GÉOMÉTRIE POUR LE CAPES

Cours à l'Université de Rennes 1 (2003–2004)

Antoine Chambert-Loir

Antoine Chambert-Loir
IRMAR, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex.
E-mail : `antoine.chambert-loir@univ-rennes1.fr`
Url : `http://name.math.univ-rennes1.fr/antoine.chambert-loir`

Version du 23 avril 2004

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

ESPACES AFFINES

La géométrie des espaces vectoriels qu'on étudie en DEUG est très proche de la géométrie du plan ou de l'espace que vous avez apprise au collège. Il y a une différence importante : en algèbre linéaire, les sous-espaces que l'on considère (droites, plans...) sont des *sous-espaces vectoriels* et passent tous par l'origine (le vecteur nul). Cela se voit aussi sur les transformations que l'on peut regarder : ce sont des *applications linéaires* et elles envoient l'origine sur l'origine.

La *géométrie affine* s'astreint de cette contrainte et rajoute les translations aux transformations que l'on étudie. De même, on s'intéresse aussi aux droites, aux plans, etc. qui ne passent pas forcément par l'origine.

De même qu'il existe des espaces vectoriels sur tout corps de base, la géométrie affine peut être développée sur un corps de base arbitraire. Cependant, pour la géométrie classique, le cas important est celui du corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. Une remarque historique : si, au XIX^{e} siècle, les mathématiciens se sont mis à considérer une géométrie sur d'autres corps, ce n'est pas parce qu'ils sont vicieux, mais bien parce que dans certains cas, cela rend les choses plus faciles !

§1. Rappels d'algèbre linéaire

Dans tout ce paragraphe, k est un corps commutatif, fixé une fois pour toutes. Si certains veulent lire $\mathbf{R}$ au lieu de k, je ne m'en formaliserai pas.

A. Définitions générales

DÉFINITION 1.1 (espace vectoriel). — *On appelle k-espace vectoriel un ensemble V muni de deux lois :*

– *une loi interne, notée $+$, qui fait de V un groupe abélien (addition) ;*
– *une loi externe $k \times V \to V$, notée en général $\cdot$ (multiplication)*

On exige que pour tous a et b dans k et tous v et v' dans V, soient vérifiées les propriétés suivantes :

$$a \cdot (v + v') = a \cdot v + a \cdot v' \tag{1.1a}$$

$$(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v), \tag{1.1b}$$

$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v. \tag{1.1c}$$

Si V_1 et V_2 sont des k-espaces vectoriels, leur produit $V_1 \times V_2$, muni de l'addition définie par $(v_1, v_2) + (v_1', v_2') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2')$ et de la multiplication définie par $a \cdot (v_1, v_2) = (a \cdot v_1, a \cdot v_2)$, est un espace vectoriel. Plus généralement, on définit de manière analogue le produit d'une famille (non vide) d'espaces vectoriels.

DÉFINITION 1.2 (sous-espace vectoriel). — *Soit V un k-espace vectoriel. On dit qu'une partie W de V est un sous-espace vectoriel de V si c'est un sous-groupe et si $a \cdot v$ appartient à W pour tout $a \in k$ et tout $v \in W$.*

PROPOSITION 1.3. — *L'intersection d'une famille (non vide) de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*

DÉFINITION 1.4 (sous-espace engendré). — *Soit V un espace vectoriel et soit S une partie de V. Le sous-espace vectoriel de V engendré par S est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de V qui contiennent S.*

C'est le plus petit sous-espace vectoriel de V qui contient S. Si S n'est pas vide, c'est aussi l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, où n est un entier, $v_1, \dots, v_n$ sont des éléments de S et $a_1, \dots, a_n$ des éléments de k.

Si $(W_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-espace vectoriels de V, leur *somme* $\sum W_i$ est le sous-espace vectoriel de V engendré par leur réunion. C'est aussi l'ensemble des sommes $\sum_{i \in I} v_i$, où $v_i \in W_i$ pour tout i. Attention, la réunion d'une famille de sous-espaces vectoriels n'est en général pas un sous-espace vectoriel.

On dit qu'une famille $(W_i)_{i \in I}$ de sous-espaces vectoriels est en *somme directe* si la somme $\sum_{i \in I} v_i$ (avec $v_i \in W_i$ pour tout i) n'est nulle que si l'on a $v_i = 0$ pour tout i.

Soit W un sous-espace vectoriel de V. On dit qu'un sous-espace vectoriel W' est un *supplémentaire* de W si $V = W + W'$ et si W et W' sont en somme directe. On note alors $V = W \oplus W'$.

Exercices. — 1) On suppose $k = \mathbf{R}$. Si $n \geqslant 2$, montrer que la réunion de n droites distinctes dans le plan n'est pas un sous-espace vectoriel (faire un dessin puis une démonstration).
2) On suppose que $k = \mathbf{R}$. Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie, soit n un entier et soit $W_1, \dots, W_n$ des sous-espaces vectoriels de V tels que $V = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$. Montrer qu'il existe i tel que $W_i = V$. (Raisonner par récurrence sur n.)

B. Applications linéaires

DÉFINITION 1.6 (application linéaire). — *Soit V et W deux espaces vectoriels. Une* application linéaire *est une application $f : V \to W$ telle que pour tout $a \in k$ et tous $v, v' \in V$, on ait*

$$f(v + v') = f(v) + f(v') \tag{1.6a}$$

$$f(a \cdot v) = a \cdot f(v). \tag{1.6b}$$

Une application linéaire est en particulier un homomorphisme de groupes abéliens. On peut aussi condenser ces deux formules en la relation

$$f(a\cdot v + a'\cdot v') = a\cdot f(v) + a'\cdot f(v'),$$

où a, $a' \in k$ et v, $v' \in V$.

PROPOSITION 1.7. — *Soit $f\colon V \to W$ une application linéaire. L'image par f d'un sous-espace vectoriel de V est un sous-espace vectoriel de W. L'image réciproque par f d'un sous-espace vectoriel de W est un sous-espace vectoriel de V.*

En particulier, l'image réciproque du sous-espace vectoriel nul par une application linéaire $f\colon V \to W$ est un sous-espace vectoriel de V, appelé *noyau* de f, et noté $\ker f$. On rappelle que f est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$.

Soit W_1 et W_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel V. L'application $W_1 \times W_2\colon V$ définie par $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$ est une application linéaire. Son image est le sous-espace $W_1 + W_2$. Son noyau est l'ensemble des couples de la forme $(w, -w)$ avec $w \in W_1 \cap W_2$. En particulier, elle est injective si et seulement si W_1 et W_2 sont en somme directe. Elle est bijective si et seulement si $V = W_1 \oplus W_2$.

PROPOSITION 1.8. — *Si $f\colon V \to W$ est une application linéaire bijective, sa bijection réciproque $f^{-1}\colon W \to V$ est bijective.*

Exercices. — 1) Soit V un espace vectoriel et soit $f\colon V \to V$ une application linéaire telle que $f^2 = f$. Notons $W = \operatorname{im} f$ et $W' = \ker f$. Montrer que $V = W \oplus W'$; f est le projecteur sur W parallèlement à W'.
2) Soit V un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de V tel que $f^2 = \mathrm{id}$. Soit W_+ l'ensemble des $v \in V$ tels que $f(v) = v$ et W_- l'ensemble des $v \in V$ tels que $f(v) = -v$. Montrer que $V = W_+ \oplus W_-$; f est la symétrie par rapport à W_+ parallèlement à W_-.
3) Si p est un projecteur, $2p - \mathrm{id}$ est une symétrie. Si s est une symétrie, $(\mathrm{id} + s)/2$ est un projecteur.
4) Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel V et $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ est un polynôme à coefficients dans k, on note $P(f)$ l'endomorphisme $\sum_{i=0}^n a_i f^i$. Montrer que $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$. Si f et g commutent, montrer que $P(f)$ et $Q(g)$ commutent, pour tous polynômes P et Q.
5) Soit P_i des polynômes premiers entre eux deux à deux et soit $P = \prod P_i$. Montrer que $\ker P(f)$ est la somme directe des $\ker P_i(f)$.

C. Bases

Soit V un espace vectoriel et soit S une partie de V. On dit que S est *génératrice* si le sous-espace vectoriel de V engendré par S est égal à V ; cela signifie que tout élément de V est combinaison linéaire d'éléments de S. On dit que S est *libre* si pour toute partie $\{v_1, \dots, v_n\}$ contenue dans S et tout n-uplet $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$ tels que $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$, on a $a_1 = \dots = a_n = 0$. Une partie qui n'est pas libre est dite *liée*. On dit que S est une *base* si S est à la fois libre et génératrice.

Si un espace vectoriel est engendré par une partie finie, on dit qu'il est de dimension finie.

LEMME 1.10. — *Soit $f\colon V \to W$ une application linéaire.*

Alors f est surjective si et seulement si l'image de toute partie génératrice est génératrice ; f est injective si et seulement si l'image de toute partie libre est libre ; f est bijective si et seulement si l'image de toute base est une base.

PROPOSITION 1.11. — *Soit L et G deux parties d'un espace vectoriel V, avec $L \subset G$. On suppose que L est libre et que G est génératrice.*

Si S est une partie de V vérifiant $L \subset S \subset G$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) *S est une base de V ;*
ii) *S est libre et pour tout $v \in G \setminus S$, $S \cup \{v\}$ est liée ;*
iii) *S est génératrice et pour tout $v \in S \setminus L$, $S \setminus \{v\}$ n'est pas génératrice.*

THÉORÈME 1.12. — *Tout espace vectoriel possède une base.*

Pour un espace vectoriel de dimension finie. — Soit V un espace vectoriel de dimension finie et soit G une partie génératrice finie de V. Posons $L = \varnothing$; c'est une partie libre de V. Parmi toutes les parties libres contenues dans G, choisissons en une, S, de cardinal maximal. Si $S = G$, S est libre et génératrice, donc est une base. Si $S \neq G$, soit v un élément quelconque de $G \setminus S$; alors, $S \cup \{v\}$ est de cardinal $\operatorname{card} S + 1 > \operatorname{card} S$, donc n'est pas libre. D'après la proposition, S est une base de V. □

THÉORÈME 1.13. — *Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même cardinal.*

Démonstration. — Soit B et B' deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie V. Soit G une partie génératrice finie de V. D'après le lemme ci-dessous, $\operatorname{card} B \leqslant \operatorname{card} G$ et $\operatorname{card} B' \leqslant \operatorname{card} G$, car B et B' sont libres ; en particulier, B et B' sont finies. Comme B est génératrice et B' libre, le lemme ci-dessous entraîne que $\operatorname{card} B' \leqslant \operatorname{card} B$. Comme B' est génératrice et B libre, on a de même $\operatorname{card} B \leqslant \operatorname{card} B'$, d'où l'égalité. □

LEMME 1.14. — *Soit V un espace vectoriel, soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une partie génératrice de V et soit $\{v_1, \dots, v_m\}$ une partie libre de V. On a l'inégalité $m \geqslant n$.*

Démonstration. — Montrons par récurrence sur n que $n+1$ vecteurs $v_1, \dots, v_{n+1}$ d'un espace vectoriel V engendré par n vecteurs $e_1, \dots, e_n$ sont liés.

Si $n = 0$, $V = \{0\}$ et la partie $\{0\}$ est liée. Supposons le lemme vrai pour $n-1$. Soit a_{ij} des éléments de k tels que, pour tout $j \in \{1, \dots, n+1\}$,

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i.$$

Si tous les a_{nj} sont nuls, les v_j appartiennent à $\operatorname{vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$; par récurrence, ils sont liés. Sinon, il existe j tel que $a_{nj} \neq 0$ et, pour simplifier les notations, on suppose que $j = n+1$. Posons, si $1 \leqslant j \leqslant n$, $w_j = v_j - (a_{nj}/a_{n,n+1})v_{n+1}$. On a donc

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} \big(a_{ij} - \frac{a_{n,j}}{a_{n,n+1}} a_{i,n+1}\big) e_i = \sum_{i=1}^{n-1} b_{ij} e_i,$$

avec $b_{ij} = a_{ij} - a_{n,j} a_{i,n+1}/a_{n,n+1}$ (et $b_{n,j} = 0$). Les vecteurs $w_1, \dots, w_n$ appartiennent au sous-espace vectoriel engendré par les $n-1$ vecteurs $e_1, \dots, e_{n-1}$. Par récurrence, ils sont liés. Soit $c_1, \dots, c_n$ des scalaires non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^{n} c_j w_j = 0$. On a alors

$$0 = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{n,j}}{a_{n,n+1}} c_j v_{n+1}$$

ce qui montre que les vecteurs $v_1, \dots, v_{n+1}$ sont liés. □

DÉFINITION 1.15. — *On appelle* dimension *de dimension finie le cardinal d'une quelconque de ses bases.*

Ce n'est que dans ce cas que nous utiliserons la notion de dimension d'un espace vectoriel.

PROPOSITION 1.16 (formule du rang). — *Soit $f : V \to W$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie. Alors,*

$$\dim(\operatorname{im} f) + \dim(\ker f) = \dim V.$$

Démonstration. — Soit $(v_1, \dots, v_r)$ une base de $\ker f$ qu'on prolonge en une base $(v_1, \dots, v_n)$ de V. Montrons que $(f(v_{r+1}), \dots, f(v_n))$ est une base de $\operatorname{im} f$. C'en est une partie génératrice. De plus, si l'on a $\sum_{i=r+1}^{n} a_i f(v_i) = 0$, alors $\sum_{i=r+1}^{n} a_i v_i$ appartient au noyau de f. On peut ainsi écrire $\sum_{i=r+1}^{n} a_i v_i = \sum_{i=1}^{r} a_i v_i$, pour des éléments $a_i \in k$, d'où la relation

$$\sum_{i=1}^{r} (-a_i) v_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_i v_i.$$

Comme la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une base, elle est libre et $a_i = 0$ pour tout i. Alors,

$$\dim(\operatorname{im} f) + \dim(\ker f) = (n-r) + r = n = \dim V.$$ □

La dimension de l'image de f est aussi appelée *rang* de l'application linéaire f.

COROLLAIRE 1.17 (formule de Grassmann). — *Soit V un espace vectoriel de dimension finie, soit F et G des sous-espaces vectoriels de V. Alors,*

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

En particulier, F et G sont en somme directe si et seulement si $\dim F + \dim G = \dim V$ et $F \cap G = \{0\}$.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la formule du rang à l'application linéaire $f\colon F\times G \to V$ définie par $f(v,w) = v+w$. □

§2. Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

A. Définitions

Soit V un espace vectoriel. Si $f\colon V \to W$ est une application linéaire, son noyau E est un sous-espace vectoriel de V. Inversement, si E est un sous-espace vectoriel de V, choisissons un supplémentaire F de E dans V. La projection sur F parallèlement à E est une application linéaire de V dans F dont le noyau est précisément E.

DÉFINITION 2.1 (sous-espace affine). — *Soit V un espace vectoriel. On dit qu'une partie* non vide *E de V est un* sous-espace affine *de V s'il existe $v \in E$ tel que l'ensemble $E - x$ formé des $x - v$, avec $x \in E$, est un sous-espace vectoriel de V.*

On a choisi d'imposer qu'une partie vide n'est pas un sous-espace affine. L'autre convention aurait été possible.

LEMME 2.2. — *Soit V un espace vectoriel et soit E un sous-espace affine de E. Pour tout $v \in E$, l'ensemble $E - v$ est un sous-espace vectoriel de V ; il ne dépend pas du choix de v.*

Démonstration. — Fixons $v \in E$ tel que $E - v$ soit un sous-espace vectoriel de V. Si $v' \in E$ et $x \in E$, on a $x - v' = (x-v)-(v'-v)$, donc $x-v' \in E-v$ et $E-v' \subset E-v$. Inversement, si $x \in E$, posons $y = x+v'-2v$. On a $y = (x-v)+(v'-v)$, donc $y \in E - v$. Par suite, $x + v' - v$ appartient à E et $x - v$ appartient à $E - v'$. Cela montre que $E - v' = E - v$. □

DÉFINITION 2.3. — *Soit V un espace vectoriel et soit E un sous-espace affine de V. On appelle* direction *de E le sous-espace vectoriel $E - v$, où v est un élément quelconque de E. On le note $\overrightarrow{E}$. La* dimension *de E est la dimension de $\overrightarrow{E}$.*

Une droite est un sous-espace affine de dimension 1, un plan est un sous-espace affine de dimension 2.

Soit V un espace vectoriel et soit E un sous-espace affine de V. Pour rester proche de l'intuition acquise dans les cours de géométrie de collège, on considère les éléments de E comme des *points* et ceux de sa direction $\overrightarrow{E}$ comme des *vecteurs*. Ainsi, si $A, B \in E$, $B - A$ est un élément de $\overrightarrow{E}$ qu'on notera généralement $\overrightarrow{AB}$. La *relation de Chasles* en est une conséquence immédiate :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (B - A) + (C - B) = C - A = \overrightarrow{AC}.$$

On dit que deux sous-espaces affines d'un même espace vectoriel sont *parallèles* s'ils ont même direction. Deux sous-espaces affines parallèles ont en particulier même dimension (droites parallèles, plans parallèles,...). C'est une relation d'équivalence.

Au lycée, on parle aussi de « droite parallèle à un plan ». c'est une notion dissymétrique qu'on peut définir ainsi : un sous-espace affine E est parallèle à un sous-espace affine F si l'on a $\overrightarrow{E} \subset \overrightarrow{F}$. Ce n'est pas une relation d'équivalence.

