Examen 2022/2023 (2ème Session)
4M003 - Algèbre commutative
Anna Cadoret

Durée: 2:00

Avertissement.

Sont autorisés: le polycopié du cours, les notes manuscrites du cours, les dictionnaires de langues papier. Tous les autres documents sont interdits, notamment les corrigés polycopiés et manuscrits des travaux dirigés, du devoir maison et des annales des années antérieures.

Les réponses peuvent être rédigées en français ou en anglais. Le sujet est long; le barême sera adapté en conséquence. Prenez donc le temps de *justifier soigneusement* vos réponses. Vous pouvez bien sûr admettre certaines questions.

Préambule: On rappelle que tous les anneaux sont commutatifs unitaires sauf mention du contraire. Si A est un anneau et $I_1, \dots, I_r \subset A$ un idéal, on rappelle aussi que $I_1 \cdots I_r \subset A$ est l'idéal engendré par les éléments de la forme $a_1 \cdots a_r$, $a_i \in I_i$, $i = 1, \dots, r$; autrement dit un élement de $I_1 \cdots I_r$ est une combinaison A-linéaire d'éléments de la forme $a_1 \cdots a_r$, $a_i \in I_i$, $i = 1, \dots, r$.

Problème Soit A un anneau. On dit qu'un idéal $\mathfrak{q} \subset A$ est primaire si $\mathfrak{q} \subsetneq A$ et pour tout $a, b \in A$, $ab \in \mathfrak{q}$ $\Rightarrow a \in \mathfrak{q}$ ou $b^n \in \mathfrak{q}$ pour un certain entier $n \geq 1$ (*i.e.* $ab \in \mathfrak{q} \Rightarrow a \in \mathfrak{q}$ ou $b \in \sqrt{\mathfrak{q}}$).

(1) Montrer qu'un idéal $\mathfrak{q} \subset A$ est primaire si et seulement si $A/\mathfrak{q} \neq 0$ et tout diviseur de zero dans $A/\mathfrak{q}$ est nilpotent.

(2) Soit $\phi : A \to B$ un morphisme d'anneaux et $\mathfrak{q} \subset B$ un idéal primaire. Montrer que $\phi^{-1}(\mathfrak{q}) \subset A$ est un idéal primaire.

(3) Soit $\mathfrak{q} \subset A$ un idéal primaire. Montrer que $\sqrt{\mathfrak{q}} \subset A$ est un idéal premier et que c'est le plus petit idéal premier de A contenant $\mathfrak{q}$. (On dit alors que $\mathfrak{q}$ est un idéal $\mathfrak{p}$-primaire, où $\mathfrak{p} := \sqrt{\mathfrak{q}}$).

(4) Soit k un corps.

(a) Avec $A := k[X, Y]$, $\mathfrak{q} := \langle X, Y^2 \rangle \subset k[X, Y]$, montrer que $\mathfrak{q} \subset A$ est primaire, calculer $\mathfrak{p} := \sqrt{\mathfrak{q}}$ et montrer qu'on a les inclusions strictes:

$$\mathfrak{p}^2 \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$$

(en particulier, $\mathfrak{q}$ n'est pas de la forme $\mathfrak{p}^n$ pour un entier $n \geq 1$).

(b) Avec $A := k[X, Y, Z]/\langle XY - Z^2 \rangle$, $\mathfrak{p} := \langle x, z \rangle \subset k[x, y, z]$, où x, y, z sont les images de X, Y, Z dans A, montrer que $\mathfrak{p} \subset A$ est premier mais que $\mathfrak{p}^2 \subset A$ n'est pas primaire.

(5) Soit $\mathfrak{q} \subset A$ un idéal tel que $\sqrt{\mathfrak{q}} \subset A$ est maximal. Montrer que $\mathfrak{q} \subset A$ est primaire. En déduire que si $\mathfrak{m} \subset A$ est un idéal maximal, les idéaux $\mathfrak{m}^n \subset A$ sont $\mathfrak{m}$-primaire, $n \geq 1$.

(6) Soit $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal premier. Montrer qu'une intersection finie d'idéaux $\mathfrak{p}$-primaires est $\mathfrak{p}$-primaire.

