Examen 2022/2023
4M003 - Algèbre commutative
Anna Cadoret

Durée: 3:00

Avertissement.

Sont autorisés: le polycopié du cours, les notes manuscrites du cours, les dictionnaires de langues papier. Tous les autres documents sont interdits, notamment les corrigés polycopiés et manuscrits des travaux dirigés et des annales des années antérieures.

Les réponses peuvent être rédigées en français ou en anglais. Le sujet est long; le barême sera adapté en conséquence. Prenez donc le temps de *justifier soigneusement* vos réponses. Vous pouvez bien sûr admettre certaines questions.

Exercice 1. On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ est homogène de degré d s'il s'écrit sous la forme

$$P = \sum_{|\underline{\alpha}|=d} a_{\underline{\alpha}} \underline{X}^{\underline{\alpha}},$$

où on a noté pour $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\underline{\alpha}| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ et $\underline{X}^{\underline{\alpha}} = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$. On définit le degré total d'un polynôme $P = \sum_{\underline{\alpha}} a_{\underline{\alpha}} \underline{X}^{\underline{\alpha}} \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ comme

$$deg(P) = \max\{|\underline{\alpha}| \mid \underline{\alpha} \in \mathbb{N}^n,\ a_{\underline{\alpha}} \neq 0\}.$$

(1) Montrer que le polynôme

$$P_n(T_1, \ldots, T_n, X) = (X - T_1) \cdots (X - T_n) \in \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n, X]$$

s'écrit dans $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n][X]$ sous la forme $P = X^n + \sum_{1 \leq k \leq n} S_k^n X^{n-k}$ avec $S_k^n \in \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ homogènes de degré k, $k = 1, \ldots, n$.

(2) Montrer que $S_k^{n-1} = S_k^n(T_1, \ldots, T_{n-1}, 0)$, $k = 1, \ldots, n-1$.

(3) Soit R une A-algèbre. Montrer que si $\phi : R \to R$ est un morphisme de A-algèbres l'ensemble des éléments ϕ-fixes

$$R^\phi := \{r \in R \mid \phi(r) = r\} \subset R$$

est une sous-A-algèbre de R.

(4) On fait agir le groupe symmétrique $\mathcal{S}_n$ sur $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n \times \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n] & \to & \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n] \\ (\sigma, P) & \mapsto & \sigma \cdot P = P(T_{\sigma(1)}, \ldots, T_{\sigma(n)}). \end{array}$$

On note $\Sigma[T_1, \ldots, T_n] := \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]^{\mathcal{S}_n} \subset \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ le sous-ensemble des polynômes $\mathcal{S}_n$-invariants *i.e.* des $P \in \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ tels que $\sigma \cdot P = P$, $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Vérifier que $\Sigma[T_1, \ldots, T_n]$ est une sous-$\mathbb{Z}$-algèbre de $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$.

(5) On définit le poids d'un monôme $\underline{T}^{\underline{\alpha}}$ par $w(\underline{T}^{\underline{\alpha}}) = \sum_{1 \leq i \leq n} i\alpha_i$ et le poids d'un polynôme $P = \sum_{\underline{\alpha}} a_{\underline{\alpha}} \underline{T}^{\underline{\alpha}}$ comme

$$w(P) = \max\{w(\underline{X}^{\underline{\alpha}}) \mid \underline{\alpha} \in \mathbb{N}^n,\ a_{\underline{\alpha}} \neq 0\}.$$

L'objectif de cette question est de montrer

H(n) Pour tout $d \geq 0$ et pour tout $P \in \Sigma[T_1, \ldots, T_n]$ de degré total $\leq d$ il existe $Q \in \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ de poids $\leq d$ tel que $P(T_1, \ldots, T_d) = Q(S_1^n, \ldots, S_n^n)$.

par récurrence sur n. Comme H(1) est tautologique, il s'agit en fait de vérifier H($n-1$) $\Rightarrow$ H(n), $n \geq 2$. Supposons donc H($n-1$). Fixons $P \in \Sigma[T_1, \ldots, T_n]$ de degré total d.

(a) Montrer qu'il existe $Q_1 \in \Sigma[T_1, \ldots, T_{n-1}]$ tel que $P(T_1, \ldots, T_{n-1}, 0) = Q_1(S_1^{n-1}, \ldots, S_{n-1}^{n-1})$

(b) Montrer que le polynôme $P_1 := P - Q_1(S_1^n, \ldots, S_{n-1}^n)$ est divisible par $S_n^n (= T_1 \cdots T_n)$ dans $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$.

(c) Conclure.

(6) Montrer que les polynômes $S_1^n, \ldots, S_n^n$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Z}$ *i.e.* que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, $Q(S_1^n, \ldots, S_n^n) = 0$ implique $Q = 0$.

(7) Montrer qu'on a un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-algèbres $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] \tilde{\to} \Sigma[T_1, \ldots, T_n]$ canonique.

(8) Montrer que $\Sigma[T_1, \ldots, T_n]$ est factoriel et exprimer les éléments irréductibles de $\Sigma[T_1, \ldots, T_n]$ en fonction de ceux de $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$.