PROPOSITION 2.4. — *Soit V un espace vectoriel et soit E_i des des sous-espaces affines de V. Si l'intersection $\bigcap_i E_i$ n'est pas vide, c'est un sous-espace affine de V dont la direction est l'intersection des directions des E_i.*

Démonstration. — Soit E_i des sous-espaces affines d'un espace vectoriel V. Supposons que l'intersection $E = \bigcap_i E_i$ ne soit pas vide et soit v un point de l'intersection. Pour tout i, notons $\overrightarrow{E_i} = E_i - v$; c'est un sous-espace vectoriel de V (la direction de E_i). Notons W l'intersection des $\overrightarrow{E_i}$; c'est un sous-espace vectoriel de V. Si $x \in V$, x appartient à E_i si et seulement si $x - v \in \overrightarrow{E_i}$. Par suite, $x \in E$ si et seulement si $x - v$ appartient à W. Cela montre que $E - v = W$, et $E - v$ est un sous-espace vectoriel de V. Autrement dit, E est un sous-espace affine de E de direction $\overrightarrow{W} = \bigcap_i \overrightarrow{E_i}$. □

COROLLAIRE 2.5. — *Soit S une partie non vide d'un espace vectoriel V. Il existe un plus petit sous-espace affine de V contenant S.*

On le note $\langle S\rangle$. C'est l'intersection (non vide — car contenant S — de la famille non vide — car contenant V) de tous les sous-espaces affines de V qui contiennent S.

PROPOSITION 2.6. — *Soit V un espace vectoriel, soit v un point de V et soit W un sous-espace vectoriel de V. Par v, il passe un sous-espace affine, et un seul, de direction W.*

« Par un point donné, il passe une unique droite parallèle à une droite donnée. » : voilà au moins un indice que la théorie que nous développons a un vague rapport avec la géométrie classique.

Démonstration. — Ce sous-espace affine n'est autre que l'ensemble $W+v$ des éléments de V de la forme $x+v$, avec $x\in W$. □

Exercices. — 1) Par deux points distincts d'un espace vectoriel, il passe une droite affine et une seule.
2) Deux sous-espaces affines qui sont parallèles sont ou égaux ou disjoints.
3) Si $S=\{A_0,\dots,A_n\}$, le sous-espace affine $\overrightarrow{S}$ est le sous-espace affine passant par A_0 de direction l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1},\dots,\overrightarrow{A_0A_n}$. Sa dimension est au plus n.
4) Soit E et F deux sous-espaces affines d'un espace vectoriel V. Soit $A\in E$ et $B\in F$. Alors, $E\cap F\neq\varnothing$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}\in\overrightarrow{E}+\overrightarrow{F}$.
5) Soit E et F deux sous-espaces affines d'un espace vectoriel V. On suppose que $V=\overrightarrow{E}+\overrightarrow{F}$. Montrer que tout sous-espace affine parallèle à E rencontre F. (*Utiliser la question précédente.*)

B. Applications affines

DÉFINITION 2.8 (application affine). — *Soit V et W des espaces vectoriels. Soit E et F des sous-espaces affines de V et W respectivement. On dit qu'une application $f\colon E\to F$ est une* application affine *s'il existe une application linéaire $\overrightarrow{f}\colon\overrightarrow{E}\to\overrightarrow{F}$ et $v\in E$ telle que pour tous $x\in E$, on ait $f(x)=f(v)+\overrightarrow{f}(x-v)$.*

Dans ce cas, on a, pour tous $A,B\in E$ la relation

$$\overrightarrow{f(A)f(B)}=\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}).$$

Cela montre que l'application $\overrightarrow{f}$ ne dépend pas du choix de v. Elle est appelée *l'application linéaire associée* à l'application affine f.

Exemples 2.9. — Soit V un espace vectoriel et soit E un sous-espace affine de V.
Soit $u\in\overrightarrow{E}$. Si $M\in E$, il existe un unique $M'\in E$ tel que $\overrightarrow{MM'}=u$. L'application $M\mapsto M'$ est une application affine de E dans lui-même (*translation de vecteur u*).
Soit $A\in E$ et soit $\lambda\in k$. Si $M\in E$, il existe un unique $M'\in E$ tel que $\overrightarrow{AM'}=\lambda\overrightarrow{AM}$. L'application $M\mapsto M'$ ainsi définie est une application affine de E dans lui-même (*homothétie de centre A et de rapport λ*).

PROPOSITION 2.10. — *Soit V, W des espaces vectoriels, soit E un sous-espace affine de V et F un sous-espace affine de W. Soit $f\colon E\to F$ une application affine; notons $\overrightarrow{f}\colon\overrightarrow{E}\to\overrightarrow{F}$ l'application linéaire associée.*

Si E' est un sous-espace affine de V contenu dans E, $f(E')$ est un sous-espace affine de W contenu dans F dont la direction est $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{E'})$.

Soit F' un sous-espace affine de W; si elle n'est pas vide, son image réciproque $f^{-1}(F')$ est un sous-espace affine de V de direction $(\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{F'})$.

Décrire un sous-espace affine comme l'image d'une application affine, cela revient à le paramétrer. Inversement, on décrit un sous-espace affine comme l'image réciproque d'une application affine chaque fois que l'on doit résoudre un système d'équations linéaires (avec second membre). Le pivot de Gauss est un outil qui permet de passer mécaniquement d'un type de description à l'autre.

PROPOSITION 2.11. — *La composée de deux applications affines est une application affine ; son application linéaire associée est la composée des deux applications linéaires associées.* (Bref, $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.)

L'identité est une application affine.

La bijection réciproque d'une application affine bijective est une application affine.

Exercices. — 1) Soit V un espace vectoriel, soit E un sous-espace affine de V et soit W un sous-espace vectoriel de V tels que $V = W \oplus \overrightarrow{E}$. Si $M \in V$, montrer qu'il existe un unique point $p(M) \in E$ tel que $\overrightarrow{Mp(M)} \in W$. Montrer que l'application $p\colon M \mapsto p(M)$ de V dans E est une application affine (*projection sur E parallèlement à W*). Montrer que $p \circ p = p$ et que $\overrightarrow{p}$ est un projecteur dans V.
2) Soit V un espace vectoriel, soit $p\colon V \to V$ une application affine telle que $p \circ p = p$. Montrer que p est une projection.
3) Soit V un espace vectoriel, soit E un sous-espace affine de V et soit W un sous-espace vectoriel de V tels que $V = W \oplus \overrightarrow{E}$. Si $M \in V$, montrer qu'il existe un unique point $s(M) \in V$ tel $\overrightarrow{Mp(M)} \in W$ et tel que le milieu de $Mp(M)$ appartienne à E. Montrer que l'application $s\colon M \mapsto s(M)$ est une application affine (*symétrie par rapport à E parallèlement à W*). Montrer que $s \circ s = \mathrm{id}$ et que $\overrightarrow{s}$ est une symétrie dans V.
4) Une application affine $V \to V$ telle que $s^2 = \mathrm{id}$ est une symétrie.
5) Soit V un espace vectoriel et soit E un sous-espace affine de V. Construire un espace vectoriel W, une application linéaire $f\colon V \to W$ et un élément $w \in W$ tels que $E = f^{-1}(w)$.
6) Soit V un espace vectoriel et soit E un sous-espace affine de V. Construire un espace vectoriel W et une application affine $f\colon W \to V$ tels que $E = f(W)$.
7) Une application affine est injective (*resp.* surjective, *resp.* bijective) si et seulement si son application linéaire associée l'est.

§3. Notion générale d'espace affine

DÉFINITION 3.1. — *Une structure d'espace affine sur un ensemble non vide E est la donnée d'un espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ et d'une application $E \times E \to \overrightarrow{E}$, notée $(A,B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

a) *pour $A, B, C \in E$, on a* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (relation de Chasles) *;*
b) *pour tout point A de E, l'application $E \to \overrightarrow{E}$ définie par $M \mapsto \overrightarrow{AM}$ est une bijection.*

Les éléments de E sont appelés points, ceux de $\overrightarrow{E}$ vecteurs. L'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ est appelé *direction* de E. Un espace affine « abstrait », c'est ainsi un ensemble (non vide) E de points et, pour tout couple de points A, B, un vecteur $\overrightarrow{AB}$ de la direction de E, vérifiant la relation de Chasles, et tel que pour tout point A (*origine*) de E, et tout vecteur $\overrightarrow{v}$, il existe un unique point B de E tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$.

Si A et B sont des points de E, on a $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. En effet, la relation de Chasles appliquée au triplet (A,A,B) entraîne $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB}$, d'où $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$. Appliquée au triplet (A,B,A), elle implique $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$, d'où $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Remarque 3.2. — Soit E un ensemble et $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel. Supposons donnée une application $E \times E \to \overrightarrow{E}$, $(A,B) \mapsto \overrightarrow{AB}$, qui vérifie la relation de Chasles. Soit A un point de E tel que l'application $E \to \overrightarrow{E}$, $M \mapsto \overrightarrow{AM}$, soit bijective. Alors E, muni de cette application $E \times E \to \overrightarrow{E}$, est un espace affine. Il reste à montrer que la propriété (ii) est satisfaite ; soit donc A' un point de E. Comme $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM}$, l'application $M \mapsto \overrightarrow{A'M}$ est la composée de l'application bijective $M \mapsto \overrightarrow{AM}$ et de la translation $\overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{v} + \overrightarrow{A'M}$ dans $\overrightarrow{E}$. Elle est donc bijective.

Exemple 3.3. — Soit V un espace vectoriel. Posons $\overrightarrow{V} = V$ et, si A et $B \in V$, posons $\overrightarrow{AB} = B - A$. Cela définit une structure d'espace affine sur V : tout espace vectoriel possède une structure « canonique » d'espace affine, de direction lui-même.

Inversement, soit E un espace affine et soit O un point de E. Considérons Par hypothèse, l'application $\varphi\colon E \to \overrightarrow{E}$ définie par $M \mapsto \overrightarrow{OM}$ est bijective. Si $\overrightarrow{E}$ est muni de sa structure d'espace affine canonique,

$\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \varphi(B) - \varphi(A) = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$. Cela permet d'identifier E à l'espace affine défini par l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ et montre qu'on aurait pu se contenter de la définition du § 2.

DÉFINITION 3.4 (sous-espace affine). — *Soit E un espace affine. On dit qu'une partie F de E est un* sous-espace affine *s'il existe $A \in F$ tel que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ pour $M \in F$ soit un sous-espace vectoriel de F.*

On a copié la définition 2.1 d'un sous-espace affine d'un espace vectoriel. Copions maintenant le lemme 2.2

LEMME 3.5. — *Soit E un espace affine et soit F un sous-espace affine de E. Pour tout $A \in F$, l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ pour $M \in F$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$; il ne dépend pas du choix de A.*

Démonstration. — Si $A \in F$, notons V_A l'ensemble des $\overrightarrow{AM}$ pour $M \in F$. Fixons un point A tel que V_A soit un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$ (il en existe puisque F est un sous-espace affine de E). Si $A' \in F$ et $M \in F$, on a $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AA'}$, donc $\overrightarrow{A'M} \in V_A$ et $V_{A'} \subset V_A$. Inversement, si $M \in F$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AA'}$ appartiennent à V_A, donc le vecteur $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AA'}$ aussi. Il existe ainsi $M' \in F$ tel que $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AA'}$. On a alors $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM}$, d'où l'inclusion $V_A \subset V_{A'}$. □

DÉFINITION 3.6. — *Soit E un espace affine et soit F un sous-espace affine de V. On appelle* direction *de F le sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$ formé des $\overrightarrow{AM}$, où A est un point fixé de F et M parcourt F. On le note $\overrightarrow{F}$. La* dimension *de F est la dimension de $\overrightarrow{F}$.*

Un point est un sous-espace affine de dimension 0, une droite est un sous-espace affine de dimension 1, un plan est un sous-espace affine de dimension 2.

Remarque 3.7. — Soit E un espace affine et soit F un sous-espace affine de E. L'application de F dans $\overrightarrow{F}$ qui à $(A, B) \in F \times F$ associe $\overrightarrow{AB}$ est une structure d'espace affine sur F. Un sous-espace affine d'un espace affine possède ainsi une structure canonique d'espace affine.

On dit que deux sous-espaces affines d'un même espace affine sont *parallèles* s'ils ont même direction. Deux sous-espaces affines parallèles ont en particulier même dimension (droites parallèles, plans parallèles,...) : la relation de parallélisme est une relation d'équivalence.

Au lycée, on parle aussi de « droite parallèle à un plan ». c'est une notion dissymétrique qu'on peut définir ainsi : un sous-espace affine E est parallèle à un sous-espace affine F si l'on a $\overrightarrow{E} \subset \overrightarrow{F}$. Ce n'est alors pas une relation d'équivalence.

PROPOSITION 3.8. — *Soit E un espace affine et soit F_i des des sous-espaces affines de E. Si l'intersection $\bigcap_i F_i$ n'est pas vide, c'est un sous-espace affine de E dont la direction est l'intersection des directions des F_i.*

La démonstration est quasiment la même que celle de la proposition 2.4.

COROLLAIRE 3.9. — *Soit S une partie non vide d'un espace affine E. Il existe un plus petit sous-espace affine de E contenant S.*

On le note $\langle S \rangle$. C'est l'intersection (non vide — car contenant S — de la famille non vide — car contenant V) de tous les sous-espaces affines de V qui contiennent S.

PROPOSITION 3.10. — *Soit E un espace affine, soit A un point de E et soit $\overrightarrow{F}$ un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. Par A, il passe un sous-espace affine, et un seul, de direction $\overrightarrow{F}$.*

Démonstration. — Ce sous-espace affine de E est l'ensemble des $M \in E$ tels que $\overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{F}$. □

DÉFINITION 3.11 (application affine). — *Soit E et F des espaces affines. On dit qu'une application $f : E \to F$ est une* application affine *s'il existe un point $O \in E$ telle que l'application $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ définie par $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$ soit linéaire.*

Dans ce cas, on a, pour tous $A, B \in E$ la relation

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(O)f(B)} - \overrightarrow{f(O)f(A)} = \vec{f}(\overrightarrow{OB}) - \vec{f}(\overrightarrow{OA}) = \vec{f}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \vec{f}(\overrightarrow{AB}).$$

L'application $\vec{f}$ ne dépend pas du choix du point O et est appelée *l'application linéaire associée* à l'application affine f.

Exemples 3.12. — Soit E un espace affine.

a) La restriction d'une application affine à un sous-espace affine est une application affine.

b) Soit $u \in \vec{E}$. Si $M \in E$, il existe un unique $M' \in E$ tel que $\overrightarrow{MM'} = u$. L'application $M \mapsto M'$ est une application affine de E dans lui-même (*translation de vecteur u*). Son application linéaire associée est l'identité.

c) Soit $O \in E$ et soit $\lambda \in k$. Si $M \in E$, il existe un unique $M' \in E$ tel que $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$. L'application $M \mapsto M'$ ainsi définie est une application affine de E dans lui-même (*homothétie de centre O et de rapport λ*). Son application linéaire associée est l'homothétie vectorielle de rapport λ, de $\vec{E}$ dans lui-même, donnée par $u \mapsto \lambda u$.

d) Soit F un sous-espace affine de E et soit $\vec{G}$ un supplémentaire de $\vec{F}$ dans $\vec{E}$. Fixons $O \in F$. Pour tout $M \in E$, on peut écrire de manière unique $\overrightarrow{OM} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $u \in \vec{F}$ et $v \in \vec{G}$; l'application $\vec{p} : \overrightarrow{OM} \mapsto \vec{u}$ est linéaire de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$: c'est la projection sur $\vec{F}$ parallèlement à $\vec{G}$. Il existe alors un unique point M' de F tel que $\overrightarrow{OM'} = \vec{u}$. L'application $p \colon M \mapsto M'$ ne dépend pas du choix de O. Elle est affine et son application linéaire associée est $\vec{p}$. On dit que p est *la projection sur F dans la direction de* $\vec{G}$ (ou *parallèlement à* $\vec{G}$).

PROPOSITION 3.13. — *Soit E, F des espaces affines et soit $f \colon E \to F$ une application affine. Notons $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{F}$ l'application linéaire associée.*

Si E' est un sous-espace affine de V contenu dans E, $f(E')$ est un sous-espace affine de W contenu dans F dont la direction est $\vec{f}(\vec{E'})$.

Soit F' un sous-espace affine de F ; si elle n'est pas vide, son image réciproque $f^{-1}(F')$ est un sous-espace affine de E de direction $(\vec{f})^{-1}(\vec{F'})$.

Décrire un sous-espace affine comme l'image d'une application affine, cela revient à le paramétrer. Inversement, on décrit un sous-espace affine comme l'image réciproque d'une application affine chaque fois que l'on doit résoudre un système d'équations linéaires (avec second membre). Le pivot de Gauss est un outil qui permet de passer mécaniquement d'un type de description à l'autre.

PROPOSITION 3.14. — *La composée de deux applications affines est une application affine ; son application linéaire associée est la composée des deux applications linéaires associées.* (Bref, $\overrightarrow{f \circ g} = \vec{f} \circ \vec{g}$.)

L'identité est une application affine.

La bijection réciproque d'une application affine bijective est une application affine.

Exercice. — Revoir les exercices du §2 dans ce contexte.

§4. Repères affines, repères cartésiens, coordonnées

DÉFINITION 4.1. — *Soit E un espace affine. Un repère cartésien de E est la donnée d'un point de E et d'une base de $\vec{E}$.*

Soit $\mathscr{R} = (O, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ un repère cartésien de E. Pour tout point M de E, il existe des scalaires $x_1, \dots, x_n$, uniques, tels que $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e_1} + \cdots + x_n\vec{e_n}$. Les x_j sont appelés *coordonnées* du point M dans le repère cartésien $(O, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$.

Si M et N sont deux points de E de coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ dans le repère $\mathscr{R}$, on a

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)\overrightarrow{e_i}$$

dont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$, dans la base $\overrightarrow{\mathscr{R}} = (\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$ de $\overrightarrow{E}$, sont $(y_1-x_1,\dots,y_n-x_n)$. Notons $\varphi_{\mathscr{R}}$ l'application de E dans k^n qui, à un point M, associe ses coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$. Le calcul précédent montre que c'est une application affine dont l'application linéaire associée est l'application qui associe à un vecteur de $\overrightarrow{E}$ ses coordonnées dans la base $\overrightarrow{\mathscr{R}}$. Comme elle est bijective, l'application $\varphi_{\mathscr{R}}$ est un *isomorphisme d'espaces affines* : le choix d'un repère cartésien d'un espace affine (de dimension n) permet de l'identifier avec l'espace affine k^n.

