EXERCICE 1. — Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$. On pose

$$u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\big(a+k\frac{b-a}{n}\big), \quad v_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(a+k\frac{b-a}{n}\big), \quad w_n = \frac{1}{2}\big(u_n+v_n\big).$$

a) Interpréter géométriquement les sommes u_n, v_n et w_n. Si f est croissante, montrer que $u_n \leqslant \int_a^b f \leqslant v_n$. Quelle est la limite des suites (u_n), (v_n) et (w_n) ?

b) Soit $R_n = \int_a^b f - u_n$. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, Montrer que

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} (a+(k+1)h-x)f'(x)\,dx,$$

où l'on a posé $h=(b-a)/n$.

c) (*suite*) Montrer à l'aide de l'égalité de la moyenne qu'il existe pour tout entier $k \in \{0,\dots,n-1\}$ un réel $x_k \in [kh,(k+1)h]$ tel que

$$R_n = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k).$$

En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} nR_n = \frac{1}{2}(b-a)(f(b)-f(a)).$$

d) Calculer

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_a^b f - v_n\right) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\int_a^b f - w_n\right).$$

Quelle conséquence pouvez-vous en tirer concernant le calcul numérique ?

EXERCICE 2. — Soit I un intervalle contenant 0 et soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction intégrable. On suppose que f est continue en 0. Calculer la limite quand $x \to 0$ de

$$\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

EXERCICE 3. — a) Calculer, en discutant suivant λ, et en prenant garde aux ensembles de définition, toutes les primitives de la fonction $x \mapsto 1/(1-2\lambda\cos x+\lambda^2)$.

b) On suppose $|\lambda|<1$ et on pose, pour $n \geqslant 0$,

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{1-2\lambda\cos x+\lambda^2}\,dx.$$

Chercher une relation entre I_n, I_{n+1} et I_{n+2}.

c) Calculer I_n pour tout entier n.