Examen 2021/2022 (2ème Session)
4M003 - Algèbre commutative
Anna Cadoret

Durée: 2:00

Avertissement.

Sont autorisés: le polycopié du cours, les notes manuscrites du cours, les dictionnaires de langues papier. Tous les autres documents sont interdits, notamment les corrigés polycopiés et manuscrits des travaux dirigés, du devoir maison et des annales des années antérieures.

Les réponses peuvent être rédigées en français ou en anglais. Le sujet est long; le barême sera adapté en conséquence. Prenez donc le temps de *justifier soigneusement* vos réponses. Vous pouvez bien sûr admettre certaines questions.

Préambule: Soit B un anneau et $A \subset B$ un sous-anneau. On rappelle les résultats suivants (vus notamment dans le DM),

(1) Pour $b \in B$ les PSSE:
- (i) Il existe un polynôme unitaire non nul $0 \neq P_b \in A[T]$ tel que $P_b(b) = 0$;
- (ii) La sous A-algèbre $A[b] \subset B$ est de type fini comme A-module;
- (iii) Il existe une sous-A-algèbre $C \subset B$ contenant $A[b]$ qui est de type fini comme A-module.

On dit qu'un élément $b \in B$ qui vérifie les propriétés équivalentes ci-dessus est entier sur A.

(2) L'ensemble $B^A \subset B$ des éléments de B entiers sur A est une sous-A-algèbre de B.

Si $A = B^A$, on dit que A est intégralement clos dans B. Si $B^A = B$ on dit que B est entier sur A. Si A est intègre de corps de fraction K et $A = K^A$, on dit que A est intégralement clos.

Problème

(1) Soit K un corps commutatif de caractéristique 0 et $K \subset L$ une extension de corps finie (i.e. telle que que L est de K-dimension finie $[L : K] :=\dim_K(L)$).
- (a) Montrer que pour tout $y \in L$
  - (i) Il existe un unique morphisme de K-algèbres $ev_y : K[T] \to L$ tel que $ev_y(T) = y$;
  - (ii) Il existe un unique polynôme irréductible unitaire $P_y \in K[T]$ tel que $ev_y(P_y) = 0$;
  - (iii) $K[y] = K(y)$ est de K-dimension finie, égale au degré de P_y.
- (b) Montrer que pour tout $y, z \in L$ tels que $P_y = P_z$ il existe un unique isomorphisme de K-algèbres $\sigma : K[y]\tilde{\to}K[z]$ tel que $\sigma(y) = z$
- (c) Pour tout $y \in L$ on note $L_y : L \to L$, $z \mapsto yz$ la multiplication à gauche par y; par définition, c'est un automorphisme K-linéaire de L. On note $\chi_y \in K[T]$ son polynôme caractéristique. Montrer que $\chi_y = P_y^{[L:K(y)]}$.

(2) Soit K un corps et $P \in K[T]$ un polynôme irréductible. Montrer qu'il existe une extension de corps $K \subset L$ finie telle que L soit de K-dimension égale au degré de P et $y \in L$ tel que $P = P_y$. En déduire qu'il existe une extension de corps finie $K \subset L$ telle que, P est totalement décomposé dans $L[T]$ i.e. s'écrit comme produit de facteurs de degré 1: $P = (T - y_1) \cdots (T - y_r)$ dans $L[T]$.

(3) Soit A un anneau intègre de corps des fractions K et $K \subset L$ une extension de corps finie. Soit $y \in L$
- (a) Supposons que $P_y \in K[T]$ est totalement décomposé dans $L[T]$: $P = (T - y_1) \cdots (T - y_r)$. Montrer que $y \in L^A$ si et seulement si $y_i \in L^A$ pour tout $i = 1, \ldots, r$ (cf. Préambule pour la notation L^A);
- (b) En déduire que si $y \in L^A$, $P_y \in K^A[T]$.

(4) Soit A un anneau intègre de corps des fractions K et $K \subset L$ une extension de corps finie, de K-dimension r. On peut munir L de la forme K-bilinéaire

$$L \otimes_K L \to K,\ (y, z) \mapsto \langle y, z\rangle := Tr_K(L_{yz})$$

On suppose que (*) cette forme est non-dégénérée i.e. $L\tilde{\to}L^\vee$, $y\mapsto\langle y,-\rangle$ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels, où $L^\vee := Hom_K(L,K)$ est le dual K-linéaire de L.

