Examen 2021/2022 (2ème Session) - Correction
4M003 - Algèbre commutative
Anna Cadoret

Durée: 2:00

Avertissement.

Préambule: Soit B un anneau et $A \subset B$ un sous-anneau. On rappelle les résultats suivants (vus notamment dans le DM),

(1) Pour $b \in B$ les PSSE:
   (i) Il existe un polynôme unitaire non nul $0 \neq P_b \in A[T]$ tel que $P_b(b) = 0$;
   (ii) La sous A-algèbre $A[b] \subset B$ est de type fini comme A-module;
   (iii) Il existe une sous-A-algèbre $C \subset B$ contenant $A[b]$ qui est de type fini comme A-module.

   On dit qu'un élément $b \in B$ qui vérifie les propriétés équivalentes ci-dessus est entier sur A.

(2) L'ensemble $B^A \subset B$ des éléments de B entiers sur A est une sous-A-algèbre de B.

Si $A = B^A$, on dit que A est intégralement clos dans B. Si $B^A = B$ on dit que B est entier sur A. Si A est intègre de corps de fraction K et $A = K^A$, on dit que A est intégralement clos.

Problème

(1) Soit K un corps commutatif de caractéristique 0 et $K \subset L$ une extension de corps finie (i.e. telle que que L est de K-dimension finie $[L : K] :=\dim_K(L)$).
   (a) Pour tout $y \in L$
      (i) L'existence et l'uncité du morphisme de K-algèbres $ev_y : K[T] \to L$ tel que $ev_y(T) = y$ est exactement la propriété universelle de la K-algèbre des polynômes à une indéterminée;
      (ii) Comme L est de K-dimension finie et $K[T]$ de K-dimension non finie, $ev_y : K[T] \to L$ n'est pas injectif; son noyau $\ker(ev_y)$ est donc un idéal non nul de $K[T]$. Or $K[T]$ est principal donc $\ker(ev_y) = K[T]P_y$ pour un unique polynôme unitaire $P_y \in K[T]$. En particulier, $ev_y : K[T] \to L$ se factorise de façon unique en un morphisme injectif de K-algèbres $\overline{ev}_y : K[T]/K[T]P_y \hookrightarrow L$. Comme L est un corps, cela assure en particulier que $K[T]/P_y$ est un anneau intègre donc que $K[T]P_y$ est un idéal premier. Par définition, cela assure que $P_y \in K[T]$ est premier donc, en particulier, irréductible.
      (iii) On a toujours $K[y] \subset K(y)$ et comme $K(y)$ est par définition le plus petit sous-corps de K contenant y, $K[y] \subset K(y)$ ssi $K[y]$ est un corps. Comme $\overline{ev}_y : K[T]/K[T]P_y \hookrightarrow L$ induit un isomorphisme de K-algèbre $\overline{ev}_y : K[T]/K[T]P_y \tilde{\to} K[y]$ donc $K[y]$ est un corps ssi $K[T]/K[T]P_y$ est un corps. Mais $K[T]$ est principal donc tout idéal premier non nul - en particulier $K[T]P_y$ - de $K[T]$ est maximal, ce qui assure que $K[T]/K[T]P_y$ est un corps. $K[T]$ est non seulement principal mais aussi euclidien; par division euclidienne, une K-base de $K[T]/K[T]P_y$ est donnée par les classes de $1, T, \ldots, T^{\deg(P_y)-1}$.
   (b) Soit $y, z \in L$ tels que $P_y = P_z =: P$. S'il existe un isomorphisme de K-algèbres $\sigma : K[y] \tilde{\to} K[z]$ tel que $\sigma(y) = z$, celui est automatiquement unique car $K[y]$ est engendrée comme K-algèbre par y donc tout morphisme de K-algèbres de source $K[y]$ est uniquement déterminé par l'image de y. Pour l'existence, on construit $\sigma : K[y] \tilde{\to} K[z]$ en utilisant les isomorphismes $\overline{ev}_y : K[T]/K[T]P \tilde{\to} K[y]$, $\overline{ev}_z : K[T]/K[T]P \tilde{\to} K[z]$: $\sigma = \overline{ev}_z \circ \overline{ev}_y^{-1} : K[y] \tilde{\to} K[z]$.
   (c) Pour tout $y \in L$ on note $L_y : L \to L$, $z \mapsto yz$ la multiplication à gauche par y; par définition, c'est un automorphisme K-linéaire de L. On note $\chi_y \in K[T]$ son polynôme caractéristique. Déjà, $P_y(L_y) = L_{P(y)} = 0$ donc $P_y | \chi_y$. Si $L = K[y]$, $P_y = \chi_y$ puisque P_y et χ_y sont unitaires de même degré. E, général, on peut choisir une $K(y)$-base $e_1, \ldots, e_r$ de L et observer que la matrice de L_y dans la K-base $e_1, \ldots, e_1 y^{\deg(P_y)-1}, e_2, \ldots, e_2 y^{\deg(P_y)-1}$ etc. est donnée par une matrice diagonale par bloc avec r blocs et chaque bloc égal à la matrice compagnon de P_y.