4.2. Expression d'une application affine en coordonnées. — Soit E et F des espaces affines. Soit $\mathscr{R} = (O,\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$ un repère cartésien de E et soit $\mathscr{S} = (\Omega,\overrightarrow{f_1},\dots,\overrightarrow{f_n})$ un repère cartésien de F. Soit $u\colon E \to F$ une application affine. Son application linéaire associée $\overrightarrow{u}$ possède une matrice A (m lignes et n colonnes) dans les bases $(\overrightarrow{e_j})$ et $(\overrightarrow{f_i})$, définie par les relations

$$\overrightarrow{u}(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overrightarrow{f_j}.$$

Ainsi, l'image par $\overrightarrow{u}$ d'un vecteur de $\overrightarrow{E}$ de coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$ est le vecteur de coordonnées $(y_1,\dots,y_m)$ données par

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j.$$

Si X est le vecteur colonne ${}^{\mathrm{t}}(x_1,\dots,x_n)$ et Y est le vecteur colonne ${}^{\mathrm{t}}(y_1,\dots,y_m)$, on a donc $Y = AX$.

Soit aussi $(b_1,\dots,b_m)$ les coordonnées du point $u(O) \in F$ et notons b le vecteur colonne ${}^{\mathrm{t}}(b_1,\dots,b_m)$. Soit M un point de E, notons $(x_1,\dots,x_n)$ ses coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$, X le vecteur colonne ${}^{\mathrm{t}}(x_1,\dots,x_n)$, $(y_1,\dots,y_m)$ les coordonnées du point $u(M)$ et $Y = {}^{\mathrm{t}}(y_1,\dots,y_m)$. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ correspond au vecteur colonne X, le vecteur $\overrightarrow{u(O)u(M)}$ au vecteur colonne $Y - b$ et le vecteur $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{OM})$ au vecteur colonne AX. On a ainsi la relation $Y = Ax + b$, ou encore,

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

4.3. Mesure algébrique. — Soit E un espace affine. Soit Δ une droite de $\overrightarrow{E}$ et soit $\overrightarrow{u}$ une base de Δ. Ces données permettent d'associer, à tout bipoint (A,B) de E tel que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ appartienne à Δ, sa *mesure algébrique* $\overline{AB}$ qui est l'unique scalaire λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{u}$.

Si A, B et C sont trois points d'une droite D de E dont la direction est Δ, leurs mesures algébriques $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{AC}$ vérifient la relation de Chasles

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}.$$

Elles dépendent du choix du vecteur $\overrightarrow{u}$. En revanche, si $\overline{AB} \neq 0$, le rapport $\overline{AC}/\overline{AB}$ ne dépend pas de ce choix.

DÉFINITION 4.4. — *On dit qu'une famille $(A_0,\dots,A_n)$ de points d'un espace affine E est un repère affine de E si $(A_0,\overrightarrow{A_0A_1},\dots,\overrightarrow{A_0A_n})$ est un repère cartésien de E.*

On a alors $\dim E = n$. Le fait pour une famille d'être un repère affine ne dépend pas de l'ordre des points. En effet, si $(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$ est une base de $\overrightarrow{E}$, la famille

$$(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_i},\dots,\overrightarrow{e_{i-1}} - \overrightarrow{e_i}, -\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_{i+1}} - \overrightarrow{e_i},\dots,\overrightarrow{e_n} - \overrightarrow{e_1})$$

est encore une base de $\overrightarrow{E}$. Cela résulte aussi de la proposition suivante.

PROPOSITION 4.5. — *Soit E un espace affine de dimension n. Une famille de $n+1$ points de E est un repère affine si et seulement si elle engendre E.*

Par exemple, deux points distincts forment un repère affine d'une droite, trois points non alignés forment un repère affine d'un plan et quatre points non coplanaires forment un repère affine d'un espace affine de dimension 3.

Démonstration. — Soit $(A_0,\dots,A_n)$ une famille de $n+1$ points de E et soit F le sous-espace affine de E qu'elle engendre. Soit aussi V le sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$ engendré par les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1},\dots,\overrightarrow{A_0A_n}$. Par définition, $(A_0,\dots,A_n)$ est un repère affine de E si et seulement si $(\overrightarrow{A_0A_1},\dots,\overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de $\overrightarrow{E}$. Comme $\dim \overrightarrow{E} = n$, cela équivaut à ce que $V = \overrightarrow{E}$. D'autre part, le sous-espace affine F est égal au sous-espace affine passant par A_0 de direction V. Par suite, $V = \overrightarrow{E}$ si et seulement si $F = E$, d'où la proposition. □

De même qu'une application linéaire est déterminée par l'image d'une base, image qui peut être arbitraire, une application affine est déterminée par l'image d'un repère affine.

THÉORÈME 4.6. — *Soit E un espace affine et soit $(A_0,\dots,A_n)$ un repère affine de E. Soit F un second espace affine et soit $B_0,\dots,B_n$ des points de F. Il existe une unique application affine $f\colon E\to F$ telle que $f(A_i)=B_i$ pour $i\in\{0,\dots,n\}$.*

Démonstration. — Remarquons que l'application linéaire associée à f doit appliquer $\overrightarrow{A_0A_i}$ sur $\overrightarrow{B_0B_i}$. Comme la famille $(\overrightarrow{A_0A_1},\dots,\overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de $\overrightarrow{E}$, il existe une et une seule application linéaire $\varphi\colon \overrightarrow{E}\to\overrightarrow{F}$ telle que $\varphi(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{B_0B_i}$. Il existe alors une unique application affine $f\colon E\to F$ telle que $f(A_0)=B_0$ et dont l'application linéaire associée soit φ. Cela montre l'unicité d'une application affine vérifiant les conditions de l'énoncé. Enfin, cette application affine f convient, car les relations

$$\overrightarrow{B_0B_i} = \varphi(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{f(A_0)f(A_i)} = \overrightarrow{B_0f(A_i)},$$

entraînent que $B_i = f(A_i)$ pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$. □

Exercices. — 1) Décrire les changements de coordonnées par un changement de repère cartésien dans un espace affine. Comment se transforment les applications affines ?

2) Décrire en coordonnées la composée de deux applications affines ainsi que l'application affine réciproque d'une application affine bijective.

3) Soit $(A_0,\dots,A_n)$ un repère affine d'un espace affine E et soit $(B_0,\dots,B_n)$ des points d'un espace affine F. Montrer qu'il existe une unique application affine $u\colon E\to F$ telle que $u(A_i)=B_i$ pour tout i.

4) Soit $(A_0,\dots,A_n)$ un repère affine d'un espace affine E et soit $u\colon E\to E$ une application affine telle que $u(A_i)=A_i$ pour tout i. Montrer que $u=\mathrm{id}_E$.

5) Soit E un espace affine de dimension n et soit F un sous-espace affine de dimension $<n$. Construire une application affine $u\colon E\to E$ dont l'ensemble des points fixes soit E.

6) On dit que $m+1$ points $(A_0,\dots,A_m)$ d'un espace affine E. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) le sous-espace affine $\langle A_0,\dots,A_m\rangle$ est de dimension m ;
(b) si $i\in\{0,\dots,m\}$, le sous-espace affine $\langle A_0,\dots,A_{i-1},A_{i+1},\dots,A_m\rangle$ ne contient pas le point A_i ;
(c) si $i\in\{1,\dots,m\}$, le point A_i n'appartient pas au sous-espace affine $\langle A_0,\dots,A_{i-1}\rangle$.
(d) si $i\in\{0,\dots,m\}$, le sous-espace affine $\langle A_0,\dots,A_i\rangle$ est de dimension i.

On dit alors que les points $(A_0,\dots,A_m)$ sont *affinement indépendants.*

7) Si $(A_0,\dots,A_m)$ sont des points affinement indépendants d'un espace affine E de dimension n, montrer qu'il existe des points $A_{m+1},\dots,A_n$ dans E tels que $(A_0,\dots,A_n)$ soit un repère affine de E. Montrer la réciproque.

8) On considère un repère cartésien $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ d'un plan affine $\mathscr{P}$ et trois points A, B, M de $\mathscr{P}$. On note (x_A,y_A), (x_B,y_B) et (x,y) leurs coordonnées. Montrer que les points A, B, M sont sur une même droite si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0.$$

Si $A\neq B$, en déduire que cette formule est l'équation de la droite (AB).

9) Généraliser la question précédente dans un espace affine de dimension n quelconque en exprimant sous forme d'un déterminant l'équation de l'hyperplan affine engendré par $n-1$ points affine indépendants.

§5. Barycentres dans un espace affine

A. Définition et propriétés classiques

La notion de barycentre est l'outil mathématique qui correspond au concept physique de centre de gravité (ou centre de masse).

Soit E un espace affine. Un point pondéré est un couple (A, a) formé d'un point A de E et d'un scalaire $a \in k$. En physique, le scalaire a correspondrait à la masse du point matériel A.

DÉFINITION 5.1. — *Soit E un espace affine et soit $((A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n))$ une famille de points pondérés. Sa* masse totale *est la somme des a_j. La* fonction vectorielle de Leibniz *associée à cette famille est l'application*

$$f : E \to \overrightarrow{E}, \quad M \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_j \overrightarrow{MA_j}.$$

Remarquons que c'est une application affine ; son application linéaire associée est égale à $-a\,\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$.

THÉORÈME 5.2. — *Soit $((A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n))$ une famille de points pondérés d'un espace affine E ; notons a sa masse totale.*

Si $a = 0$, la fonction vectorielle de Leibniz de ce système est constante.

Si $a \neq 0$, elle est bijective. Si G est l'unique point de E telle que $f(G) = \overrightarrow{0}$, on a $f(M) = a\overrightarrow{MG}$ pour tout point M de E.

DÉFINITION 5.3. — *Soit $((A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n))$ une famille de points pondérés d'un espace affine E de masse totale* non nulle. *Le point G défini dans le théorème précédent est appelé* barycentre *de la famille.*

Si les a_j sont tous égaux, on parle d'*isobarycentre*. Pour deux points, on parle de *milieu* (L'isobarycentre de n points distincts n'existe que si $n1_k \neq 0$; il n'y a pas de milieu en caractéristique 2, de centre de gravité d'un triangle en caractéristique 3, etc. Il n'y a pas de problème si le corps k est **R** ou **C**, ou plus généralement s'il est de caractéristique zéro.)

Démonstration. — Soit M et N deux points de E. Si a désigne la masse totale de la famille de points pondérés $((A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n))$, on a

$$f(N) = \sum_{j=1}^{n} a_j \overrightarrow{NA_j} = \sum_{j=1}^{n} a_j (\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA_j}) = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j\Big)\overrightarrow{NM} + \sum_{j=1}^{n} a_j \overrightarrow{MA_j} = f(M) - a\overrightarrow{MN}.$$

Si $a = 0$, on a bien $f(M) = f(N)$ pour tout couple de points de E, donc f est constante.

Supposons maintenant que $a \neq 0$ et fixons un point O de E. On a donc $f(M) = f(O) - a\overrightarrow{OM}$ pour tout $M \in E$. On a $f(M) = v$ si et seulement si $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{a}(f(O) - v)$. Comme l'application $M \mapsto \overrightarrow{OM}$ est bijective, cela montre que f est bijective. □

Si $a \neq 0$ et si G est le barycentre de la famille $((A_j, a_j))_{1 \leqslant j \leqslant n}$, on a ainsi $f(M) = a\overrightarrow{MG}$ pour tout $M \in E$. Si O est un point de E, le point G est ainsi l'unique point de E tel que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a} f(O)$. On le note éventuellement $\mathrm{bar}((A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n))$.

Remarque 5.4. — On remarquera aussi que le barycentre Considérons une famille de points pondérés $\mathscr{A} = ((A_j, a_j))$ dans un espace affine E et soit F le sous-espace affine engendré par les A_j. Le barycentre de la famille $\mathscr{A}$ appartient à F.

Pour le voir, on peut appliquer le théorème précédent au sous-espace affine F engendré par les A_j. Cela montre qu'il existe un unique point G' de F tel que $\sum a_j \overrightarrow{G'A_j} = \overrightarrow{0}$. Comme le barycentre G de cette famille est l'unique point de E tel que $\sum a_j \overrightarrow{GA_j} = \overrightarrow{0}$, on a nécessairement $G' = G$.

Voici une autre démonstration. Le barycentre G de la famille $\mathscr{A}$ vérifie

$$\overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{\sum a_j} \sum_{j>1} a_j \overrightarrow{A_1A_j}.$$

Cela entraîne que le vecteur $\overrightarrow{A_1G}$ appartient au sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_j}$ qui est la direction du sous-espace affine F, d'où $\overrightarrow{A_1G} \in \overrightarrow{F}$. Comme $A_1 \in F$, il en résulte que $G \in F$.

La fonction vectorielle de Leibniz ne dépend pas de l'ordre des points pondérés. Lorsqu'on réunit deux familles de points pondérés, la fonction de Leibniz est la somme des deux fonctions. Si l'on multiplie toutes les masses par un même scalaire non nul, la fonction de Leibniz est multipliée par ce scalaire. Si un point apparaît avec masse nulle, on peut l'omettre. Enfin, si un point apparaît avec plusieurs fois, on peut ne le mettre qu'une fois en le pondérant par la somme des masses. De tout ceci résultent les propriétés (classiques) des barycentres.

PROPOSITION 5.5. — – *Soit* $\mathscr{A} = ((A_j, a_j))$ *et* $\mathscr{B} = ((B_i, b_i))$ *deux familles de points pondérés, a et b leur masses totales, supposées non nulles.. On note G et H les barycentres de ces familles. Le barycentre de la famille* $((A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n), (B_1, b_1), \dots, (B_m, b_m))$ *est égal au barycentre de la famille* $((G, a), (H, b))$. (associativité).

– *Soit* $\mathscr{A} = ((A_j, a_j))$ *une famille de points pondérés de masse totale non nulle. Si* λ *est un scalaire non nulle, le barycentre de la famille* $((A_j, \lambda a_j))$ *est égal au barycentre de la famille* $((A_j, a_j))$ (homogénéité).

– *Le barycentre d'une famille ne dépend pas de l'ordre des points pondérés* (commutativité).

– *Pour calculer le barycentre d'une famille, on peut omettre les points de masse nulle. Si un point apparaît plusieurs fois dans une famille, on peut les regrouper en un seul point de masse la somme des masses qui lui sont attribuées.*

Soit E un espace affine de dimension n et soit $(A_0, \dots, A_n)$ des points de E. Par définition du barycentre, le point M est barycentre de $((A_0, a_0), \dots, (A_n, a_n))$ si et seulement si on a la formule

$$\overrightarrow{A_0M} = \frac{a_1}{a_0 + \dots + a_n}\overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \frac{a_n}{a_0 + \dots + a_n}\overrightarrow{A_0A_n}.$$

Supposons que $(A_0, \dots, A_n)$ soit un repère affine de E. Alors $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est un repère cartésien de E si bien que tout point de M est barycentre des points $(A_0, \dots, A_n)$ où les coefficients a_j sont uniquement déterminés si l'on les normalise par la condition $a_0 + \dots + a_n = 1$. Ces scalaires $(a_0, \dots, a_n)$ seront appelés *coordonnées barycentriques* du point M dans le repère affine $(A_0, A_1, \dots, A_n)$.

Exercices. — 1) Soit E un espace affine. Un bipoint est un couple de deux points de E. On définit la relation d'équipollence sur l'ensemble $E \times E$ des bipoints de E par : $(A, B) \sim (A', B')$ si et seulement si (A, B') et (A', B) ont mêmes milieux.

Montrer que (A, B) et (A', B') sont équipollents si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. En déduire que la relation d'équipollence est une relation d'équivalence.

2) (*suite*) Soit On dit que quatre points distincts non alignés A, B, C, D quatre points de E, deux à deux distincts et non alignés.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;

(b) la droite (AB) est parallèle à la droite (CD) et la droite (AD) est parallèle à la droite (BC) ;

(c) les bipoints (A, C) et (B, D) ont même milieux.

On dit alors que $ABCD$ est un *parallélogramme.*

3) Soit A, B, C trois points non alignés d'un plan affine E. On note A' le milieu de (B, C), B' le milieu de (A, C) et C' le milieu de (A, B). On note aussi G l'isobarycentre de (A, B, C). Montrer que G est le point d'intersection des trois droites (AA'), (BB') et (CC') (médianes). Montrer aussi que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

4) Étant donné trois droites concourantes, construire un triangle dont ce soient les médianes.

5) Soit E un espace affine et soit $\mathscr{L}_E$ l'espace des fonctions de E dans $\overrightarrow{E}$ qui sont de la forme $L_{\lambda A} \colon M \mapsto \lambda\overrightarrow{MA}$, pour un certain point $A \in E$ et un scalaire $\lambda \in k$. Montrer que $\mathscr{L}_E$ est un sous-espace vectoriel de dimension $\dim E + 1$ de l'espace des applications de E dans $\overrightarrow{E}$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\varphi \colon \mathscr{L}_E \to k$ telle que $\varphi(L_{\lambda A}) = \lambda$. Montrer que $\varphi^{-1}(1)$ est un sous-espace affine de $\mathscr{L}_E$ dont la direction est isomorphe à $\overrightarrow{E}$. Montrer que l'application de E dans $\mathscr{L}_E$ qui associe au point A la fonction L_A est un isomorphisme de E sur le sous-espace affine $\varphi^{-1}(1)$.

B. Caractérisation des sous-espaces affines et des applications affines par les barycentres

PROPOSITION 5.7. — *Soit E un espace affine et soit F une partie non vide de E. Les conditions suivantes sont équivalentes (pourvu que le corps k ait au moins 3 éléments !) :*

a) *F est un sous-espace affine de E ;*

b) *le barycentre de toute famille de points pondérés (de masse totale non nulle) de F appartient à F ;*

c) *pour tout couple de points (A,B) de F et tout scalaire t, le barycentre de la famille $((A,t),(B,1-t))$ appartient à F.*

Démonstration. — Le barycentre de toute famille de points pondérés d'un sous-espace affine appartient à ce sous-espace affine. Cela montre que (a) entraîne (b). Il est évident que (b) implique (c).