(7) Soit $I, J \subset A$ deux idéaux, on note $(I : J) := \{a \in A \mid aJ \subset I\} \subset A$. Vérifier que $(I : J) \subset A$ est encore un idéal de A. Si $J = Aa$ est principal, on note $(I : a) := (I : Aa)$. Soit maintenant $\mathfrak{q} \subset A$ un idéal $\mathfrak{p}$-primaire et $a \in A$. Montrer que:

(a) Si $a \in \mathfrak{q}$ alors $(\mathfrak{q} : a) = A$;

(b) Si $a \notin \mathfrak{q}$ alors $(\mathfrak{q} : a)$ est $\mathfrak{p}$-primaire;

(c) Si $a \notin \mathfrak{p}$ alors $(\mathfrak{q} : a) = \mathfrak{q}$.

(8) On dit qu'un idéal $I \subset A$ est décomposable s'il existe des idéaux primaires $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_r \subset A$ tels que

$$I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r.$$

(a) Montrer que si $I \subset A$ est décomposable il existe des idéaux primaires $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r \subset A$ tels que, en posant $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$, $i = 1, \ldots, r$ on ait $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ et, en outre (i) $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$, $1 \leq i \neq j \leq r$ et $\cap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j \not\subset \mathfrak{q}_i$, $i = 1, \ldots, r$. On dit qu'une telle décomposition est minimale.

(b) Soit $I \subset A$ un idéal décomposable et $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ une décomposition minimale. Montrer que

$$\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\} = \{\sqrt{(I : a)} \mid a \in A\} \cap \mathrm{spec}(A).$$

En particulier, les $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ ne dépendent pas de la décomposition minimale; on dit que ce sont les idéaux premiers associés à I.

(c) Avec $A := k[X, Y]$, $I := \langle X^2, XY \rangle \subset A$, montrer que $I \subset A$ est décomposable, déterminer ses idéaux premiers associés et donner une décomposition minimale.

(9) On dit qu'un idéal $I \subset A$ est irréductible si pour tout iéaux $I_1, I_2 \subset A$, $I = I_1 \cap I_2$ implique $I = I_1$ ou $I = I_2$. On suppose maintenant que A est noetherien.

(a) Montrer que tout idéal $I \subset A$ est une intersection finie d'idéaux irréductibles.

(b) Montrer que tout idéal irréductible $I \subset A$ est primaire.

(c) Montrer que tout idéal $I \subset A$ est décomposable.

Exercice Soit A un anneau (que l'on pourra supposer noetherien si l'on ne veut pas invoquer le lemme de Zorn).

(1) On dit qu'un A-module M est simple s'il est non nul et si ses seuls sous-A-modules sont $\{0\}$ et M. Montrer que si M_1, M_2 sont deux A-modules simples non isomorphes le seul morphisme de A-modules $M_1 \to M_2$ est le morphisme nul.

(2) Soit M un A-module. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) Il existe des sous A-modules simples $M_i \subset M$, $i \in I$ tels que $M = \sum_{i \in I} M_i$;

(b) Il existe des sous A-modules simples $M_i \subset M$, $i \in I$ tels que $M = \oplus_{i \in I} M_i$;

(c) Pour tout sous-A-module $M' \subset M$ il existe un sous-A-module $M'' \subset M$ tel que $M \simeq M' \oplus M''$.

(Ind.: On pourra utiliser, après l'avoir démontré, que tout sous-A-module non nul d'un A-module M vérifiant (c) contient un sous-A-module simple).

On dit qu'un A-module M vérifiant les propriétés équivalentes ci-dessus est un A-module semisimple.

(3) Soit A un anneau principal. Décrire les A-modules simples puis les A-modules semisimples de type fini.

(4) Soit maintenant k un corps et V un k-espace vectoriel de dimension fini. On rappelle qu'à tout endomorphisme $u \in End_k(V)$, on associe un $k[T]$-module V_u (défini par $T \cdot v = u(v)$, $v \in V$. On dit que $u \in End_k(V)$ est semisimple si le $k[T]$-module V_u l'est.

(a) Montrer que $u \in End_k(V)$ est semisimple si et seulement si son polynôme minimal est sans facteurs carrés.

(b) On suppose ici $k = \mathbb{F}_2$ et V de $\mathbb{F}_2$-dimension 3. On se fixe une base de sorte qu'on identifie $End_{\mathbb{F}_2}(V) \simeq M_3(\mathbb{F}_2)$. Calculer le nombre de classe de conjugaison de matrices semisimples dans $M_3(\mathbb{F}_2)$ et, pour chacune de ces classes, donner un représentant explicite.

anna.cadoret@imj-prg.fr
IMJ-PRG- Sorbonne Université.