(2) Soit K un corps et $P \in K[T]$ un polynôme irréductible. On a vu dans la question (1) que $K \subset L = K[T]/P$ est une extension de corps finie de K-dimension égale au degré de P et si on note $y \in L$ la classe

de T dans $K[T]/P$, on a, tautologiquement $P(y) = 0$ donc $P_y|P$ et comme P est irréductible, $P_y = P$. Soit $L_1 := K[T]/P$. Si P est totalement décomposé dans $L_1[T]$, on prend $L_1 = L$. Sinon, P s'écrit de façon unique (factorialité) sous la forme $P = Q_{1,1}Q_{1,2}$ avec $Q_{1,1}$ totalement décomposé dans $L_1[T]$ et tous les facteurs irréductible de $Q_{1,2}$ dans $L_1[T]$ de degré ≥ 2. On choisit un facteur irréductible P_2 de $Q_{1,2}$ dans $L_1[T]$ et on itère l'argument avec $L_1[T]$ et P_2 pour obtenir une extension de corps finie $L_1 \subset L_2$ tel que P_2 admet un zéro dans L_2. Si P est totalement décomposé dans $L_2[T]$, on prend $L_2 = L$, sinon, $P = Q_{2,1}Q_{2,2}$ avec $Q_{2,1}$ totalement décomposé dans $L_2[T]$, tous les facteurs irréductible de $Q_{2,2}$ dans $L_2[T]$ de degré ≥ 2 et $\deg(Q_{2,2})<\deg(Q_{1,2})$. On conclut par rec.

(3) Soit A un anneau intègre de corps des fractions K et $K \subset L$ une extension de corps finie. Soit $y \in L$
  (a) Supposons que $P_y \in K[T]$ est totalement décomposé dans $L[T]$: $P = (T - y_1)\cdots(T - y_r)$ et que $y \in L^A$ i.e. il existe un polynôme unitaire $P \in A[T]$ tel que $ev_y(P) = 0$. D'après (1) (b), il existe un unique ismorphisme de K-algèbres $\sigma : K(y)\tilde{\to}K(y_y)$ tq $\sigma(y) = y_i$. Donc $0 = \sigma P(y) = P(\sigma(y)) = P(y_i)$ (ici on utilise $P \in A[T] \subset K[T]$), ce qui montre qu'on a aussi $ev_{y_i}(P) = 0$ donc que $y_i \in L^A$. Les rôles de y et y_i étant évidemment interchangeables, on a aussi $y_1 \in L^A$ implique $y \in L^A$.
  (b) Soit $y \in L^A$. D'après (2), il existe une etension de corps finie $K \subset L$ tel que, dans $L[T]$, $P_y = (T - y_1)\cdots(T - y_r)$. D'après (3) (a), $y \in L^A$ implique $y_i \in L^A$, $i = 1,\dots,r$. Or en développant $P_y = (T - y_1)\cdots(T - y_r)$, on voit que les coefficients de P_y sont des éléments de $\mathbb{Z}[y_1,\dots,y_r] \subset L^A$ puisque L^A est un anneau (cf. Préambule). Par ailleurs, ceux sont aussi des éléments de K, donc ceux sont des éléments de $K \cap L^A = K^A$.

(4) Soit A un anneau intègre de corps des fractions K et $K \subset L$ une extension de corps finie, de K-dimension r. On peut munir L de la forme K-bilinéaire