Supposons enfin (c) et montrons que F est un sous-espace affine de E. C'est là que nous devrons utiliser l'hypothèse que le corps k a au moins 3 éléments. D'ailleurs, si $k = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, les droites n'ont que deux points et toute partie de k^n vérifie l'assertion (c).

Fixons un point $O \in F$ et soit $\overrightarrow{F}$ l'ensemble des $\overrightarrow{OM}$, pour $M \in F$. Nous devons montrer que $\overrightarrow{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. Soit ainsi $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{F}$, soit A et B les points de F tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$. Si $a \in k$ et $b \in k$, posons $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$ et montrons que $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{F}$. Cela revient à montrer que l'unique point M de E tel que $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ appartient à F.

Soit A_1 le point de E tel que $\overrightarrow{OA_1} = (a+b)\overrightarrow{OA}$; c'est le barycentre de la famille $((A,a+b),(O,1-a-b))$. De même, l'unique point B_1 de E tel que $\overrightarrow{OB_1} = (a+b)\overrightarrow{OB}$ est le barycentre de la famille $((B,a+b),(O,1-a-b))$. En particulier, les points A_1 et B_1 appartiennent à F. Si $a+b \neq 0$, la formule

$$\overrightarrow{OM} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{OA_1} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{OB_1}$$

montre alors que M est le barycentre de la famille $((A_1,a),(B_1,b))$. C'est donc un point de F.

Si $a+b=0$, soit $\lambda \in k \setminus \{0,1\}$. Le point C de E tel que $\overrightarrow{OC} = \lambda^{-1}\overrightarrow{OA}$ appartient à F, car c'est le barycentre de la famille $((A,\lambda^{-1}),(O,1-\lambda^{-1}))$. La relation $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ se récrit $\overrightarrow{OM} = \lambda a\overrightarrow{OC} + b\overrightarrow{OB}$. Comme $\lambda \not\in \{0,1\}$, $\lambda a + b \neq 0$ et le cas précédent entraîne que M appartient à F. □

PROPOSITION 5.8. — *Soit E et F deux espaces affines et soit $f : E \to F$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes, si le corps k a au moins 3 éléments.*

a) *f est une application affine ;*

b) *l'image par f du barycentre d'une famille $((A_j,a_j))$ de points pondérée est le barycentre de la famille $((f(A_j),a_j))$;*

c) *pour tout couple (A,B) de points de E et tout scalaire $t \in k$, le barycentre de $((f(A),t),(f(B),1-t))$ est l'image par f du barycentre de $((A,t),(B,1-t))$.*

Démonstration. — Supposons que f soit une application affine et soit $\overrightarrow{f}$ son application linéaire associée. Le barycentre G de la famille $((A_j,a_j))$ est l'unique point de E tel que $\sum a_j\overrightarrow{GA_j} = \overrightarrow{0}$; son image par f vérifie donc $\sum a_j\overrightarrow{f(G)f(A_j)} = \sum a_j\overrightarrow{f}(\overrightarrow{GA_j}) = \overrightarrow{0}$, donc est le barycentre de la famille $((f(A_j),a_j))$.

L'implication (b)⇒(c) est évidente.

Enfin, supposons (c) et montrons que f est une application affine. Fixons un point $O \in F$ et définissons une application $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ par la formule $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$. Nous devons montrer que $\overrightarrow{f}$ est une application linéaire. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs de $\overrightarrow{E}$, soit A et $B \in E$ tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$. Soit a et b dans k et soit M l'unique point de E tel que $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$.

Plaçons nous dans le cas $a+b \neq 0$. Le point A_1 de E tel que $\overrightarrow{OA_1} = (a+b)\overrightarrow{OA}$ est barycentre de $((A,a+b),(O,1-a-b))$; son image par f est donc le barycentre de $((f(A),a+b),(f(O),1-a-b))$. On a ainsi $\overrightarrow{f(O)f(A_1)} = (a+b)\overrightarrow{f(O)f(A)}$, ce qui montre que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OA_1}) = (a+b)\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OA})$. De même, si B_1 est le point de E tel que $\overrightarrow{OB_1} = (a+b)\overrightarrow{OB}$, on a $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OB_1}) = (a+b)\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OB})$. Le point M est le barycentrede $((A_1,a),(B_1,b))$; son image est ainsi le barycentre de $((f(A_1),a),(f(B_1),b))$ donc vérifie $\overrightarrow{f(O)f(M)} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{f(O)f(A_1)} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{f(O)f(B_1)}$. Par suite, on a

$$\overrightarrow{f}(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f(O)f(M)} = a\overrightarrow{f(O)f(A)} + b\overrightarrow{f(O)f(B)} = a\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) + b\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})).$$

Si $a+b=0$, soit $\lambda \in k \setminus \{0,1\}$ et soit C le point de E tel que $\overrightarrow{OC} = \lambda^{-1}\overrightarrow{OA}$. Comme précédemment, $\overrightarrow{f}(\lambda^{-1}\overrightarrow{u}) = \lambda^{-1}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$. Puisque $\lambda a + b \neq 0$, le premier cas entraîne que

$$\overrightarrow{f}(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}) = \lambda a \overrightarrow{f}(\lambda^{-1}\overrightarrow{u}) + b\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) + b\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}).$$

Cela conclut la démonstration de la linéarité de $\overrightarrow{f}$. L'application f est donc une application affine. □

Exercices. — 1) Soit O, A, B trois points d'un espace affine E et soit a, b deux scalaires. Écrire l'unique point M de E tel que $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ comme un barycentre des trois points O, A, B pour des poids convenables.
2) Même si le corps n'a que deux éléments, montrer qu'une partie non vide d'un espace affine est un sous-espace affine dès qu'elle contient les barycentres de trois quelconques de ses points.
3) De même, une application d'un espace affine dans un autre est une application affine dès qu'elle préserve les barycentres de trois points quelconques.

C. Convexité

Dans ce paragraphe, on suppose que l'on a $k = \mathbf{R}$.

DÉFINITION 5.10. — *Soit E un espace affine. On dit qu'une partie F de E est* convexe *si pour tout couple (A,B) de points de F et tout réel $t \in [0,1]$, le barycentre de $((A,t),(B,1-t))$ appartient à F.*

Un raisonnement analogue à celui fait dans la démonstration de la proposition ??? montre que si $((A_j, a_j))$ est une famille de points pondérés *à coefficients a_j positifs* appartenant à une partie convexe F, leur barycentre appartient aussi à F.

Un sous-espace affine est convexe.

PROPOSITION 5.11. — a) *L'image d'un convexe par une application affine est convexe ;*
b) *l'image réciproque d'un convexe par une application affine est convexe ;*
c) *l'intersection d'une famille de parties convexes est convexe.*

L'enveloppe convexe d'une partie S d'un espace affine est la plus petite partie convexe la contenant. On la note $\operatorname{conv}(S)$. C'est l'intersection des parties convexes qui contiennent S. Si $S \neq \varnothing$, c'est en particulier une partie du sous-espace affine engendré par S.

Si A et B sont deux points d'un espace affine, le segment $[A,B]$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{A,B\}$. C'est aussi l'ensemble des barycentres des familles $((A,t),(B,1-t))$, avec $t \in [0,1]$.

Si E est un espace affine et f est une forme affine non nulle sur E, l'ensemble H des $x \in E$ tels que $f(x) = 0$ est un hyperplan affine de E. Les parties définies par les inégalités $f(x) > 0$ (*resp.*. $f(x) < 0$) sont convexes ; on les appelle les demi-espaces ouverts séparés par l'hyperplan H. Les parties définies par les inégalités $f(x) \geqslant 0$ (*resp.* $f(x) \leqslant 0$) sont aussi convexes et sont appelées les demi-espaces fermés séparés par H.

§6. Quelques applications affines

On avait déjà défini au § 3 les *homothéties* de centre donné et de rapport donné, ainsi que les *translations* de vecteur donné.

PROPOSITION 6.1 (Projections). — *Soit E un espace affine, soit F un sous-espace affine de E et soit V un supplémentaire de $\overrightarrow{F}$ dans $\overrightarrow{E}$. Pour tout point M de E, il existe un unique point $p(M) \in F$ tel que $\overrightarrow{Mp(M)}$ appartienne à V.*

L'application $p\colon M \mapsto p(M)$ est une application affine.

On l'appelle la *projection sur F parallèlement à V.*

Démonstration. — Fixons un point $O \in F$. Soit N un point de F tel que $\overrightarrow{MN} \in V$. Alors, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{MN}$ est l'unique écriture du vecteur $\overrightarrow{OM}$ comme somme d'un vecteur de $\overrightarrow{F}$ et d'un vecteur de V. Cela montre l'unicité de $p(M)$. Inversement, si $M \in E$, il existe $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{v} \in V$ tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$. Soit N l'unique point de E tel que $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{u}$;

puisque $\vec{u} \in \vec{F}$, N appartient à F. Enfin, $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$ appartient à V. Cela montre l'existence et l'unicité d'un point $p(M)$ de F tel que $\overrightarrow{Mp(M)} \in V$.

Remarquons alors que $p(O) = O$ et que $\overrightarrow{Op(M)}$ est l'image de $\overrightarrow{OM}$ par la projection vectorielle $\vec{p}$ sur $\vec{F}$ parallèlement à V. Comme $\vec{p}$ est une application linéaire, p est une application affine. □

PROPOSITION 6.2 (Symétries). — On suppose que la caractéristique du corps k est différente de 2. *Soit E un espace affine, soit F un sous-espace affine de E et soit V un supplémentaire de $\vec{F}$ dans $\vec{E}$.*

Pour tout point M de E, il existe un unique point $s(M)$ de E tel que $\overrightarrow{Ms(M)} \in V$ et tel que le milieu de $(M, s(M))$ appartienne à F. L'application $s\colon M \mapsto s(M)$ est une application affine.

On l'appelle la *symétrie par rapport à F parallèlement à V*. Si F est un point de E, $V = \vec{E}$, on parle de *symétrie centrale.*

Démonstration. — Soit O un point de F. Soit $M \in E$. Écrivons $\overrightarrow{OM} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in \vec{F}$ et $\vec{v} \in V$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{u'} + \vec{v'}$, avec $\vec{u'} \in \vec{F}$ et $\vec{v'} \in V$. La relation $\overrightarrow{MN} \in V$ équivaut à $\vec{u'} = \vec{u}$. En outre, le milieu I de (M, N) vérifie

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{u'}) + \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{v'}),$$

donc appartient à F si et seulement si $\vec{v'} = -\vec{v}$.

Notons $\vec{s}$ la symétrie vectorielle par rapport à $\vec{F}$ et parallèlement à V ; elle envoie $\vec{u} + \vec{v}$ sur $\vec{u} - \vec{v}$. L'application s est alors définie par $\overrightarrow{Os(M)} = \vec{s}(\overrightarrow{OM})$. Elle est en particulier affine. □

Exemple 6.3 (Composée de deux symétries centrales). — Soit E un espace affine de dimension 2 et soit A, B deux points de E. Notons s_A et s_B les symétries centrales de centres A et B.

Soit $M \in E$. Posons $N = s_A(M)$ et $P = s_B(N) = s_B(s_A(M))$. On a $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{BN}$. Par suite,

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}.$$

Cela montre que $s_B \circ s_A$ est la translation de vecteur $t_{2\overrightarrow{AB}}$.

DÉFINITION 6.4. — *Soit E un espace affine. On appelle* groupe affine *de E l'ensemble des applications affines bijectives de E dans lui-même. On le note* $\mathrm{GA}(E)$.

Rappelons qu'on note $\mathrm{GL}(\vec{E})$ le groupe linéaire de l'espace vectoriel $\vec{E}$, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires bijectives de $\vec{E}$ dans lui-même. La composition des applications munit $\mathrm{GA}(E)$ et $\mathrm{GL}(\vec{E})$ de structures de groupe.

Remarque 6.5. — L'application de $\mathrm{GA}(E)$ dans $\mathrm{GL}(\vec{E})$ qui associe à une application affine bijective $f \in \mathrm{GA}(E)$ son application linéaire associée $\vec{f}$ est un homomorphisme de groupes surjectif. Son noyau est formé des translations de E.

On a déjà dit qu'une application affine est bijective si et seulement si son application linéaire associée est bijective ; cela montre que l'application $f \mapsto \vec{f}$ est bien définie de $\mathrm{GA}(E)$ dans $\mathrm{GL}(E)$. Comme $\overrightarrow{f \circ g} = \vec{f} \circ \vec{g}$ et $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$, c'est un morphisme de groupes. Soit $u \in \mathrm{GL}(\vec{E})$ et déterminons les applications affines $f \in \mathrm{GA}(E)$ telles que $\vec{f} = u$. Soit O un point de E. On a $\vec{f} = u$ si et seulement si $\overrightarrow{Of(M)} = \overrightarrow{Of(O)} + u(\overrightarrow{OM})$. Cela montre qu'une telle application affine est déterminée par l'image de O, et en particulier la surjectivité de l'application $f \mapsto \vec{f}$. En outre, si $u = \mathrm{id}_{\vec{E}}$, la relation précédente se récrit $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Of(O)}$, ce qui montre que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{Of(O)}$. Réciproquement, les translations ont l'identité pour application linéaire associée.

En d'autres termes, on a une *suite exacte de groupes* :

$$0 \to \mathscr{T}(E) \to \mathrm{GA}(E) \to \mathrm{GL}(\vec{E}) \to \{\mathrm{id}_{\vec{E}}\},$$

où $\mathscr{T}(E)$ est le groupe des translations de E. On remarquera que l'application $\vec{E} \to \mathscr{T}(E)$ qui, à un vecteur $\vec{v} \in \vec{E}$, associe la translation de vecteur $\vec{v}$, est un isomorphisme de groupes.

Exercices. — 1) Soit E un espace affine. Soit $p\colon E \to E$ une application affine telle que $p^2 = p$. Montrer que p est une projection affine.
2) Montrer qu'une application affine $s\colon E \to E$ telle que $s^2 = \mathrm{id}_E$ est une symétrie. (On suppose que le corps est de caractéristique différente de 2.)
3) Soit E un espace affine. Soit $g\colon E \to E$ une application affine. Soit G l'ensemble des $M \in E$ tels que $g(M) = M$. Si G n'est pas vide, montrer que G est un sous-espace affine de E dont on précisera la direction.
4) (*suite*) Soit $f\colon E \to E$ une application affine telle que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f(G) \subset G$.
5) Soit E un espace affine, soit $f\colon E \to E$ une application affine. On suppose que pour toute homothétie $h\colon E \to E$, $f \circ h = h \circ f$. Montrer que $f = \mathrm{id}_E$.
6) Soit E un espace affine et soit $f\colon E \to E$ une application affine. Détemrminer en termes de l'application linéaire $\overrightarrow{f}$ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$ tels que f commute avec la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
Si f commute avec toute translation, en déduire que f est elle-même une translation.
7) Soit E un espace affine. Soit $f \in \mathrm{GA}(E)$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. Si t est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, montrer que l'application affine $f \circ t \circ f^{-1}$ est une translation. Quel est son vecteur ?
8) Répondre à la question analogue obtenue en remplaçant t par une projection, une symétrie, une homothétie.
9) Soit E un espace affine. Soit h et h' deux homothéties de E de rapports λ et λ'. On suppose que λ et λ' sont non nuls et que leur produit n'est pas égal à 1. Montrer que $h' \circ h$ est une homothétie dont on précisera centre et rapport. Si $\lambda\lambda' = 1$, montrer que $h' \circ h$ est une translation. Quel est son vecteur ?
10) (*suite*) Soit h une homothétie de centre O et de rapport λ ; soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{E}$. Montrer que la composée $t_{\overrightarrow{u}} \circ h$ est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
11) (*suite*) On appelle *dilatation* d'un espace affine E toute application affine de E dans lui-même qui est une homothétie (de rapport non nul) ou une translation. Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{D}(E)$ des dilatations de E ?
12) Montrer qu'une application affine f d'un espace affine dans lui-même est une dilatation si et seulement si son application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est une homothétie vectorielle.
13) Soit E un espace affine et soit $f\colon E \to E$ une application affine qui envoie toute droite sur une droite parallèle. Montrer que f est une dilatation.
14) Montrer qu'une partie bornée d'un espace affine sur $\mathbf{R}$ a au plus un centre de symétrie.
15) Soit abc un triangle d'un plan affine (sur un corps de caractéristique différente de 2). Déterminer la nature géométrique de l'application affine composée des symétries centrales par rapport aux points a, b, c. Déterminer tous les triangles ABC tels que a soit le milieu de (B,C), b le milieu de (A,C) et c soit le milieu de (A,B).
16) Soit $(A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n)$ des points pondérés d'un espace affine E. Soit $\beta \in k$ tel que $\beta+\alpha_1+\dots+\alpha_n \neq 0$. Montrer que l'application qui, à $M \in E$, associe le barycentre de la famille $((A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n),(M,\beta))$ est une application affine. Préciser sa nature géométrique.

§7. Relations d'incidence et de parallélisme dans un espace affine

PROPOSITION 7.1. — *Soit E un espace affine. Soit F et G deux sous-espaces affines de E ; soit A un point de F et B un point de G. Alors $F \cap G \neq \varnothing$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ appartient à $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$. L'intersection $F \cap G$ est alors un sous-espace affine de E de direction $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}$.*

Démonstration. — Un point M de E appartient à $F \cap G$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{BM} \in \overrightarrow{G}$. S'il existe un tel point, on a alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$. Inversement, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{G}$, soit M l'unique point de E tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$; le point M appartient à F. Comme de plus $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{G}$, on a $M \in G$, d'où $F \cap G \neq \varnothing$. □

COROLLAIRE 7.2. — *Soit F un sous-espace affine d'un espace affine E et soit V un supplémentaire de $\overrightarrow{F}$ dans $\overrightarrow{E}$. Tout sous-espace affine de E dont la direction est V rencontre F en un unique point.*

COROLLAIRE 7.3. — *Dans un plan affine, deux droites non parallèles se coupent en un unique point.*

THÉORÈME 7.4 (Théorème de Thalès). — *Dans un plan affine $\mathscr{P}$, on considère trois droites parallèles distinctes d, d' et d'' et deux droites D_1 et D_2 qui ne sont pas parallèles à d.*

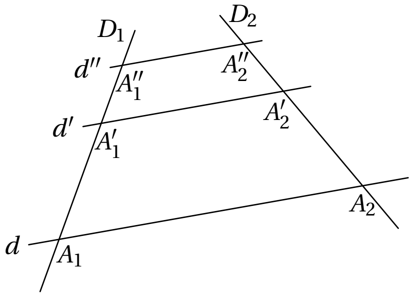
Pour $i \in \{1,2\}$, notons A_i, A'_i, A''_i les points d'intersection de D_i avec d, d', d''. Alors

$$\frac{\overline{A_1A''_1}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}.$$

Réciproquement, si un point B de D_2 vérifie

$$\frac{\overline{A_1A''_1}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2A'_2}},$$

on a $B = A''_2$. En particulier, B appartient à d''.

