@imj-prg.fr
IMJ-PRG- Sorbonne Université.