ALGORITHMIQUE ET ALGÈBRE

Travaux dirigés

§1. Nombres entiers

B. Quelques démonstrations par récurrence

Exercices. — 1) On dispose d'un stock illimité de pièces de 3 €et de 5 €. Quels sont les montant que l'on peut payer ?
2) Si n est un entier $\geqslant 1$ et x un réel dans $[0,1]$, montrer l'inégalité

$$1 - nx \leqslant (1-x)^n \leqslant 1 - \frac{nx}{1+(n-1)x}.$$

3) Si x et y sont deux réels positifs, montrer que $\sqrt{xy} \leqslant (x+y)/2$.
4) (*suite*) Montrer par récurrence sur n que si $x_1, \dots, x_{2^n}$ sont des réels positifs,

$$(x_1 \cdots x_{2^n})^{1/2^n} \leqslant (x_1 + \cdots + x_{2^n})/2^n.$$

5) (*suite*) Soit $N \geqslant 2$ et soit $x_1, \dots, x_N$ des réels. Démontrer que

$$(x_1 \cdots x_N)^{1/N} \leqslant (x_1 + \cdots + x_N)/N$$

(*inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique*). Pour cela, choisir un entier n tel que $N \leqslant 2^n$; poser, pour $N \leqslant k \leqslant 2^n$, $x_k = (x_1 + \cdots + x_N)/N$; appliquer la question précédente.
6) Soit (x_n) une suite de réels dans $]0,1[$. On pose $S_n = x_1 + \cdots + x_n$. Montrer l'inégalité

$$1 - S_n < (1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n) < \frac{1}{1+S_n}.$$

7*) On trace n droites dans le plan ; on suppose que deux d'entre elles ne sont pas parallèles et que trois d'entre elles ne sont pas concourantes. Quelle est le nombre de régions du plan qu'elles délimitent ? Combien d'entre elles sont bornées ? (Une $(n+1)$-ième droite coupe chacune des n premières en n points distincts ; elle traverse $(n+1)$ régions en les divisant en 2. Lesquelles sont bornées ?)

C. Récurrence et la définition des opérations élémentaires

Exercice. — Démontrer l'associativité de l'addition, la commutativité et l'associativité de la multiplication.

D. Suites définies par récurrence

Exercices. — 1) On considère une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison a et on pose $U_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que $U_n = (n+1)(u_0 + \frac{1}{2}an)$.
2) On considère une suite géométrique (v_n) de premier terme u_0 et de raison a et on pose encore $U_n = u_0 + \cdots + u_n$. On suppose que $a \neq 1$; montrer alors que $U_n = u_0 \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$. Que vaut U_n dans le cas où $a = 1$?

3) Un récipient contient 1 dm^3 de riz, chaque grain faisant 1 mm^3. On dispose un grain de riz sur la première case d'un échiquier, deux sur la deuxième, quatre sur la suivante, et ainsi de suite, en doublant à chaque fois le nombre de grains. Combien de cases de l'échiquier seront remplies lorsque le pot de riz ne contiendra plus assez de grains ? Combien en reste-t-il dans le pot ?
4) Montrer par récurrence sur n les formules

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad 1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Que vaut, si n est impair, la somme $1+3+5+\cdots+n$?
5) Dans un prêt, calculer la somme totale S payée par le débiteur en fonction du nombre de mensualités, du taux mensuel et du capital emprunté. Avec MAPLE, tracer la fonction $N \mapsto S$ (on fixera une valeur numérique de τ_{m} et $C=1$).
6) Avec MAPLE (ou un tableur), produire un tableau de remboursements en donnant, mois par mois, la part d'intérêts dans la mensualité et le capital restant dû.
7) Une banque permet de rembourser une partie du prêt par anticipation, moyennant des frais de dossier. Le client de la banque a-t-il intérêt à rembourser partiellement son prêt ? (La réponse dépend du taux, du capital restant dû, des frais de dossier et du montant du remboursement exceptionnel. Écrire un programme qui fait l'ensemble des calculs.)
8) La suite (u_n) est définie par $u_1=1/2$ et $u_n=u_{n-1}/(2nu_{n-1}+1)$, si $n\geqslant 2$. Calculer $u_1+\cdots+u_n$ pour tout entier n. (Commencez par calculer explicitement cette somme pour de petites valeurs de n, conjecturez alors une formule générale que vous démontrerez ensuite par récurrence.)