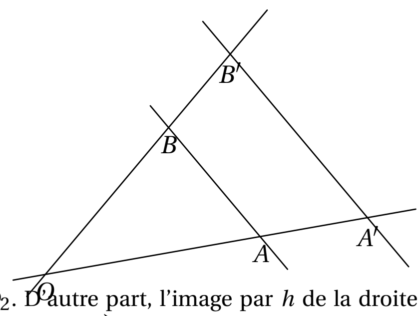


Démonstration. — Notons p la projection sur D_2 parallèlement à $\vec{d}$. Comme $A_2 \in D_2$ et $\overrightarrow{A_1A_2} \in \vec{d}$, on a $A_2 = p(A_1)$. De même, $A'_2 = p(A'_1)$ et $A''_2 = p(A''_1)$. Par suite, $\overrightarrow{A_2A'_2} = \vec{p}(\overrightarrow{A_1A'_1})$ et $\overrightarrow{A_2A''_2} = \vec{p}(\overrightarrow{A_1A''_1})$.

Soit $\vec{u}$ une base de $\vec{D_1}$ et utilisons $\vec{u}$ pour calculer les mesures algébriques. Par définition, on a ainsi $\overrightarrow{A_1A'_1} = \overline{A_1A'_1}\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{A_1A''_1} = \overline{A_1A''_1}\,\vec{u}$. Comme p est une application affine, on en déduit que $\overrightarrow{A_2A'_2} = \overline{A_1A'_1}\,\vec{p}(\vec{u})$ et $\overrightarrow{A_2A''_2} = \overline{A_1A''_1}\,\vec{p}(\vec{u})$. Comme A_2 et A'_2 appartiennent à deux droites parallèles distinctes, on a $A_2 \neq A'_2$ et en particulier $\vec{p}(\vec{u}) \neq \vec{0}$. Il en résulte l'égalité de rapports de mesures algébriques : $\overline{A_1A''_1}/\overline{A_1A'_1} = \overline{A_2A''_2}/\overline{A_2A'_2}$. Réciproquement, si B est un point de D_2 tel que $\overline{A_1A''_1}/\overline{A_1A'_1} = \overline{A_2B}/\overline{A_2A'_2}$, les calculs précédent montrent que $\overrightarrow{A_2B} = \overrightarrow{A_2A''_2}$, d'où $B = A''_2$. □

COROLLAIRE 7.5. — *Soit D_1 et D_2 deux droites d'un plan affine se coupant en un point O. Soit d et d' deux droites parallèles distinctes qui coupent D_1 en A et A', et D_2 en B et B'. On a alors :*

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$



Démonstration. — Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\overline{OA'}/\overline{OA}$. Par h, l'image $h(B)$ du point B est l'unique point du plan tel que $\overrightarrow{Oh(B)} = (\overline{OA'}/\overline{OA})\overrightarrow{OB}$. En particulier, $h(B)$ appartient à la droite D_2. D'autre part, l'image par h de la droite d est une droite passant par A' et dirigée par $\vec{h}(\overrightarrow{AA'})$ qui est proportionnel à $\overrightarrow{AA'}$; c'est donc la droite d'. Ainsi, $h(B) \in d'$. Il en résulte que $h(B)$ est le point d'intersection de D_2 et d', c'est-à-dire $h(B) = B'$. Cela entraîne la première relation. De plus,

$$\vec{h}(\overrightarrow{A'B'}) = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\overrightarrow{AB},$$

d'où la seconde relation. □

Exercices. — 1) Soit f_1, f_2, f_3 trois formes affines non nulles sur un plan affine $\mathscr{P}$. Montrer que $f_i^{-1}(0)$ est une droite D_i. Montrer que les droites D_1, D_2 et D_3 sont parallèles ou concourantes si et seulement si la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est liée.
2) Soit A un point du plan et soit f une homothétie ou une translation. On pose $B = f(A)$. Montrer que la droite (AB) est stable par f.
3) Soit A, B, A', B' quatre points distincts d'un plan affine tels que les droites (AB) et $(A'B')$ soient parallèles. Démontrer qu'il existe une translation ou une homothétie f telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.
4) Soit D et D' deux droites distinctes du plan, soit A, B, C trois points de D et A', B', C' trois points de D'. On suppose que (AB') est parallèle à (BA') et que (BC') est parallèle à (CB'). Montrer que (AC') est parallèle à $(A'C)$ (cas particulier du *théorème de Pappus*).
5) Soit A, B, C, A', B', C' six points distincts du plan tels que les droites (AB) et $(A'B')$, (AC) et $(A'C')$, (BC) et $(B'C')$, soient parallèles. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles (cas particulier du *théorème de Desargues*).

6) Dans cet exercice et dans le suivant, on considère un triangle ABC du plan affine, et trois points A', B', C' situés respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB). Montrer que les points A', B', C' sont alignés si et seulement si l'on a (*théorème de Menelaüs*)

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

7) Montrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont parallèles ou concourantes si et seulement si l'on a (*théorème de Ceva*)

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

CHAPITRE 2

GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Dans tout ce chapitre, on ne considère que des espaces vectoriels sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels.

§1. Espaces euclidiens

A. Produit scalaire, norme

DÉFINITION 1.1 (produit scalaire). — *Soit E un espace vectoriel. Un* produit scalaire *sur E est une application $E \times E \to \mathbf{R}$, notée généralement $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle$, qui vérifie les propriétés suivantes :*

a) $\langle a_1 u_1 + a_2 u_2, v\rangle = a_1\langle u_1, v\rangle + a_2\langle u_2, v\rangle$, *pour $u_1, u_2, v \in E$ et $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ (linéarité par rapport à la première variable) ;*
b) $\langle u, a_1 v_1 + a_2 v_2\rangle = a_1\langle u, v_1\rangle + a_2\langle u, v_2\rangle$ *pour $u, v_1, v_2 \in E$ et $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ (linéarité par rapport à la seconde variable) ;*
c) $\langle u, v\rangle = \langle u, v\rangle$ *pour $u, v \in E$ (symétrie) ;*
d) $\langle u, u\rangle \geqslant 0$ *pour tout $u \in E$ et si $\langle u, u\rangle = 0$, alors $u = 0$ (définie positivité).*

DÉFINITION 1.2. — *Un espace vectoriel (de dimension finie) muni d'un produit scalaire est appelé* espace vectoriel euclidien. *Un* espace affine euclidien *est un espace affine dont l'espace vectoriel associé est muni d'un produit scalaire.*

Soit E un espace vectoriel euclidien. On appelle norme euclidienne*, ou plus simplement* norme*, d'un vecteur $x \in E$, et on note $\|x\|$, le nombre réel $\sqrt{\langle x, x\rangle}$.*

La restriction d'un produit scalaire à un sous-espace vectoriel V de E est un produit scalaire sur V, et le munit d'une structure d'espace vectoriel euclidien. De même, un sous-espace affine d'un espace affine euclidien est automatiquement muni d'une structure d'espace affine euclidien.

1.3. Point de vue matriciel. — Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. La matrice A du produit scalaire de E dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice $n \times n$ de coefficients $a_{ij} = (\langle e_i, e_j\rangle)$. Soit x et y deux vecteurs de E ; soit X et Y les vecteurs colonnes formés par leurs coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. On a ainsi $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_j e_j$. Par la propriété de bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = {}^{\mathrm{t}}XAY.$$

Soit $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une seconde base de E et soit P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Notons A' la matrice du produit scalaire de E dans la base $\mathscr{B}'$. Si X' et Y' sont les vecteurs colonnes formés des coordonnées de x et y dans la base $\mathscr{B}'$, on a $X = PX'$ et $Y = PY'$. On a alors

$${}^{\mathrm{t}}X'A'Y' = \langle x, y\rangle = {}^{\mathrm{t}}XAY = {}^{\mathrm{t}}X'{}^{\mathrm{t}}PAPY'.$$

On en déduit que $A' = {}^{\mathrm{t}}PAP$.

1.4. Cas du plan affine euclidien. Nombres complexes. — Identifions l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes au plan $\mathbf{R}^2$ par l'application $z \mapsto (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$, de bijection réciproque $(x, y) \mapsto x + \mathrm{i}y$. Le nombre complexe z est parfois appelé *affixe* du point de coordonnées (x, y).

Le produit scalaire sur $\mathbf{R}^2$ s'écrit $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + yy'$. Cela munit $\mathbf{C}$ d'une structure d'espace vectoriel euclidien de dimension 2. Si $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, on constate alors que

$$\overline{z}z' = (x - \mathrm{i}y)(x' + \mathrm{i}y') = (xx' + yy') + \mathrm{i}(xy' - x'y),$$

donc le produit scalaire de $\mathbf{C}$ est donné par la formule $\langle z, z' \rangle = \operatorname{Re}(\overline{z}z')$. En particulier, $\langle z, z \rangle = \operatorname{Re}(\overline{z}z) = |z|^2$: la norme euclidienne sur $\mathbf{C}$ est le module.

Le plan complexe $\mathbf{C}$ peut aussi être considéré comme un espace affine euclidien.

PROPOSITION 1.5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). — *Soit x et y deux vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E. On a alors l'inégalité*

$$\left|\langle x, y \rangle\right| \leqslant \|x\| \, \|y\| .$$

De plus, on a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration. — Posons, pour $t \in \mathbf{R}$, $q(t) = \|x + ty\|^2$. On a

$$q(t) = \langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + t\langle x, y \rangle + t\langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + \|y\|^2 .$$

Si $y = 0$, l'inégalité est évidente (et est toujours une égalité).

Si $y \neq 0$, $\|y\|^2 \neq 0$ et $q(t)$ est un trinôme du second degré en t. Comme il est toujours positif ou nul, son discriminant (réduit) Δ' est négatif ou nul. Or,

$$\Delta' = \langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \, \|y\|^2 ,$$

d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans ce cas. Si l'on a égalité, le discriminant réduit est nul et $q(t)$ a une racine double en un réel a. Alors, $q(a) = \|x + ay\|^2 = 0$, ce qui entraîne $x + ay = 0$: on a donc $x = -ay$ et les vecteurs x et y sont colinéaires. □

PROPOSITION 1.6. — *L'application $x \mapsto \|x\|$ de E dans $\mathbf{R}_+$ vérifie les propriétés suivantes :*

a) $\|ax\| = |a| \, \|x\|$ *pour $a \in \mathbf{R}$ et $x \in E$;*
b) *on a $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$;*
c) *on a $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).*

Les propriétés précédentes montrent que $x \mapsto \|x\|$ est précisément ce qu'on appelle une norme sur un espace vectoriel.

Démonstration. — On a $\|ax\| = \sqrt{\langle ax, ax \rangle} = \sqrt{a^2 \langle x, x \rangle} = |a| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |a| \, \|x\|$. On a $\|0\| = 0$, et si $\|x\| = 0$, $\langle x, x \rangle = 0$, d'où $x = 0$. Enfin,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\,\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 \\ &\leqslant \big(\|x\| + \|y\|\big)^2, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité voulue en prenant les racines carrées des deux membres. □

DÉFINITION 1.7. — *Soit E un espace affine euclidien. On note $d(A, B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ pour A et B dans E ; c'est la* distance euclidienne *entre A et B.*

La distance vérifie les propriétés suivantes, héritées de celles de la norme euclidienne sur $\overrightarrow{E}$:

a) Si $A, B \in E$, on a $d(A, B) \geqslant 0$;
b) Pour A et B dans E, $d(A, B) = 0$ équivaut à $A = B$;
c) $d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$ pour A, B, $C \in E$.

Exercices. — 1) Si $\langle x, y\rangle = \|x\| \|y\|$, avec $y \neq 0$, démontrer que x et y sont *positivement liés* : il existe $a \in \mathbf{R}_+$ tel que $x = ay$.
2) Démontrer que $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x, y\rangle$, pour $x, y \in E$.
3) Soit A la matrice du produit scalaire d'un espace vectoriel euclidien dans une base donnée. Montrer que A est symétrique et que son déterminant n'est pas nul.

B. Orthogonalité

DÉFINITION 1.9. — *On dit que deux vecteurs x et y d'un espace euclidien E sont* orthogonaux *si leur produit scalaire est nul.*

On dit que deux sous-espaces V et W de E sont orthogonaux si tout vecteur de V est orthogonal à tout vecteur de W.

PROPOSITION 1.10. — *Soit E un espace vectoriel euclidien. Pour toute forme linéaire $\varphi\colon E \to \mathbf{R}$ sur E, il existe un unique vecteur $u \in E$ tel que $\varphi(x) = \langle u, x\rangle$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. — Soit $u \in E$. L'application φ_u de E dans $\mathbf{R}$ définie par $x \mapsto \langle u, x\rangle$ est linéaire car le produit scalaire est linéaire en la seconde variable ; c'est donc un élément de E^*. Si $u \in E$ et $a \in \mathbf{R}$, on a, pour tout $x \in E$, $\varphi_{au}(x) = \langle au, x\rangle = a\langle u, x\rangle = a\varphi_u(x)$, ce qui montre que $\varphi_{au} = a\varphi_u$. De même, si $u_1, u_2 \in E$, on a, pour tout $x \in E$,

$$\varphi_{u_1+u_2}(x) = \langle u_1 + u_2, x\rangle = \langle u_1, x\rangle + \langle u_2, x\rangle = \varphi_{u_1}(x) + \varphi_{u_2}(x),$$

d'où $\varphi_{u_1+u_2} = \varphi_{u_1} + \varphi_{u_2}$. Ces deux relations montrent que l'application $u \mapsto \varphi_u$ est une application linéaire de E dans le dual E^* de E.

Montrons qu'elle est injective. Soit en effet $u \in E$ tel que $\varphi_u = 0$. On a ainsi $\varphi_u(x) = \langle u, x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$. En particulier, $\varphi_u(u) = \langle u, u\rangle = 0$. La propriété de définie positivité entraîne que $u = 0$.

Comme E et E^* ont même dimension (c'est là qu'on utilise l'hypothèse que E est de dimension finie), l'application linéaire injective $u \mapsto \varphi_u$ est surjective. □

Cela permet d'écrire l'équation d'un hyperplan sous forme d'une égalité de produit scalaire. Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E. Soit u un vecteur non nul tel que l'équation de H soit $\langle u, x\rangle = 0$. Alors, u est orthogonal à H.

Dans le cas d'un espace affine E, la situation est analogue. Soit H un hyperplan affine de E. Soit A un point de E ; l'équation de H s'écrit $\varphi(\overrightarrow{AM}) = b$ où φ est une forme linéaire non nulle sur $\overrightarrow{E}$ et $b \in \mathbf{R}$. Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur tel que $\varphi(x) = \langle x, \overrightarrow{u}\rangle$, l'équation de H s'écrit donc $\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}\rangle = b$. On peut choisir $A \in H$; l'équation de l'hyperplan est alors $\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}\rangle = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à H. Enfin, on peut, si l'on veut, le choisir unitaire.

THÉORÈME 1.11 (Théorème de Pythagore). — *Deux vecteurs x et y d'un espace euclidien E sont orthogonaux si et seulement si*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

La démonstration est totalement triviale (c'est décevant ?) : la différence entre les deux membres est égale à $2\langle x, y\rangle$. Elle est nulle si et seulement si $\langle x, y\rangle = 0$, c'est-à-dire si et seulement si x et y sont orthogonaux.

DÉFINITION 1.12. — *Si V est un sous-espace vectoriel de E, on note $V^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tout vecteur de V ; on l'appelle l'*orthogonal de V.

Si $V \subset W$, remarquons qu'alors $W^\perp \subset V^\perp$ et $V \subset (V^\perp)^\perp$.

PROPOSITION 1.13. — *Soit V un sous-espace vectoriel de E. Alors, $V^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E, qui est un supplémentaire de V. En particulier,* $\dim V^\perp = \dim E - \dim V$ *et* $(V^\perp)^\perp = V$.

On appelle $V^\perp$ le *supplémentaire orthogonal* de V. Si E est la somme directe de sous-espaces vectoriels $V_1, \dots, V_m$ qui sont orthogonaux deux à deux, on dira que E est la somme directe orthogonale des V_i et on notera $E = V_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_m$; on a par exemple $E = V \overset{\perp}{\oplus} V^\perp$.

Démonstration. — Pour x et $y \in V^{\perp}$, et $a, b \in \mathbf{R}$, on a, si $v \in V$,

$$\langle ax + by, v\rangle = a\langle x, v\rangle + b\langle y, v\rangle = 0,$$

ce qui entraîne que $ax + by \in V^{\perp}$. Par suite, $V^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Si $x \in V \cap V^{\perp}$, on a $\langle x, x\rangle = 0$, donc $x = 0$. Les espaces V et $V^{\perp}$ sont donc en somme directe.

