Partiel 2023/2024
4M034 - Théorie des nbrs 2

Durée: 2:00

Avertissement.

Sont autorisés: le polycopié du cours, les notes manuscrites du cours, les dictionnaires de langues papier. Tous les autres documents sont interdits, notamment les corrigés polycopiés et manuscrits des travaux dirigés et des annales des années antérieures.

Les réponses peuvent être rédigées en français ou en anglais. Prenez le temps de *justifier soigneusement* vos réponses. Vous pouvez bien sûr admettre certaines questions.

Exercice 1. On considère le polynôme $P = T^3 - T^2 - 2T - 8$. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ une racine de P. On note $k := \mathbb{Q}(\alpha)$.

(1) Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

(2) Calculer le polynôme minimal de $\alpha' := 4/\alpha$ et en déduire que $\alpha' \in \mathcal{O}_k$.

(3) Calculer α^2, α'^2 en fonction de α, α' et en déduire que le sous-groupe abélien $Z := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\alpha' \subset \mathcal{O}_k$ est un en fait un ordre de $\mathcal{O}_k$.

(4) Montrer que $disc(Z) = -503$ et en déduire que $Z = \mathcal{O}_k$.

(5) Soit $\omega = a + b\alpha + c\alpha' \in \mathcal{O}_k$ (donc $a, b, c \in \mathbb{Z}$). On veut montrer que $\mathbb{Z}[\omega] \subsetneq \mathcal{O}_k$ *i.e.* $[\mathcal{O}_k : \mathbb{Z}[\omega]] > 1$. Si $b = c = 0$, c'est trivial donc on suppose $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

 (a) Montrer qu'on peut supposer $a = 0$.

 (b) Soit A la matrice de passage de $1, \alpha, \alpha'$ à $1, \omega, \omega^2$ *i.e.*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha' \end{pmatrix}$$

 Calculer $[\mathcal{O}_k : \mathbb{Z}[\omega]]$ en fonction de $det(A)$.

 (c) Montrer que $2 | [\mathcal{O}_k : \mathbb{Z}[\omega]]$.

Exercice 2. Soit p un nombre premier. On dit qu'un polynôme unitaire $P = T^n + \sum_{0 \leq i \leq n-1} a_i T$ de $\mathbb{Z}[T]$ est Eisenstein en p si $p | a_i$, $i = 0, \ldots, n-1$ et $p^2 \not| a_0$. On rappelle qu'un tel polynôme est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Soit donc $P = T^n + \sum_{0 \leq i \leq n-1} a_i T \in \mathbb{Z}[T]$ Eisenstein en p et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ une racine de P. On note $k := \mathbb{Q}(\alpha)$

(1) Soit $b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{Z}$ tels que $\sum_{0 \leq i \leq n-1} b_i \alpha^i \in p\mathcal{O}_k$. On veut montrer que $b_i \in p\mathbb{Z}$, $i = 0, \ldots, n-1$. Supposons que c'est vrai pour $j < i$ (la condition étant vide si $i = 0$) et montrons que c'est vrai pour i.

 (a) Montrer qu'il existe $\beta \in \mathcal{O}_k$ tel que $b_i \alpha^{n-1} = p\beta$;

 (b) En considérant la norme dans $k/\mathbb{Q}$ de $b_i \alpha^{n-1} = p\beta$, montrer que $p | b_i^n$.

 (c) Conclure.

(2) On rappelle que tout $0 \neq x \in \mathbb{Q}$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = \prod_{\ell:\text{premier}} \ell^{v_\ell(x)}$ avec $v_\ell(x) \in \mathbb{Z}$ et $v_\ell(x) = 0$ pour tous les premiers sauf un nombre fini. On dit que $v_\ell(x)$ est la valuation ℓ-adique de x. Montrer que pour tout $x_0, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{Q}$, $\sum_{0 \leq i \leq n-1} x_i \alpha^i \in \mathcal{O}_k$ implique $v_p(x_i) \geq 0$, $i = 0, \ldots, n-1$.

(3) Montrer que $p \not| [\mathcal{O}_k : \mathbb{Z}[\alpha]]$.

(4) On s'intéresse au cas particulier $P = T^3 - 2$.

 (a) Calculer $disc(\mathbb{Z}[\alpha])$.

 (b) Montrer que $2 \not| [\mathcal{O}_k : \mathbb{Z}[\alpha]]$;

 (c) Calculer le polynôme minimal de $1 + \alpha$ sur $\mathbb{Q}$ et montrer que $3 \not| [\mathcal{O}_k : \mathbb{Z}[\alpha]]$;

 (d) Déduire de ce qui précède que $\mathbb{Z}[\alpha] = \mathcal{O}_k$.