Exercice 2. Soit A un anneau principal de corps des fractions $A \hookrightarrow K$. Notons $\mathcal{G}_n(K)$ l'ensemble des sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(K)$; le groupe $\mathrm{GL}_n(K)$ agit par conjugaison sur $\mathcal{G}_n(K)$;

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(K) \times \mathcal{G}_n(K) & \to & \mathcal{G}_n(K) \\ (g, G) & \mapsto & gGg^{-1} \end{array}$$

Pour $G \in \mathcal{G}_n(K)$, on note

$$N_{\mathrm{GL}_n(K)}(G) := \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n(K)}(G)(= \{g \in \mathrm{GL}_n(K) \mid gGg^{-1} = G\}) \subset \mathrm{GL}_n(K)$$

le stabilisateur de G pour cette action. C'est en particulier un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$. L'objectif de cet exercice est de montrer que

$$N_{\mathrm{GL}_n(K)}(\mathrm{GL}_n(A)) = K^\times \mathrm{GL}_n(A),$$

où l'on a noté (par un léger abus de notation) $K^\times \subset \mathrm{GL}_n(K)$ le sous-groupe des homothéties cI_n, $c \in K^\times$. On rappelle par ailleurs que $\mathrm{GL}_n(A) \subset \mathrm{GL}_n(K)$ est le sous-groupe des matrices inversibles de $M_n(A)$ (de façon équivalente - cela se voit en utilisant la formule de la comatrice, c'est le sous-groupe des matrices $M \in M_n(A)$ telles que $\det(M) \in A^\times$).

(1) Justifier l'inclusion $K^\times \mathrm{GL}_n(A) \subset N_{\mathrm{GL}_n(K)}(\mathrm{GL}_n(A))$.

Pour l'inclusion réciproque, le cas $n = 1$ est immédiat; on peut donc supposer $n \geq 2$. Fixons $g \in N_{\mathrm{GL}_n(K)}(\mathrm{GL}_n(A))$ et notons $M := g(A^{\oplus n}) \subset K^{\oplus n} =: V$. On note également $e_1, \ldots, e_n$ la K-base canonique de $K^{\oplus n}$ (de sorte que $A^{\oplus n} = \oplus_{1 \leq i \leq n} Ae_i \subset \oplus_{1 \leq i \leq n} Ke_i = K^{\oplus n} = V$).

(2) Montrer que M est un A-module libre de rang n.

(3) Montrer que $M \subset V$ est $\mathrm{GL}_n(A)$-stable.

(4) Montrer qu'il existe $0 \neq a \in A$ tel que $aM \subset A^{\oplus n}$.

(5) Montrer qu'il existe $d \in A$, $f_1 \in A^{\oplus n}$ membre d'une A-base $f_1, \ldots, f_n$ de $A^{\oplus n}$ et un sous-A-module $N \subset A^{\oplus n}$ tels que

$$\frac{a}{d} M = f_1 A \oplus N$$

comme A-modules.

(6) Pour $i = 1, \ldots, n$ notons $\tau_i \in \mathcal{S}_n$ la transposition qui échange 1 et i. En considérant la matrice L_i de $f_{\tau_i(1)}, \ldots, f_{\tau_i(n)}$ dans $e_1, \ldots, e_n$, montrer que $e_i \in \frac{d}{a} M$.

(7) Déduire de la question précédente que $\frac{a}{d} M = A^{\oplus n}$ puis que $K^\times \mathrm{GL}_n(A) = N_{\mathrm{GL}_n(K)}(\mathrm{GL}_n(A))$.

Exercice 3: (Calculs de produits tensoriels)

(1) Montrer que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ et que $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$.

(2) Soit A un anneau. Montrer que si $I, J \subset A$ sont des idéaux on a un isomorphisme canonique de A-modules (en fait de A-algèbres) $A/I \otimes_A A/J \tilde{\to} A/(I + J)$. En déduire que si I, J sont premiers entre eux $A/I \otimes_A A/J = 0$.

(3) Soit A un anneau principal, $\mathfrak{p} \in spec(A)$ et M un A-module de type fini. Pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ calculer $A/\mathfrak{p}^n \otimes_A M$ en fonction des invariants de M. Si N est un autre A-module de type fini, calculer les invariants de $M \otimes_A N$ en fonction de ceux de M et N.

(4) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, on fixe $\zeta_n \in \mathbb{C}$ une racine primitive n-ième de 1 (*i.e.* un élément d'ordre n du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\times$) et on note $\mathbb{Q}(\zeta_n) \subset \mathbb{C}$ le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant ζ_n et $\mathbb{Q}$.

  (a) Justifier que $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ est de $\mathbb{Q}$-dimension finie.

  (b) Soit $p \in \mathbb{Z}$ un nombre premier. Montrer que le polynôme $\Phi_p(T) := \sum_{0 \leq i \leq p-1} T^i$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[T]$. Calculer la $\mathbb{Q}$-dimension de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$.

  (c) Soit $p, q \in \mathbb{Z}$ des nombres premiers (pas forcément distincts). Calculer la $\mathbb{Q}$-dimension de la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{Q}(\zeta_p) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_q)$ et déterminer ses idéaux premiers (on discutera selon que $p = q$ ou $p \neq q$).