Considérons l'application de E dans V^* qui, à $u \in E$, associe la forme linéaire $x \mapsto \langle u, x\rangle$ sur V. Elle est linéaire. Son noyau est l'ensemble des $u \in E$ tels que $\langle u, x\rangle = 0$ pour tout $x \in V$. Il est donc égal à $V^{\perp}$, ce qui redémontre au passage que $V^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E. Enfin, elle est surjective. Soit f une forme linéaire sur V. Comme la restriction à V du produit scalaire de E munit V d'une structure d'espace vectoriel euclidien, il existe $v \in V$ tel que $f(x) = \langle v, x\rangle$ pour tout $x \in V$. Cela montre que f est l'image de v. Par suite, $\dim V^* = \dim E - \dim V^{\perp}$. Comme $\dim V^* = \dim V$, on a $\dim V + \dim V^{\perp} = \dim E$, ce qui conclut la démonstration que V et $V^{\perp}$ sont supplémentaires l'un de l'autre. □

DÉFINITION 1.14. — *On dit qu'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ d'un espace euclidien E est une* base orthonormée *si l'on a $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ si $i \neq j$, et $\langle e_i, e_i\rangle = 1$ pour tout i.*

Un repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ d'un espace affine euclidien E est dit orthonormé si $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est un repère orthonormé de son espace vectoriel associé $\overrightarrow{E}$.

Un espace vectoriel euclidien possède des bases orthonormées, un espace affine euclidien possède des repères orthonormés. On peut en construire explicitement par le procédé suivant, appelé *procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.*

PROPOSITION 1.15. — *Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E. Il existe une unique base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E vérifiant la propriété suivante : pour tout entier $m \in \{1, \dots, n\}$, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tels que $f_m = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{m-1} f_{m-1} + \lambda_m e_m$, avec $\lambda_m > 0$.*

Démonstration. — Pour $m = 1$, la condition s'écrit $f_1 = \lambda_1 e_1$, avec $\lambda_1 > 0$. Comme on doit avoir $\|f_1\| = 1$, la seule solution est donnée par $\lambda_1 = 1/\|e_1\|$. Supposons avoir construit $f_1, \dots, f_{m-1}$ et cherchons f_m. Calculons $\langle f_m, f_i\rangle$, pour $i \leqslant m$. Le vecteur f_m doit être orthogonal aux f_i, pour $i < m$. Prenant le produit scalaire avec f_i des deux membres de l'égalité

$$f_m = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{m-1} f_{m-1} + \lambda_m e_m,$$

on obtient $0 = \lambda_i + \lambda_m \langle e_m, f_i\rangle$, d'où la relation

$$f_m = \lambda_m \left(e_m - \sum_{i=1}^{m-1} \langle e_m, f_i\rangle f_i \right).$$

Les f_i, pour $i < m$, appartiennent à l'espace vectoriel engendré par $(e_1, \dots, e_{m-1})$. Par suite, e_m n'est pas combinaison linéaire des f_i, pour $i < m$ et l'expression dans la parenthèse de la relation précédente est un vecteur non nul. Il existe alors un unique choix strictement positif pour λ_m tel que $\|f_m\| = 1$. □

Exercices. — 1) Dans le plan complexe, deux vecteurs non nuls d'affixes z et z' sont colinéaires si et seulement si z'/z est réel ; sont orthogonaux si et seulement si z'/z est imaginaire pur.

2) Si V est un sous-espace d'un espace euclidien E, on a $(V^{\perp})^{\perp} = V$.

3) Soit V et W des sous-espaces d'un espace euclidien E. On a $(V + W)^{\perp} = V^{\perp} \cap W^{\perp}$ et $(V \cap W)^{\perp} = V^{\perp} + W^{\perp}$.

4) Soit $e_1, \dots, e_r$ des vecteurs non nuls d'un espace euclidien E tels que $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ pour $i \neq j$. Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_r)$ est libre.

5) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un espace euclidien et soit $\mathscr{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ la base orthonormée obtenue par le procédé de Gram-Schmidt. Soit P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Montrer que P est triangulaire supérieure et que ses coefficients diagonaux sont strictement positifs.

6) Soit A la matrice du produit scalaire dans une base $(e_1, \dots, e_n)$. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure T telle que $A = {}^{\mathrm{t}}TT$.

7) Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $\varphi \colon E \to E^*$ l'application qui à $u \in E$ associe la forme linéaire $x \mapsto \langle u, x\rangle$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, soit $\mathscr{B}^* = (f_1, \dots, f_n)$ sa base duale : f_i est la forme linéaire sur E telle que $f_i(e_i) = 1$ et $f_i(e_j) = 0$ si $j \neq i$. Montrer que la matrice de l'application linéaire φ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}^*$ est égale à la matrice du produit scalaire de E dans la base $\mathscr{B}$.

C. Barycentres, compléments

DÉFINITION 1.17. — *Soit* $((A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n))$ *un système de points pondérés dans un espace affine euclidien* E. *On appelle* fonction scalaire de Leibniz *l'application*

$$f \colon E \to \mathbf{R}, \quad M \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_j \left\| \overrightarrow{MA_j} \right\|^2.$$

Notons aussi φ la fonction vectorielle de Leibniz de ce système de points pondérés. Si M et N sont des points de E, on a alors

$$\begin{aligned} f(M) &= \sum_{j=1}^{n} a_j \left\| \overrightarrow{MA_j} \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} a_j \left\| \overrightarrow{NA_j} + \overrightarrow{MN} \right\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\left\| \overrightarrow{NA_j} \right\|^2 + 2\langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NA_j} \rangle + \left\| \overrightarrow{MN} \right\|^2 \right) \\ &= f(N) + 2\langle \overrightarrow{MN}, \varphi(N) \rangle + (\sum_{j=1}^{n} a_j) \left\| \overrightarrow{MN} \right\|^2. \end{aligned}$$

Notons a la masse totale $\sum_{j=1}^{n} a_j$ et supposons d'abord $a = 0$. Dans ce cas, la fonction vectorielle de Leibniz est constante, et $\varphi(N)$ est un vecteur $\overrightarrow{u}$ indépendant de M. Alors,

$$f(M) = f(N) + 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{MN} \rangle.$$

Supposons $\overrightarrow{u} \neq 0$; l'ensemble des points M de E tels que $f(M) = f(N)$ est alors égal à l'hyperplan passant par N qui est orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Si $\overrightarrow{u} = 0$, f est constante.

Supposons que l'on ait $a \neq 0$ et soit G le barycentre de la famille de points pondérés $((A_j, a_j))$. Appliquons la formule précédente avec $N = G$; on obtient

$$f(M) = f(G) + a \left\| \overrightarrow{MN} \right\|^2.$$

Supposons $a > 0$. Alors f atteint son minimum au point G. Si $C \in \mathbf{R}$, l'ensemble des points M de E tels que $f(M) = C$ est vide si $C < f(G)$, est égal à G si $C = f(G)$ et est une sphère de centre G et de rayon $\sqrt{(C - f(G))/a}$ si $C > f(G)$.

Quand $a < 0$, la fonction scalaire de Leibniz atteint son maximum au point G ; son ensemble de niveau C est vide si $C > f(G)$, le point G si $C = f(G)$, une sphère de centre G et de rayon $\sqrt{(C - f(G))/a}$ si $C < f(G)$.

Soit A et B deux points distincts d'un espace affine euclidien. La relation $MA = MB$ équivaut à $\left\| \overrightarrow{MA} \right\|^2 - \left\| \overrightarrow{MB} \right\|^2 = 0$. L'ensemble des points M qui la satisfont est l'hyperplan passant par le milieu I de (A, B) et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$. On l'appelle *l'hyperplan médiateur du bipoint* (A, B).

Exercices. — 1) Soit E un espace affine euclidien. Soit A et B deux points de E. Déterminer, suivant la valeur du réel $c \in \mathbf{R}$, l'ensemble des points M de E tels que $\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = c$. (Introduire le milieu de (A, B).)
2) Soit $ABCD$ un parallélogramme du plan euclidien. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $\langle (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}), (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) \rangle = 0$? $= \|AC\|^2$?
3) Soit A, B, C des points non alignés du plan euclidien. Déterminer les ensembles de niveau de la fonction $M \mapsto \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle + \langle \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC} \rangle + \langle \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA} \rangle$. Généraliser avec n points.

§2. Isométries d'un espace vectoriel euclidien

A. Définitions

DÉFINITION 2.1. — *Soit* E *un espace vectoriel euclidien et soit* f *un endormorphisme de* E. *On dit que* f *est une* isométrie *si* $\left\| f(x) \right\| = \|x\|$ *pour tout* $x \in E$.

Soit E un espace vectoriel euclidien. Une isométrie de E est injective. Comme E est de dimension finie, elle est donc bijective. Sa bijection réciproque est aussi une isométrie. La composée de deux isométries est une isométrie. L'ensemble des isométries de E forme donc un sous-groupe du groupe linéaire de E ; on le note $\mathrm{SO}(E)$.

La restriction d'une isométrie à un sous-espace vectoriel stable V est une isométrie de V.

Soit f une isométrie d'un espace vectoriel euclidien E. Soit x et y des éléments de E. On a

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)\\ &= \langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi, *une isométrie préserve les produits scalaires.* En particulier, les images par f de deux vecteurs orthogonaux sont orthogonaux.

PROPOSITION 2.2. — *Soit E un espace vectoriel euclidien, soit f un endomorphisme de E et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.*

L'endomorphisme f est une isométrie si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Démonstration. — Supposons que f soit une isométrie. Alors, f est un isomorphisme, donc $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de E. De plus, on a $\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = 1$ si $i = j$ et 0 sinon ; par suite, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Inversement, supposons que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ soit une base orthonormée de E. Soit x un élément de E, notons $(x_1, \dots, x_n)$ ses coordonnées dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, de sorte que $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ et calculons $\|f(x)\|^2$. On a

$$\|f(x)\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^n x_i f(e_i)\right\|^2 = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2,$$

donc $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout x et f est une isométrie. □

2.3. Forme matricielle. — Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et soit A la matrice du produit scalaire de E dans la base $\mathscr{B}$. Soit M la matrice d'un endomorphisme f de E dans cette même base. Soit x et y deux vecteurs de E, de vecteurs colonnes associés X et Y. Les vecteurs colonnes associés à $f(x)$ et $f(y)$ sont MX et MY. Ainsi,

$$\langle f(x), f(y)\rangle = {}^{\mathrm{t}}(MX)A(MY) = {}^{\mathrm{t}}X({}^{\mathrm{t}}MAM)Y.$$

On a donc $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tous x et y si et seulement si ${}^{\mathrm{t}}MAM = A$.

Dans le cas particulier important où $\mathscr{B}$ est une base orthonormée, $A = \mathrm{I}_n$. Alors, une matrice M est la matrice d'une isométrie dans la base orthonormée $\mathscr{B}$ si et seulement si ${}^{\mathrm{t}}MM = \mathrm{I}_n$.

Le déterminant d'une telle matrice vérifie $\det(M)^2 = \det(M)\det({}^{\mathrm{t}}M) = \det(\mathrm{I}_n) = 1$. On a donc $\det(M) = \pm 1$. Le déterminant d'une isométrie, qui est le déterminant de la matrice qui la représente dans une base quelconque, est donc égal à ± 1. Les isométries dont le déterminant est $+1$ sont dites *positives* ; elles forment un sous-groupe du groupe $\mathrm{SO}(E)$ que l'on note $\mathrm{O}(E)$.

2.4. Cas du plan complexe. — Quelle est l'expression en termes d'affixes d'une isométrie du plan vectoriel euclidien identifié à $\mathbf{C}$? Soit $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une isométrie vectorielle. Posons $a = f(1)$. C'est un nombre complexe de module 1. Comme $f(\mathrm{i})$ est orthogonal à $f(1)$, on a $f(\mathrm{i}) = \pm \mathrm{i}a$. Si $z = x + \mathrm{i}y$, on a, dans le premier cas,

$$f(z) = xf(1) + yf(\mathrm{i}) = a(x + \mathrm{i}y) = az,$$

et

$$f(z) = xf(1) + yf(\mathrm{i}) = a(x - \mathrm{i}y) = a\overline{z}.$$

L'expression de f en termes d'affixes est donc $z \mapsto az$ dans le premier cas, et $z \mapsto a\bar{z}$ dans le second. Réciproquement, ces applications sont des isométries du plan complexe (rappelons que $|a| = 1$).

Soit θ un nombre réel (bien défini modulo 2π) tel que $a = \exp(\mathrm{i}\theta)$. La matrice de f dans la base $(1, \mathrm{i})$ de $\mathbf{C}$ est alors

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Le déterminant des matrices du premier type est 1, celui des matrices du second type est -1. Par suite, les *isométries positives* du plan complexe sont donnés par $z \mapsto az$, avec $|a| = 1$; les isométries négatives s'écrivent $z \mapsto a\bar{z}$, toujours avec $|a| = 1$.

Voici un corollaire important de ces calculs :

COROLLAIRE 2.5. — *Soit* $\mathbf{U}$ *le groupe des nombres complexes de module* 1. *L'application* $\mathbf{U} \to \mathrm{O}^+(\mathbf{C})$ *qui, à* $a \in \mathbf{U}$, *associe l'isométrie dont l'écriture complexe est* $z \mapsto az$, *est un isomorphisme de groupes.*

En particulier, le groupe $\mathrm{O}^+(\mathbf{C})$ est commutatif. De plus, l'application $\varphi \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ est un homomorphisme de groupes, surjectif, de noyau $2\pi\mathbf{Z}$. Par passage au quotient, elle définit un isomorphisme de $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ sur le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$.

Soit f une isométrie négative du plan euclidien, identifié à $\mathbf{C}$, et soit $a \in \mathbf{U}$ tel que $f(z) = a\bar{z}$. On a alors $f(f(z)) = a\overline{f(z)} = a\overline{a\bar{z}} = a\bar{a}z = z$. Cela montre que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$, donc f est une involution. Ses valeurs propres sont donc ± 1 et comme $\det(f) = -1$, elles sont $\{1, -1\}$. Cela entraînera que f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite de $\mathbf{C}$.

2.6. Rappel sur l'exponentielle complexe. — La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$. converge pour tout nombre complexe z. Sa somme est notée $\exp(z)$ ou e^z et est appelée *l'exponentielle* de z. La fonction $\exp\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $z \mapsto \mathrm{e}^z$ est continue, et même indéfiniment dérivable comme fonction de deux variables (x, y) telles que $z = x + \mathrm{i}y$. La fonction ainsi définie prolonge l'exponentielle réelle. Par analogie on définit alors

$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z)\right) \quad \text{et} \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}\left(\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)\right).$$

On démontre que $\exp(z+u) = \exp(z)\exp(u)$ pour tous z et $u \in \mathbf{C}$. En particulier, $\exp(z) \neq 0$ et $\exp(-z) = 1/\exp(z)$. De plus, $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$. Par suite, si $t \in \mathbf{R}$, $\left|\exp(\mathrm{i}t)\right| = 1$. L'application $t \mapsto \mathbf{U}$ donnée par $t \mapsto \exp(\mathrm{i}t)$ est un homomorphisme de groupes. On démontre qu'il est surjectif et que son noyau est de la forme $2\pi\mathbf{Z}$, pour un certain nombre réel π qui vaut approximativement 3,14159.... Il en résulte un isomorphisme de groupes $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to \mathbf{U}$.

B. Symétries orthogonales, réflexions

DÉFINITION 2.7. — *Soit E un espace vectoriel euclidien et soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle* symétrie orthogonale *par rapport à F la symétrie vectorielle par rapport à F de direction l'orthogonal $F^\perp$ de F. On la note généralement s_F. On appelle projection orthogonale sur un sous-espace F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.*

Les symétries orthogonales sont des isométries. Soit en effet $x \in E$ et soit $x = y + z$ sa décomposition (unique) comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $F^\perp$. Alors, $s_F(x) = y - z$ et

$$\|s_F(x)\|^2 = \left\|y - z\right\|^2 = \left\|y\right\|^2 + \|z\|^2$$

car $\langle y, z\rangle = 0$. De même, $\left\|y + z\right\|^2 = \left\|y\right\|^2 + \|z\|^2$. Par suite, $\|s_F(x)\|^2 = \|x\|^2$, ce qui montre que s_F est une isométrie.

Un cas particulier important : les symétries par rapport à un hyperplan. On les appelle aussi *réflexions*. Soit H un hyperplan de E, soit e un vecteur normal à H. Si $x \in E$, on peut écrire $x = y + \lambda e$, avec $y \in H$, $\lambda \in \mathbf{R}$ et $s_H(x) = y - \lambda e = x - 2\lambda e$. Or, $\langle x, e\rangle = \langle y, e\rangle + \lambda\langle e, e\rangle$. Comme $e \perp H$, $\langle y, e\rangle = 0$ et $\lambda = \langle x, e\rangle / \langle e, e\rangle$. Ainsi,

$$s_H(x) = x - 2\frac{\langle x, e\rangle}{\langle e, e\rangle} e.$$

En particulier, $s_H(e) = -e$.

Les projections orthogonales ne sont en revanche pas des isométries (à moins que $F = E$, auquel cas la projection est l'identité).

THÉORÈME 2.8. — *Toute isométrie est produit de réflexions. Plus précisément, soit E un espace vectoriel euclidien et soit f une isométrie de E. Il existe un entier $p \leqslant \dim E$ et p réflexions $s_1, \dots, s_p$ telles que $f = s_1 \circ \cdots \circ s_p$.*

Le déterminant d'une réflexion est égal à -1. Par suite, on a $\det(f) = (-1)^p$ et la parité de l'entier p est déterminée par f.

Démonstration. — Nous allons démontrer un résultat encore plus précis : soit E un espace vectoriel euclidien. Soit f une isométrie de E, soit $F = \ker(f - \mathrm{id}_E)$ et $p = \operatorname{codim} F = \dim F^\perp$. Alors, f est la composée d'au plus p réflexions.

On démontre ce résultat par récurrence sur p. Si $p = 0$, $F = E$, $f = \mathrm{id}_E$ et le résultat est vrai. Supposons que le résultat soit vrai jusqu'à $p-1$ et soit f une isométrie de E telle que la codimension de $F = \operatorname{codim}(f - \mathrm{id}_E)$ soit égale à $p > 0$. Soit e un vecteur de $E \setminus F$, de sorte que $f(e) \neq e$. Soit H l'hyperplan orthogonal au vecteur $(f(e) - e)$ et soit s la réflexion par rapport à H. Considérons l'isométrie $s \circ f$.

