Analyse pour le CAPES (ACAP)
Examen du 12 novembre 2003 (1h30)

EXERCICE 1. — Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t.$$

a) Calculer I_0, I_1, I_2, I_3.

b) Pour tout nombre réel $a \in [0,1]$ et tout entier $n \geqslant 0$, montrer l'inégalité

$$\frac{a}{1+a^n} \leqslant I_n \leqslant 1.$$

c) Montrer que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 1.$$

(Revenir à la définition d'une limite.)

d) Montrer les égalités

$$1 - I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u}\,\mathrm{d}u.$$

e) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout $a \in [0,1]$, on a l'inégalité

$$a^{1/n} \log\frac{2}{1+a} \leqslant n(1-I_n) \leqslant \log 2.$$

f) Poser $a = 1/n$ dans l'inégalité précédente et en déduire la limite de $n(1-I_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

g) Montrer que l'on a un développement limité

$$I_n = 1 - \frac{\log 2}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon(1/n),$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 en 0.

EXERCICE 2. — a) Déterminer les racines complexes du polynôme x^4+1, sous forme trigonométrique (module, argument compris entre $-\pi$ et π) et cartésienne (partie réelle, partie imaginaire).

b) Déterminer des nombres réels a, b, c et d tels que

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{ax+b}{x^2 - x\sqrt{2}+1} + \frac{cx+d}{x^2+x\sqrt{2}+1}.$$

Sont-ils uniques ?

c) Déterminer toutes les primitives de la fonction définie par $x \mapsto 1/(x^4+1)$.

d) Montrer l'égalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(Justifier en particulier l'existence de l'intégrale.)