§2. Combinatoire, probabilités

A. Il est toujours bon d'avoir des principes

Exercices. — 1) Au mois de janvier, Anatole a pris ses repas de midi au Restau U. Il y a mangé 17 fois de la pizza et 25 fois de la glace. Montrer qu'il a mangé de la pizza et de la glace au cours d'un des repas.
2) Dans une classe de 35 élèves, chaque étudiant doit apprendre au moins une des deux langues, anglais ou allemand. 25 étudient l'anglais et 20 apprennent les deux langues. Combien d'élèves étudient l'allemand ?
3) Hier soir, sur 100 français, 95 ont regardé le journal télévisé, 85 ont regardé le film qui suivait et 70 se sont couché de bonne heure. Combien de français (au moins) se sont couchés tôt après avoir regardé le journal et le film ?
4) Le principe d'inclusion-exclusion donne lieu à des inégalités : si $A_1,\dots,A_n$ sont des parties d'un ensemble X, montrer par exemple que

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i\neq j} |A_i\cap A_j| \leqslant \Big|\bigcup_i A_i\Big| \leqslant \sum_i |A_i|.$$

Généraliser.
5) On considère n objets (non nécessairement distincts). Si a est un entier tel que $a\leqslant\sqrt{n-1}$, montrer que l'on peut trouver ou bien $a+1$ objets identiques, ou bien $a+1$ objets distincts.
6) Dans un groupe de 6 personnes, deux personnes quelconques ou bien s'aiment, ou bien se détestent. Montrer que l'on peut en trouver 3 qui sont amis, ou 3 qui sont mutuellement

ennemis. (*Fixer une personne Anatole; parmi ses 5 relations, Anatole a (au moins) 3 amis, ou 3 ennemis. Si Anatole a trois amis et que deux d'entre eux sont amis, le résultat est obtenu. Sinon...*)
7*) 1958 touristes parlent 6 langues différentes mais leur guide constate que d'eux quelconques d'entre eux ne peuvent se parler que dans une seule de ces langues. Montrer qu'il existe un groupe de trois touristes qui peuvent communiquer entre eux dans une même langue.

B. Triangle de Pascal

Exercices. — 1) Soit X et Y deux ensembles finis. Combien y a-t-il d'applications injectives de X dans Y ? (La même question avec « surjectives » est naturelle, mais plus difficile.)
2) Estimer le nombre d'applications injectives de $\{1,\dots,30\}$ dans $\{1,\dots,365\}$. Sur une classe de 30 élèves, quelle est la probabilité que deux élèves soient nés le même jour ?
3) Démontrer la relation $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n-1}^{p-1} + \mathrm{C}_{n-1}^p$ pour $n > p \geqslant 1$ en utilisant la formule qui calcule C_n^p à l'aide de factorielles.
4) Inversement, à l'aide de cette identité, démontrer par récurrence la formule qui calcule C_n^p.
5) Démontrer de deux façons la formule $\mathrm{C}_n^p = \dfrac{n}{p}\mathrm{C}_{n-1}^{p-1}$ pour $n \geqslant p \geqslant 1$.
6) Démontrer de deux façons que $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_n^{n-p}$.
7) À l'aide de la formule du binôme, démontrer que

$$\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^n = 2^n.$$

8) On pose

$$F_n = \sum_{p \leqslant n/2} \mathrm{C}_{n-p}^p = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_{n-1}^1 + \mathrm{C}_{n-2}^2 + \dots$$