Remarquons que $F \subset H$. En effet, si $x \in F$, $f(x) = x$, donc

$$\langle x, f(e) - e\rangle = \langle x, f(e)\rangle - \langle x, e\rangle = \langle f(x), f(e)\rangle - \langle x, e\rangle = 0$$

car f préserve le produit scalaire. Par suite, $s \circ f(x) = s(x) = x$ si $x \in F$, ce qui montre que $\ker(s \circ f - \mathrm{id}_E)$ contient F.

En outre, on a $f(e) = \frac{1}{2}(f(e) + e) + \frac{1}{2}(f(e) - e)$ et

$$\langle f(e) + e, f(e) - e\rangle = \left\|f(e)\right\|^2 - \|e\|^2 = 0,$$

car f est une isométrie. Par suite,

$$s(f(e)) = \frac{1}{2}(f(e) + e) - \frac{1}{2}(f(e) - e) = e,$$

si bien que $\ker(s \circ f - \mathrm{id}_E)$ contient e.

Comme $e \notin F$, il en résulte que la dimension de $\ker(s \circ f - \mathrm{id}_E)$ est au moins égale à celle de $\ker(f - \mathrm{id}_E) + 1$, d'où $\operatorname{codim}(\ker(s \circ f - \mathrm{id}_E)) \leqslant p - 1$. Par récurrence, il existe un entier $k \leqslant p-1$ et k réflexions $s_2, \dots, s_{k+1}$ telles que $s \circ f = s_2 \circ \cdots \circ s_{k+1}$. On a alors

$$f = s \circ s \circ f = s \circ s_2 \circ \cdots \circ s_{k+1},$$

ce qui démontre le théorème car $k + 1 \leqslant p$. □

Exercices. — 1) Soit E un espace vectoriel euclidien, soit $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E. Montrer qu'il existe une isométrie u telle que $u(e_i) = f_i$ pour tout i si et seulement si $\langle f_i, f_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle$ pour tout couple d'entiers i, j dans $\{1, \dots, n\}$.

2) Soit E un espace vectoriel euclidien, soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E qui sont supplémentaires l'un de l'autre et soit s la symétrie par rapport à F, parallèlement à G. Montrer que s est une isométrie si et seulement si F et G sont orthogonaux.

3) Soit E un espace vectoriel euclidien, soit F un sous-espace vectoriel de E et s la symétrie orthogonale par rapport à F. Montrer qu'un sous-espace V de E vérifie $s(V) = V$ si et seulement si $V = (V \cap F) \oplus (V \cap F^\perp)$.

4) Quelles sont les valeurs propres possibles d'une isométrie ?

5*) Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f : E \to E$ une application qui préserve le produit scalaire. Montrer que f est une application linéaire. C'est donc une isométrie de E.

Soit D la droite dans $\mathbf{R}^2$ de vecteur directeur $(\cos\theta, \sin\theta)$ et soit s la symétrie orthogonale par rapport à D. Donner les formules pour s, à la fois matricielle et en termes de nombres complexes.

C. Forme normale des isométries (« diagonalisation »)

LEMME 2.10. — *Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit u un endomorphisme de E. Alors il existe un sous-espace vectoriel V de E de dimension* 1 *ou* 2 *qui est stable par u.*

Démonstration. — Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et soit A la matrice de u dans cette base. Soit λ une valeur propre de A soit $Z \in \mathbf{C}^n$ un vecteur propre pour cette valeur propre. Notons X et Y les parties réelle et imaginaire de Z, $\overline{Z} = X - \mathrm{i}Y$ et $\lambda = a + \mathrm{i}b$. On a $AZ = \lambda Z$, ou encore $A(X + \mathrm{i}Y) = (a + \mathrm{i}b)(X + \mathrm{i}Y)$. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$AX = aX - bY \quad \text{et} \quad AY = bX + aY.$$

Soit x et y les vecteurs de E de coordonnées X et Y. On a donc $u(x) = ax - by$ et $u(y) = bx + ay$. Le sous-espace vectoriel V de E engendré par x et y est ainsi stable par u. Il est de dimension $\leqslant 2$ mais n'est pas nul car x et y ne sont pas tous deux nuls (sinon $X = Y = 0$ et $Z = 0$). On a donc $\dim V = 1$ ou 2. □

LEMME 2.11. — *Soit E un espace vectoriel euclidien et soit u une isométrie de E. Soit V un sous-espace de E qui est stable par u, c'est-à-dire que $u(V) \subset V$. Alors, l'orthogonal de V est un sous-espace stable par u.*

Démonstration. — Soit $y \in V^{\perp}$. L'espace vectoriel $u(V)$ est un sous-espace vectoriel de même dimension que V, car u est injective. Comme il est contenu dans V, on a $u(V) = V$. Si $x \in V$, il existe $x' \in V$ tel que $u(x') = x$. Alors,

$$\langle x, u(y)\rangle = \langle u(x'), u(y)\rangle = \langle x', y\rangle = 0,$$

ce qui montre que $u(y) \in V^{\perp}$. □

THÉORÈME 2.12. — *Soit E un espace vectoriel euclidien et soit u une isométrie de E. Alors E est somme directe orthogonale de droites et de plan stables par u.*

Démonstration. — Cela se démontre par récurrence sur la dimension de u. C'est vrai si $\dim E = 0$ ou 1. Soit V_1 une droite ou un plan stable de E et soit F son orthogonal. Alors, F est stable par u, $u|_F$ est une isométrie de F donc F est somme directe orthogonale de droites ou plans stables par u. Si on écrit $F = V_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_m$, on a alors $E = V_1 \overset{\perp}{\oplus} V_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_m$. □

L'espace E possède une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u s'écrit par blocs de matrices 1×1 ou 2×2. Un bloc 1×1 correspond à une valeur propre réelle de u. Or, si $u(x) = \lambda x$, avec $x \neq 0$, on a $\|x\| = \|u(x)\| = |\lambda|\,\|x\|$, donc $\lambda = \pm 1$. On peut aussi supposer que les blocs 2×2 correspondent à des plans stables qui ne contiennent aucune droite stable, sinon on peut raffiner un peu plus la décomposition de l'espace E. Comme une isométrie négative du plan euclidien est une symétrie orthogonale, cela entraîne que la restriction de u à ces plans stables est une isométrie positive. Si (e_1, e_2) est une base orthonormée d'un tel plan, la matrice de u y est de la forme $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

§3. Isométries d'un espace affine euclidien

A. Généralités

DÉFINITION 3.1. — *Soit E un espace affine euclidien et soit $f\colon E \to E$ une application affine. On dit que f est une* isométrie affine *si l'on a $\|f(A)f(B)\| = \|AB\|$ pour tout couple A, B de points de E.*

Cela revient à dire que son application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est une isométrie de l'espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{E}$.

La composée de deux isométries affines est une isométrie affine. Une isométrie affine est bijective car son application linéaire associée, étant une isométrie, l'est. La bijection réciproque d'une isométrie affine est encore une isométrie. *Les isométries affines d'un espace affine euclidien E forment donc un groupe que l'on note* $\mathrm{Isom}(E)$.

On dit qu'une isométrie f est *positive*, ou que c'est un *déplacement* si l'isométrie vectoriel $\overrightarrow{f}$ l'est. On dit sinon que c'est un *anti-déplacement*. L'ensemble des déplacements d'un espace affine E est un sous-groupe (distingué) du groupe des isométries ; on le note $\mathrm{Isom}^+(E)$.

3.2. Exemples. — Les translations sont des isométries.

Soit E un espace affine euclidien, soit F un sous-espace affine de E et soit V un supplémentaire de $\overrightarrow{F}$ dans E. Notons s la symétrie par rapport à F parallèlement à V dans E ; son application linéaire associée est la symétrie par rapport à $\overrightarrow{F}$ parallèlement à V dans $\overrightarrow{E}$; c'est une isométrie vectorielle si et seulement si $\overrightarrow{F}$ et V sont orthogonaux. On l'appelle alors la *symétrie orthogonale par rapport à F*. La projection orthogonale sur F est la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$. Une *réflexion* est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan affine.

Établissons son expression analytique. Soit H un hyperplan affine de E. Soit A un point de H et $\vec{u}$ un vecteur unitaire de $\vec{E}$ orthogonal à $\vec{H}$. Alors, H est défini par l'équation $\langle \overrightarrow{AM}, \vec{u}\rangle = 0$.

Notons s_H la symétrie orthogonale par rapport à H ; si M est un point de E, $s_H(M)$ est l'unique point de E tel que $\overrightarrow{Ms_H(M)}$ soit colinéaire à $\vec{u}$ et tel que le milieu I du bipoint $(M, s_H(M))$ appartienne à H. Écrivons donc $\overrightarrow{As_H(M)} = \overrightarrow{AM} - 2\lambda\vec{u}$, et $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} - \lambda\vec{u}$. La condition $I \in H$ s'écrit

$$0 = \langle \overrightarrow{AI}, \vec{u}\rangle = \langle \overrightarrow{AM}, \vec{u}\rangle - \lambda,$$

car $\|\vec{u}\|^2 = 1$, d'où la relation $\lambda = \langle \overrightarrow{AM}, \vec{u}\rangle$. Ainsi,

$$\overrightarrow{As_H(M)} = \overrightarrow{AM} - 2\langle \overrightarrow{AM}, \vec{u}\rangle\vec{u}.$$

Notons que la projection orthogonale p_H sur H est alors définie par la formule

$$\overrightarrow{Ap_H(M)} = \overrightarrow{AM} - \langle \overrightarrow{AM}, \vec{u}\rangle\vec{u}.$$

3.3. Forme matricielle. — Soit $\mathscr{R} = (O, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ un repère de E. Soit Q la matrice du produit scalaire de $\vec{E}$ dans la base $\mathscr{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$. Dans le repère $\mathscr{R}$, une application affine $f : E \to E$ s'écrit sous la forme $X \mapsto AX + B$, où A est la matrice $n \times n$ de l'application linéaire associée à f dans la base $\mathscr{B}$. Ainsi, f est une isométrie affine si et seulement si ${}^{\mathrm{t}}AQA = Q$. Si le repère $\mathscr{R}$ est orthonormé, on a $Q = \mathrm{I}_n$ et cela s'écrit ${}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{I}_n$.

3.4. Cas du plan affine euclidien. — Quelle est l'expression en termes d'affixes d'une isométrie du plan affine euclidien identifié à $\mathbf{C}$? Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une isométrie euclidienne, soit $\vec{f}$ son application linéaire associée. On a démontré qu'il existait $a \in \mathbf{U}$ tel que $\vec{f}(z) = az$ si $\vec{f}$ est une isométrie positive, et $\vec{f}(z) = a\bar{z}$ sinon. Si $b = f(0)$, l'expression de f en termes d'affixes est donc $z \mapsto az + b$ dans le premier cas, et $z \mapsto a\bar{z} + b$ dans le second. Réciproquement, ces applications sont des isométries du plan complexe (rappelons que $|a| = 1$).

B. Décomposition canonique des isométries affines

THÉORÈME 3.5. — *Soit E un espace affine euclidien et soit f une isométrie de E. Il existe une isométrie affine g de E ayant un point fixe et un vecteur $\vec{u} \in \vec{E}$, uniques, tels que $f = g \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ g$.*

Démontrons au préalable trois lemmes.

LEMME 3.6. — *Soit E un espace affine, g une application affine de E dans E et soit $\vec{u}$ un élément de $\vec{E}$. On a $g \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ g$ si et seulement si $\vec{u} \in \ker(\mathrm{Id} - \vec{g})$.*

Démonstration. — Ces deux applications affines ont même application linéaire associée, à savoir $\vec{g}$. Elles sont égales si et seulement si elles coïncident un un point. Soit $A \in E$, B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, alors $g \circ t_{\vec{u}}(A) = g(B)$. D'autre part, $t_{\vec{u}} \circ g(A) = C$, où $\overrightarrow{g(A)C} = \vec{u}$. La condition $C = g(B)$ devient alors $\overrightarrow{g(A)g(B)} = \vec{u}$, d'où $\vec{g}(\overrightarrow{AB}) = \vec{u}$, soit encore $\vec{g}(\vec{u}) = \vec{u}$. □

LEMME 3.7. — *Soit E un espace affine, f une application affine de E dans E. Soit A un point de E, $B = f(A)$. L'application affine $t_{-\vec{u}} \circ f$ a un point fixe si et seulement si $\overrightarrow{AB} - \vec{u}$ appartient à l'image de* $\mathrm{Id} - \vec{f}$.

Démonstration. — Soit A un point de E, $B = f(A)$. Si M est un point de E, $f(M)$ est le point M' de E tel que $\overrightarrow{BM'} = \vec{f}(\overrightarrow{AM})$, le point $t_{-\vec{u}} \circ f(M)$ vérifie donc $\overrightarrow{BM'} = \vec{f}(\overrightarrow{AM}) - \vec{u}$, soit encore

$$\overrightarrow{AM'} = \vec{f}(\overrightarrow{AM}) + \overrightarrow{AB} - \vec{u}.$$

Par suite, M est point fixe si et seulement si le vecteur $x = \overrightarrow{AM}$ vérifie $x = \vec{f}(x) + \overrightarrow{AB} - \vec{u}$, ce qu'on récrit $\overrightarrow{AB} - \vec{u} = (\mathrm{Id} - \vec{f})(x)$. □

LEMME 3.8. — *Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel euclidien, soit f une isométrie de $\vec{E}$. Les espaces* $\ker(f - \mathrm{id})$ *et* $\mathrm{im}(f - \mathrm{id})$ *sont des supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre.*

Démonstration. — Montrons que les deux sous-espaces $\ker(f-\mathrm{id})$ et $\operatorname{im}(f-\mathrm{id})$ sont orthogonaux. Soit $x\in\ker(f-\mathrm{id})$ et $y\in\operatorname{im}(f-\mathrm{id})$. On peut écrire $y=f(z)-z$, avec $z\in E$. Comme $f(x)=x$, on a

$$\langle x,y\rangle=\langle x,f(z)-z\rangle=\langle x,f(z)\rangle-\langle x,z\rangle=\langle f(x),f(z)\rangle-\langle x,z\rangle=0,$$

car f est une isométrie. En particulier, ces deux espaces $\ker(f-\mathrm{id})$ et $\operatorname{im}(f-\mathrm{id})$ sont en somme directe. D'après le théorème du rang, on a

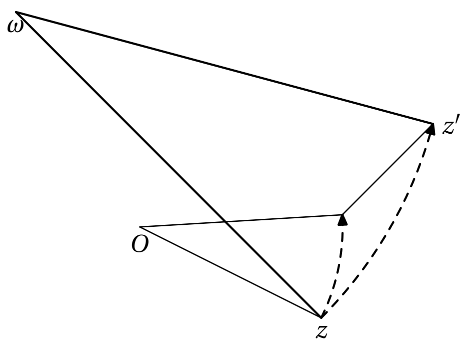
$$\dim\ker(f-\mathrm{id})+\dim\operatorname{im}(f-\mathrm{id})=\dim\overrightarrow{E}.$$

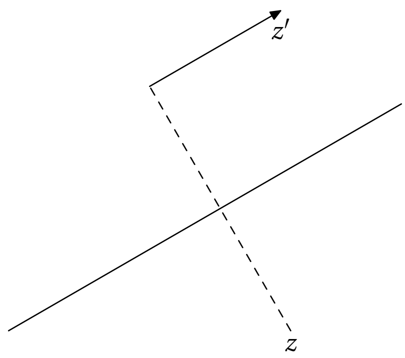
Cela entraîne qu'ils sont supplémentaires l'un de l'autre, d'où le lemme. □

Démonstration. — Démontrons maintenant le théorème. Soit A un point de E et notons $B=f(A)$. D'après les deux premiers lemmes, la condition du théorème est satisfaite par $\overrightarrow{u}$ et $g=t_{-\overrightarrow{u}}\circ f$ si l'on a simultanément $\overrightarrow{u}\in\ker(\mathrm{Id}-\overrightarrow{f})$ et $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{u}\in\operatorname{Im}(\mathrm{Id}-\overrightarrow{f})$. Autrement dit, on doit pouvoir décomposer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sous la forme d'un vecteur de $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-\overrightarrow{f})$ et d'un vecteur de $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-\overrightarrow{f})$. Cela est possible, d'une unique manière, d'après le dernier lemme. □

Nous allons étudier en détail le cas du plan. Soit donc f une isométrie affine du plan complexe.

Premier cas : $\overrightarrow{f}$ est positive. Il existe donc $a\in\mathbf{U}$ et $b\in\mathbf{C}$ tels que f soit donnée par $f(z)=az+b$. Si $a\neq 1$, l'équation $f(z)=z$ a une unique solution $z=b/(1-a)$ et f a un unique point fixe. C'est une rotation de centre ce point et d'angle $\theta\in\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ tel que $a=\exp(\mathrm{i}\theta)$. Si $a=1$, f est une translation dont le vecteur a pour affixe b.





Second cas : $\overrightarrow{f}$ est négative. On a déjà dit qu'alors $\overrightarrow{f}$ est une symétrie orthogonale. Précisément, supposons que f soit donnée par $f(z)=a\overline{z}+b$. Si $a=\exp(\mathrm{i}\theta)$, avec $\theta\in\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, on constate que l'équation $z=a\overline{z}$ a pour solutions les nombres complexes de la forme $\lambda\exp(\mathrm{i}\theta/2)$, avec $\lambda\in\mathbf{R}$, et que l'équation $z=-a\overline{z}$ a pour solutions les nombres complexes de la forme $\mathrm{i}\lambda\exp(\mathrm{i}\theta/2)$, avec $\lambda\in\mathbf{R}$.

Il est alors commode de choisir comme base orthonormée du plan vectoriel le couple $(\exp(\mathrm{i}\theta/2),\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\theta/2))$. En termes d'affixes, cela revient à poser $z=\exp(\mathrm{i}\theta/2)u$. Alors, $f(z)=\exp(\mathrm{i}\theta/2)\varphi(u)=a\exp(-\mathrm{i}\theta/2)\overline{u}+b$, d'où

$$\varphi(u)=\overline{u}+b\exp(-\mathrm{i}\theta/2).$$

Posons $\beta=b\exp(-\mathrm{i}\theta/2)$.