$$L \otimes_K L \to K,\ (y, z) \mapsto \langle y, z\rangle := Tr_K(L_{yz})$$

On suppose que (*) cette forme est non-dégénérée i.e. $L\tilde{\to}L^\vee$, $y \mapsto \langle y, -\rangle$ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels, où $L^\vee := Hom_K(L, K)$ est le dual K-linéaire de L.
  (a) Soit $\underline{y} = y_1,\dots,y_r$ est une K-base de L et $\underline{f} = f_1,\dots,f_r$ la K-base duale de $\underline{y}$ i.e. la K-base de $L^\vee$ définie par $f_i(y_j) = \delta_{i,j}$. La K-base $\underline{y}^\vee = y_1^\vee,\dots,y_r^\vee$ de L définie par $\langle y_i^\vee, -\rangle = f_i$ convient, $i = 1,\dots,r$.
  (b) Pour tout $0 \neq y \in L$ écrivons $P_y = T^s + \sum_{0\leq i\leq s-1} x_iT^i \in K[T]$ avec $x_i = \alpha_i/\beta_i$, $a_i, b_i \in A$, $i = 0,\dots,s-1$ et $s \leq r$. En multipliant P_y par $b := \beta_1\dots\beta_s$, on obtient $by^s + \sum_{0\leq i\leq s-1} bx_iy^i = 0$ et en mulitpliant cette égalité par y^{r-s}, on obtient bien une éaglité de la forme $\sum_{1\leq i\leq r} a_iy^i = 0$ avec $a_1,\dots,a_r \in A$ et $a_r \neq 0$. En mulitpliant cette égalité par a_r^{r-1}, on obtient $(a_ry)^r + \sum_{1\leq i\leq r-1} a_r^{r-1}a_iy^i = 0$ i.e. $a_ry \in L^A$ (cf. Préambule).
  (c) D'après la question précdente, si $\underline{z} = z_1,\dots,z_r$ est une K-base de L, il existe $0 \neq a_1,\dots,a_r \in A$ tels que, en posant $y_i = a_iz_i$, on ait $y_i \in L^A$, $i = A,\dots,r$. Comme les a_i sont tous non nuls, $\underline{y} = y_1,\dots,y_r$ est encore une K-base de L mais dont, cette fois-ci, les éléments sont tous dans L^A.
  (d) Soit $\underline{y}^\vee = y_1^\vee,\dots,y_r^\vee$ la base duale de $\underline{y}$. Soit $y = \sum_{1\leq i\leq r} x_iy_i^\vee \in L^A$. Pour tout $i = 1,\dots,r$ on a $y_iy \in L^A$ puisque L^A est un anneau. En particulier, $\langle y_i, y\rangle = tr(L_{y_iy}) \in K^A$ (combiner (1) (c) et (3) (b)). Or par déf de $\underline{y}^\vee$, $\langle y_i, y\rangle = x_i$. Cela montre que $L^A \subset \oplus_{1\leq i\leq r}K^Ay_i^\vee$.
  (e) Si A est principal et intégralement clos, $K^A = A$ et tout sous-module d'un A-module libre de rang r est libre de rang $\leq r$. Donc d'après la question précédente, L^A est un A-module libre de rang $\leq r$. Par ailleurs, L^A contient le sous-A-module libre $\oplus_{1\leq i\leq r}Ay_i$ donc il est de rang $\geq r$.
  (f) Si A est noetherien et intégralement clos, $K^A = A$ et tout A-module de type fini est noetherien. En particulier, $\oplus_{1\leq i\leq r}Ay_i^\vee$ est noetherien. Donc L^A est un A-module de type fini et noetherien comme sous-A-module du module noetherien $\oplus_{1\leq i\leq r}Ay_i^\vee$. Comme $A \subset L^A$ et que L^A est un A-module noetherien, L^A est a fortiori un L^A-module noetherien i.e. L^A est un anneau noetherien..

Remarque: L'hypothèse (*) est équivalente au fait que $K \subset L$ est une extension de corps séparable; c'est par exemple automatique si K est de caractéristique 0 ou un corps parfait (par ex. un corps fini).

Exercice On rappelle que si A est un anneau et $I_1,\dots,I_r \subset A$ des idéaux, l'idéal produit $I_1\cdots I_r \subset A$ est l'idéal de A engendré par les éléments de la forme $a_1\cdots a_r$ avec $a_i \in I_i$, $i = 1,\dots,r$

(1) Soit A un anneau et $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal premier. Soit $I_1,\dots,I_r \subset A$ des idéaux tels que $I_1\cdots I_r \subset \mathfrak{p}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que pour chaque $i = 1,\dots,r$, il existe $a_i \in I_i$, $a_i \notin \mathfrak{p}$ ou, de façon équivalente, modulo $\mathfrak{p}$ on a $\overline{a}_i \neq 0$. Mais par hypothèse, $a_1\cdots a_r \in \mathfrak{p}$ donc, modulo $\mathfrak{p}$ on a aussi

$\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r = 0$, ce qui contredit le fait que $A/\mathfrak{p}$ est intègre.