(a) Montrer que si $\underline{y}=y_1,\dots,y_r$ est une K-base de L il existe une unique K-base $\underline{y}^\vee=y_1^\vee,\dots,y_r^\vee$ de L (dite duale de $\underline{y}$) telle que $\langle y_i,y_j^\vee\rangle=\delta_{i,j}$, $1\leq i,j\leq r$.

(b) Montrer que tout $0\neq y\in L$ vérifie une équation de la forme $\sum_{1\leq i\leq r}a_iy^i=0$ avec $a_1,\dots,a_r\in A$ et $a_r\neq 0$. Montrer que $a_ry\in L^A$.

(c) Montrer que L admet une K-base $\underline{y}=y_1,\dots,y_r$ dont les éléments sont dans L^A.

(d) Soit $\underline{y}^\vee=y_1^\vee,\dots,y_r^\vee$ la base duale de $\underline{y}$. Montrer que L^A est un sous K^A-module du K^A-module libre $\oplus_{1\leq i\leq r}K^Ay_i^\vee(\subset L)$.

(e) Supposons que A est principal et intégralement clos. Montrer que L^A est un A-module libre de rang r.

(f) Supposons que A est noetherien et intégralement clos. Montrer que L^A est un A-module de type fini. En déduire que L^A est aussi noetherien.

Remarque: L'hypothèse (*) est équivalente au fait que $K\subset L$ est une extension de corps séparable; c'est par exemple automatique si K est de caractéristique 0 ou un corps parfait (par ex. un corps fini).

Exercice On rappelle que si A est un anneau et $I_1,\dots,I_r\subset A$ des idéaux, l'idéal produit $I_1\cdots I_r\subset A$ est l'idéal de A engendré par les éléments de la forme $a_1\cdots a_r$ avec $a_i\in I_i$, $i=1,\dots,r$

(1) Soit A un anneau et $\mathfrak{p}\subset A$ un idéal premier. Soit $I_1,\dots,I_r\subset A$ des idéaux. Montrer que si $I_1\cdots I_r\subset\mathfrak{p}$ alors il existe $i=1,\dots,r$ tel que $I_i\subset\mathfrak{p}$.

(2) Soit A un anneau noetherien intègre. Montrer que tout idéal non nul contient un produit d'idéaux premiers non nuls. (Indication: on pourra introduire l'ensemble $\mathcal{E}$ des idéaux non nuls de A qui ne contiennent aucun produit d'idéaux premiers non nuls et raisonner par l'absurde en supposant cet ensemble non vide).

(3) Soit A un anneau noetherien et dont tout idéal premier non nul est maximal. On note K le corps des fractions de A et on suppose que A n'est pas un corps (donc $A\subsetneq K$). Soit $\mathfrak{m}\subset A$ un ideal maximal (donc non nul puisque A n'est pas un corps). On introduit

$$\mathfrak{m}':=\{x\in K\mid x\mathfrak{m}\subset A\}\subset K.$$

(a) Montrer que $\mathfrak{m}'\subset K$ est un sous-A-module de type fini de K.

(b) On note $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'\subset K$ le sous-A-module de K engendré par les éléments de la forme $\mu\mu'$, $\mu\in\mathfrak{m}$, $\mu'\in\mathfrak{m}'$. Montrer que l'on a

$$\mathfrak{m}\subset\mathfrak{m}\mathfrak{m}'\subset A$$

(c) En déduire que $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ ou $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'=A$.

(d) On suppose de plus A intégralement clos (cf. Préambule). L'objectif est de montrer que $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'=A$. On raisonne par l'absurde en supposant $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$.

(i) Montrer que pour tout $x\in\mathfrak{m}'$, et pour tout $n\geq 0$ $x^n\mathfrak{m}\subset\mathfrak{m}$.

(ii) En déduire que $A[x]$ est un A-module de type fini puis que $x\in A$ et que $A=\mathfrak{m}'$.

(iii) Soit $0\neq a\in\mathfrak{m}$ et soit $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_r\subset A$ des idéaux premiers non nuls tels que $\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_r\subset Aa$ (cf. Question (2)) avec r *minimal* pour cette propriété. Montrer qu'il existe $1\leq i\leq r$ tel que $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}_i$.

(iv) Quitte à renuméroter, on peut supposer que $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}_1$. On note $I=\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_r$. Montrer qu'il existe $b\in I$ tel que $b\notin Aa$. En déduire que $A\subsetneq\mathfrak{m}'$ et conclure.

anna.cadoret@imj-prg.fr
IMJ-PRG- Sorbonne Université.