(Le dernier terme est C_p^p si $n = 2p$ est pair, et C_{p+1}^p si $n = 2p+1$ est impair.) Calculer F_0, F_1, F_2,..., F_5. Montrer que $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ (*suite de Fibonacci*).
9) Une combinaison avec répétition de p éléments parmi n est une liste de p éléments de $\{1,\dots,n\}$, non nécessairement distincts, et où l'ordre n'intervient pas. On note R_n^p leur nombre. Montrer que l'on a $\mathrm{R}_n^p = \mathrm{R}_{n-1}^p + \mathrm{R}_n^{p-1}$ si $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$. Montrer aussi $\mathrm{R}_n^0 = 1$, $\mathrm{R}_n^1 = n$ et $\mathrm{R}_1^p = 1$, pour $n \geqslant 1$, $p \geqslant 1$. En déduire par récurrence que $\mathrm{R}_n^p = \mathrm{C}_{n+p-1}^p$.
10) (*autre méthode*) On associe à une partie à $n-1$ éléments de $\{1,\dots,n+p-1\}$ une combinaison avec répétition de la façon suivante : si cette partie est formée de $n-1$ entiers $x_1 < \cdots < x_{n-1}$, on choisit (x_1-1) fois l'entier 1, (x_2-x_1-1) fois l'entier 2, etc., $(x_{n-1}-x_{n-2}-1)$ fois l'entier $n-1$ et pour finir $(n+p-x_{n-1}-1)$ fois l'entier n. Montrer que cela définit une application bijective et en déduire la formule de la question précédente.
11) Un ordinateur (par exemple) ne sait calculer que le produit de deux facteurs et on s'intéresse au nombre de façons K_n d'introduire des parenthèses dans le produit $x_1x_2\dots x_n$ de sorte à pouvoir le calculer. Si $n=2$, c'est un produit de deux facteurs, donc $K_2 = 1$, mais on a $K_3 = 2$ correspondant aux parenthésages $x_1(x_2x_3)$ et $(x_1x_2)x_3$, de même que $K_4 = 5$ avec les parenthésages

$$(x_1x_2)(x_3x_4), \quad ((x_1x_2)x_3)x_4, \quad (x_1(x_2x_3))x_4, \quad x_1((x_2x_3)x_4), \quad \text{et} \quad x_1(x_2(x_3x_4)).$$

Dans un parenthésage, le dernier produit que l'on calcule est le produit de deux facteurs : le sous-produit des p premiers, et celui des $n-p$ derniers. En déduire que

$$K_n = \sum_{p=1}^{n-1} K_p K_{n-p}.$$

12*) (*suite*) Montrer que

$$K_n = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}.$$

En développant $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$, montrer que

$$C_{2n}^n = \sum_{p=0}^{n} \left(C_n^p\right)^2.$$

13) Soit $D_{n,k}$ le nombre de permutations de $\{1,\ldots,n\}$ qui ont exactement k points fixes (*dérangements*). Montrer que $D_{n,0} + \cdots + D_{n,n} = n!$. Montrer que $D_{n,k} = C_n^k D_{n-k,0}$ En déduire que

$$\frac{1}{n!} D_{n,0} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

C. Probabilités

Exercices. — 1) Quelle est la probabilité d'avoir un double en lançant deux dés ? trois dés ?
2) Au Yam, votre deuxième lancer vous fournit 2, 3, 3, 4, 5. Que vaut-il mieux faire : lancer 2, 4, 5 pour un brelan de 3 ou le 3 pour une des deux suites ?
3) Quelle est la probabilité d'avoir trois bons numéros au Loto sur une grille de six numéros parmi 49 ? Quelle est l'espérance de gain (on néglige l'influence des autres joueurs) ? Sachant qu'une partie des mises du Loto est reversée directement à l'État, pourquoi les français pensent-ils que les impôts sont trop élevés ?