(2) Soit A un anneau noetherien intègre. On suit l'indication et on introduit l'ensemble $\mathcal{E}$ des idéaux non nuls de A qui ne contiennent aucun produit d'idéaux premiers non nuls. Si $\mathcal{E} \neq \emptyset$, comme A est noetherien, $\mathcal{E}$ admet un élément maximal pour $\subset$, disons I. Comme $I \in \mathcal{E}$, I n'est en particulier pas premier donc il existe $a, b \in A \setminus I$ tq $ab \in I$. En particulier, $I \subsetneq I + Aa, I + Ab$ et, par maximalité de I, $I + Aa, I + Ab \notin \mathcal{E}$. Donc il existe des idéaux premiers non nuls $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$, $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ de A tq $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r \subset I + Aa$, $\mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_s \subset I + Ab$. Mais alors $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_s \subset (I + AA)(I + Ab) \subset I$: contradiction.

(3) Soit A un anneau noetherien et dont tout idéal premier non nul est maximal. On note K le corps des fractions de A et on suppose que A n'est pas un corps (donc $A \subsetneq K$). Soit $\mathfrak{m} \subset A$ un ideal maximal (donc non nul puisque A n'est pas un corps). On introduit

$$\mathfrak{m}' := \{x \in K \mid x\mathfrak{m} \subset A\} \subset K.$$

(a) Comme $\mathfrak{m}$ est un idéal, $\mathfrak{m}'$ est clairement un sous-A-module de K. Comme A est intègre, tout $0 \neq a \in \mathfrak{m}$, induit un morphisme injectif de A-modules $\mathfrak{m}' \hookrightarrow A$, $x \mapsto xa$. Cela fait en particulier de $a\mathfrak{m}'$ un sous-A-module de A. Or A est noetherien donc tous ses sous-A-modules sont de type fini.

(b) L'inclusion $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ vient de ce que $1 \in \mathfrak{m}'$ et l'inclusion $\mathfrak{m}\mathfrak{m}' \subset A$ de la définition de $\mathfrak{m}'$.

(c) Comme $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ sont des idéaux de A et que $\mathfrak{m}$ est maximal, soit $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ ou $\mathfrak{m}\mathfrak{m}' = A$.

(d) On suppose de plus A intégralement clos (cf. Préambule). L'objectif est de montrer que $\mathfrak{m}\mathfrak{m}' = A$. On raisonne par l'absurde en supposant $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}\mathfrak{m}'$.

(i) Soit $x \in \mathfrak{m}'$. On procède par rec. Le cas $n = 0$ est tautologique. Supposons $x^i\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$, $i = 0, \ldots, n$. Alors $x^{n+1}\mathfrak{m}' = xx^n\mathfrak{m}' \subset x\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}'\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, où la dernière égalité est par hypothèse et l'avant-dernière inclusion par hypothèse de rec.

(ii) D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathfrak{m}'$ et pour tout $0 \neq a \in \mathfrak{m}$ on a $A[x] \subset a^{-1}\mathfrak{m} \tilde{\to} \mathfrak{m}$. Or comme A est noetherien, $\mathfrak{m}$ est un A-module noetherien donc $A[x]$ est un A-module de type fini (comme sous A-module d'un A-module noetherien). En particulier, $a \in K^A = A$ (caractérisation (ii) du Préambule). Et comme cela vaut pour tout $x \in \mathfrak{m}'$ (et que $A \subset \mathfrak{m}'$ tautologiquement), on a bien $A = \mathfrak{m}'$.

(iii) Soit $0 \neq a \in \mathfrak{m}$ et soit $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r \subset A$ des idéaux premiers non nuls tels que $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r \subset Aa$ (cf. Question (2)) avec r *minimal* pour cette propriété. D'après la Question (1) il existe $1 \leq i \leq r$ tel que $\mathfrak{p}_i \subset Aa \subset \mathfrak{m}$. Mais on a supposé que tout idéal premier non nul de A - en particulier $\mathfrak{p}_i$ - était maximal. Donc $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}$.

(iv) Quitte à renuméroter, on peut supposer que $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_1$. On note $I = \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_r$. Par minimalité de r, il existe $b \in I$ tel que $b \notin Aa$ donc, en particulier, $a^{-1}b \notin A$. Par contre, on a $\mathfrak{m}b \subset \mathfrak{m}I \subset Aa$ donc $a^{-1}b \in \mathfrak{m}'$. Cela contredit la Question (ii).

anna.cadoret@imj-prg.fr
IMJ-PRG- Sorbonne Université.