Si $u=x+\mathrm{i}y$, les points fixes de φ sont donnés par $u-\overline{u}=\beta$; il y en a si et seulement si β est imaginaire pur, auquel cas f est une symétrie orthogonale. Si β n'est pas imaginaire pur, f est appelée une *symétrie glissée.*

Soit $u_0=\mathrm{i}\operatorname{Im}(\beta)/2=(\beta-\overline{\beta})/4$; on a $\overline{u_0}=-u_0$, d'où

$$\varphi(u_0+u)=\overline{u_0+u}+\beta=\overline{u}+(\beta-u_0)=\overline{u}+(\beta-2u_0)+u_0.$$

Cela montre que dans le repère cartésien $(u_0,((\exp(\mathrm{i}\theta/2),\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\theta/2)))$, l'expression de f est donnée par $(x,y)\mapsto(x+t,-y)$, où $t=\beta-2u_0\in\mathbf{R}$.

Exercices. — 1) Soit $f=t_{\overrightarrow{u}}\circ g$ la décomposition canonique d'une isométrie d'un espace affine euclidien E. Montrer que l'ensemble des points fixes de g est un sous-espace affine de E. Préciser sa direction ; montrer en particulier qu'elle est orthogonale à $\overrightarrow{u}$.

2) Soit E un espace affine euclidien et soit f une isométrie de E ; on note $f = t_{\vec{u}} \circ g$ sa décomposition canonique, où g est une isométrie de E possédant un point fixe O. On suppose que $\vec{u} \neq \vec{0}$. Soit H l'hyperplan affine de E passant par O de direction $(\vec{u})^{\perp}$. Soit $M \in E$, montrer qu'il existe $\lambda \in k$ et $\vec{v} \in H$ tel que $\overrightarrow{OM} = \lambda \vec{u} + \vec{v}$ et vérifier que $\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{u} + \vec{f}(\vec{v}) - \vec{v}$. En déduire la valeur minimale de $\left\|\overrightarrow{Mf(M)}\right\|$, lorsque M parcourt E.

C. Composition de réflexions

THÉORÈME 3.10. — *Toute isométrie d'un espace affine euclidien est produit de réflexions.*

Démonstration. — Soit E un espace euclidien, f une isométrie de E, F l'ensemble des points fixes de f. Il est ou vide (auquel cas on posera $\dim(F) = -1$ dans cette démonstration), ou un sous-espace affine de E. Démontrons ce résultat par récurrence descendante sur $p = \dim(F)$. Pour $p = n$, $f = \mathrm{id}_E$ est produit de zéro réflexion.

Supposons le résultat vrai si l'ensemble des points fixes de f est un sous-espace affine de dimension $> p$. Soit A un point de E tel que $f(A) \neq A$. Soit H l'hyperplan médiateur du bipoint $(A, f(A))$ et soit s_H la réflexion par rapport à H. Par définition, si $M \in E$, $s_H(M)$ est l'unique point de E tel que H soit perpendiculaire à $\overrightarrow{Ms_H(M)}$ et tel que le milieu de $(M, s_H(M))$ appartienne à H — autrement dit, que H est l'hyperplan médiateur de $(M, s_H(M))$. On a en particulier $s_H(A) = f(A)$ et $s_H(f(A)) = A$.

Posons alors $g = s_H \circ f$. C'est une isométrie de E et $g(A) = s_H(f(A)) = A$. De plus, si $M \in F$, on a $f(M) = M$, donc $\left\|\overrightarrow{f(A)M}\right\| = \left\|\overrightarrow{f(A)f(M)}\right\| = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|$, ce qui montre que $M \in H$. Alors, $g(M) = s_H(M) = M$ et M est fixé par g. Cela montre que l'ensemble des points fixes de g est un sous-espace afifne de E contenant strictement F. Par récurrence, g est produit de réflexions : $g = s_1 \circ \cdots \circ s_k$. Par suite, $f = s_H \circ g = s_H \circ s_1 \circ \cdots \circ s_k$ est composé de réflexions. □

Exercices. — 1) Soit f une isométrie d'un espace euclidien E. On suppose que f a un point fixe et que $\vec{f}$ est une symétrie. Montrer que f est une symétrie.
2) Soit E un espace affine euclidien et soit S une sphère de E. Si x est un point de S, montrer qu'il existe un unique hyperplan H tel que $S \cap H = \{x\}$. (Caractériser son vecteur normal.)
3) Soit E un espace affine euclidien. Soit V un sous-espace vectoriel de E et soit p la projection orthogonale sur V. Si $A \in E$, montrer que $p(A)$ est le point de V qui minimise la distance MA, pour $M \in V$.
4) Soit V_1 et V_2 des sous-espaces vectoriels d'un espace affine euclidien E ; notons s_1 et s_2 les symétries orthogonales par rapport à V_1 et V_2. À quelle condition la composée $s_1 \circ s_2$ est-elle une involution ?
5) Majorer simplement, en fonction de l'ensemble des points fixes d'une isométrie, le nombre minimal de réflexions dont c'est le produit.
6) Écrire explicitement une translation comme composée de deux réflexions.
7) Redémontrer le théorème 3.10 en utilisant le théorème de décomposition des isométries, le cas des translations et un argument de « vectorialisation ».

D. Isométries affines du plan et de l'espace

Soit E un espace affine euclidien et soit f une isométrie affine de $\mathscr{P}$. Soit $f = t_{\vec{u}} \circ g$ sa décomposition canonique, où g est une isométrie affine de $\mathscr{P}$ ayant un point fixe et $\vec{u}$ est un vecteur tel que $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$. Soit enfin $\mathrm{Fix}(f)$ l'ensemble des points fixes de f et $\mathrm{Fix}(\vec{f})$ l'ensemble des points fixes de $\vec{f}$. Si $\mathrm{Fix}(f)$ n'est pas vide, c'est un sous-espace affine de $\mathscr{P}$ de direction $\mathrm{Fix}(\vec{f})$. En outre, l'unicité de la décomposition canonique montre que l'on a $\vec{u} = \vec{0}$ si $\mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$.

Cas du plan. — Supposons que $\dim E = 2$: E est un plan.

- Si $\mathrm{Fix}(f) = E$, f est l'identité.
- Si $\mathrm{Fix}(f)$ est une droite, f est une réflexion.
- Si $\mathrm{Fix}(f)$ est un point A, f est une rotation de centre A et d'angle $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, $\theta \neq 0$.
- Si $\mathrm{Fix}(f) = \varnothing$, alors $\mathrm{Fix}(\vec{f}) \neq \{0\}$ si bien que $\vec{f}$ est ou l'identité, ou une réflexion vectorielle. Dans le premier cas, f est une translation et $g = \mathrm{id}_E$. Dans le second, g est une réflexion affine et f est une *symétrie glissée.*

Cas de l'espace. — Supposons maintenant que $\dim E = 3$: E est l'espace affine euclidien « usuel ». Nous allons déterminer la nature géométrique de f en distinguant selon celle de $\vec{f}$.

- Si $\mathrm{Fix}(\vec{f}) = \vec{E}$, $\vec{f} = \mathrm{id}_{\vec{E}}$ et f est une translation ;

– Supposons que $\mathrm{Fix}(\overrightarrow{f})$ soit un plan $\overrightarrow{P}$; soit $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ une base orthonormée de $\overrightarrow{P}$ et soit $\overrightarrow{e}_3$ un vecteur unitaire normal à P. La droite $\mathbf{R}\overrightarrow{e}_3$ est stable par $\overrightarrow{f}$, donc $\overrightarrow{e}_3$ est vecteur propre de $\overrightarrow{f}$, de valeur propre nécessairement égale à -1 car $\overrightarrow{e}_3 \notin \mathrm{Fix}(\overrightarrow{f})$. La matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ est égale à $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$. Autrement dit, $\overrightarrow{f}$ est une réflexion.

Soit A un point de E et soit $B = f(A)$. Notons (x_1, x_2, x_3) les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est caractérisé par les conditions $\overrightarrow{u} \in \mathrm{vect}(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ et $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{u}$ orthogonal à $\mathrm{vect}(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$. Ainsi, les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ sont égales à $(x_1, x_2, 0)$. Alors, f est une symétrie si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire $\mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$, et une symétrie glissée sinon $\mathrm{Fix}(f) = \varnothing$.

– Supposons que $\mathrm{Fix}(\overrightarrow{f})$ soit une droite, soit $\overrightarrow{e}_1$ un vecteur directeur de cette droite et complétons-le en une base orthonormée $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$. Le plan engendré par $(\overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ est stable par $\overrightarrow{f}$ car c'est l'orthogonale d'une droite stable. En outre, la restriction de $\overrightarrow{f}$ à ce plan n'a pas de vecteur fixe non nul. C'est donc une rotation d'angle non nul. Il existe finalement $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, $\theta \neq 0$ tel que la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans cette base soit

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Remarquons que l'on a $\det \overrightarrow{f} = 1$. On dit que $\overrightarrow{f}$ est une rotation.

Alors, $\overrightarrow{u}$ est parallèle à $\overrightarrow{e}_1$. On le détermine en choisissant $A \in E$, $B = f(A)$; si (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{u} = x_1\overrightarrow{e_1}$. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, on dit que f est une rotation (affine) d'axe la droite $D = \mathrm{Fix}(f)$. Sinon, on dit que f est un vissage.

L'angle θ et la trace de f sont reliés par la relation $1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr}(f)$. En revanche, sans orientations explicites de l'axe de la rotation et de l'espace, on ne peut pas différencier θ de $-\theta$.

– Supposons enfin que $\mathrm{Fix}(\overrightarrow{f}) = \{\overrightarrow{0}\}$. Dans ce cas, il existe une base orthonormée $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{f}$ est

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Comme $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Fix}(\overrightarrow{f})$, on a $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et f a un point fixe. On dit que c'est une *anti-rotation*.

CHAPITRE 3

LE PLAN ET L'ESPACE

§1. Angles

A. Angles géométriques

Soit E un espace vectoriel euclidien.

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs non nuls de E. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit alors

$$-1 \leqslant \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\| \overrightarrow{u} \| \, \| \overrightarrow{v} \|} \leqslant 1.$$

La fonction $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ est continue, strictement décroissante et vérifie $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$. Il résulte du théorème des valeurs intermédiaires qu'elle réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Il existe par conséquent un unique réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \| \overrightarrow{u} \| \, \| \overrightarrow{v} \| \cos\theta$.

DÉFINITION 1.1. — *Ce réel θ est appelé* mesure de l'angle géométrique *des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*

On le note $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$, mais cette notation n'est pas standard. Si E est l'espace vectoriel associé à un espace affine euclidien dont A, B, C sont trois points distincts, on notera $\widehat{BAC}$ l'angle géométrique $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.

On peut noter trois cas particuliers importants :

- on a $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont positivement liés (angle nul) ;
- on a $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \pi/2$ si et seulement si $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ (angle droit) ;
- enfin, on a $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \pi$ si et seulement si il existe $\lambda < 0$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{v}$ (angle plat).

PROPOSITION 1.2. — *Les isométries conservent les angles géométriques. Inversement, si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont quatre vecteurs unitaires tels que les angles géométriques $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$ et $[\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}]$ soient égaux, il existe une isométrie f de E tel que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u'}$ et $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v'}$.*

Démonstration. — Soit f une isométrie de E. Alors f préserve produit scalaire et norme : $\langle f(\overrightarrow{u}), f(\overrightarrow{v}) \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$, $\| f(\overrightarrow{u}) \| = \| \overrightarrow{u} \|$ et $\| f(\overrightarrow{v}) \| = \| \overrightarrow{v} \|$. Il résulte alors de la définition des angles géométriques que $[f(\overrightarrow{u}), f(\overrightarrow{v})] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$.

Démontrons maintenant la réciproque. L'hypothèse entraîne que l'on a les égalités

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u'} \rangle, \quad \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'} \rangle \quad \text{et} \quad \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v'}, \overrightarrow{v'} \rangle.$$

Supposons pour commencer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne soient pas colinéaires. Alors, $0 < [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] < \pi$, donc il en est de même de $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v'}$. Soient alors $(\overrightarrow{e_3}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ et $(\overrightarrow{e'_3}, \dots, \overrightarrow{e'_n})$ des bases orthonormées des supplémentaires orthogonaux des plans $\operatorname{vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $\operatorname{vect}(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$. Les égalités de produits scalaires que l'on a alors entraînent qu'il existe une unique isométrie f de E telle que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u'}$, $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v'}$ et $f(\overrightarrow{e_j}) = \overrightarrow{e'_j}$ pour $3 \leqslant j \leqslant n$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, soit f une isométrie de E telle que $f(\vec{u}) = \vec{u'}$. Si $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$, on a $\vec{v} = \vec{u}$, mais aussi $[\vec{u'}, \vec{v'}] = 0$ par hypothèse, donc $\vec{v'} = \vec{u'}$ et $f(\vec{v}) = \vec{v'}$. Si en revanche $[\vec{u}, \vec{v}] = [\vec{u'}, \vec{v'}] = \pi$, on a $\vec{v} = -\vec{u}$ et $\vec{v'} = -\vec{u'}$, donc $f(\vec{v}) = \vec{v'}$ car f est linéaire. □

Exercices. — 1) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires. Montrer qu'il existe une réflexion f qui échange $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2) Si $\dim E \geqslant 3$, montrer qu'il existe une isométrie positive qui échange $\vec{u}$ et $\vec{v}$. (Il n'y a donc pas de notion d'angle orienté en dimension $\geqslant 3$.
3) Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire. Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ tels que $[\vec{u}, \vec{v}] = \theta$, où $\theta \in [0, \pi]$ est fixé.

B. Angles orientés dans le plan orienté

Soit E un plan vectoriel euclidien orienté.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de E. Il existe une unique rotation de E qui applique $\vec{u}/\|\vec{u}\|$ sur $\vec{v}/\|\vec{v}\|$. Son angle est un nombre réel bien défini modulo un multiple entier de 2π, c'est-à-dire un élément du groupe quotient $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$.

Définition 1.4. — *On l'appelle* angle orienté *des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et on le note $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.*

La « rotation d'angle π » est l'homothétie de rapport -1. On a par suite les relations

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{u}}) = 0 \quad \text{et} \quad (\widehat{\vec{u}, -\vec{u}}) = \pi,$$

et, plus généralement,

$$(\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + \pi \quad \text{et} \quad (\widehat{-\vec{u}, -\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}).$$

Comme la composée de deux rotations est la rotation d'angle la somme de leurs angles, on a une *relation de Chasles pour les angles orientés* :

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}, \vec{w}}). \tag{1.5}$$

Remarque 1.6. — Posons $\vec{e} = \vec{u}/\|\vec{u}\|$ et complétons $\vec{e}$ en une base orthonormée directe $(\vec{e}, \vec{f})$. La matrice de la rotation r d'angle θ dans cette base est égale à $\left(\begin{smallmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right)$. Par suite $\langle \vec{e}, r(\vec{e})\rangle = \cos\theta$, d'où l'on déduit que

$$\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}).$$

En particulier, l'angle orienté détermine l'angle géométrique. Si θ est un représentant dans $[-\pi, \pi]$ de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, on a alors $[\vec{u}, \vec{v}] = |\theta|$.

Proposition 1.7. — *Les rotations préservent les angles orientés, les réflexions les changent en leurs opposés. Réciproquement, si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u'}$, $\vec{v'}$ sont des vecteurs unitaires tels que $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u'}, \vec{v'}})$, il existe une unique rotation r telle que $r(\vec{u}) = \vec{u'}$ et $r(\vec{v}) = \vec{v'}$, et une unique réflexion s telle que $s(\vec{u}) = \vec{v'}$ et $s(\vec{v}) = \vec{u'}$.*

Corollaire 1.8 (Propriété « du parallélogramme »). — *Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u'}$, $\vec{v'}$ quatre vecteurs non nuls. Les égalités*

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u'}, \vec{v'}}) \quad \textit{et} \quad (\widehat{\vec{u}, \vec{u'}}) = (\widehat{\vec{v}, \vec{v'}})$$

sont équivalentes.

C. Angle orienté de droites

La définition même de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ entraîne que si λ et μ sont des nombres réels *strictement positifs*, on a $(\widehat{\lambda\vec{u}, \mu\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$. Cela permet de définir la notion *d'angle orienté de demi-droites*. En revanche, si λ et μ ont des signes distincts, on a l'égalité $(\widehat{\lambda\vec{u}, \mu\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + \pi$. Il en résulte que la classe modulo π de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ne dépend que des droites $D = \mathbf{R}\vec{u}$ et $D' = \mathbf{R}\vec{v}$ engendrées par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

DÉFINITION 1.9. — *On l'appelle* angle orienté des droites *D et D' et on note $(\widehat{D, D'})$ la classe dans* $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$ *de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs arbitraires de D et D'.*

PROPOSITION 1.10. — *Soit D et D' deux droites affines du plan qui se coupent en un point O, soit s_D et $s_{D'}$ les symétries orthogonales par rapport à ces droites. La composée $s_{D'} \circ s_D$ est la rotation de centre O et d'angle $2(\widehat{D, D'})$.*

Remarquons que l'angle de droites $(\widehat{D, D'})$ est bien défini modulo π, donc son double est bien défini modulo 2π, de sorte que cette rotation est bien définie. D'autre part, cet énoncé s'étend en un énoncé sur la composée de deux symétries orthogonales affines par rapport à des droites concourantes.

Démonstration. — La composée des deux symétries orthogonales est une isométrie positive du plan affine dont O est un point fixe. C'est donc une rotation de centre O et il s'agit de calculer son angle. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur unitaire de D et $\vec{u'}$ un vecteur directeur unitaire de D'. Posons $\vec{v} = s_{D'} \circ s_D(\vec{u}) = s_{D'}(\vec{u})$, de sorte que $s_{D'} \circ s_D$ est la rotation d'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$. Or,

$$\begin{aligned}
(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) &= (\widehat{\vec{u}, \vec{u'}}) + (\widehat{\vec{u'}, \vec{v}}) \\
&= (\widehat{\vec{u}, \vec{u'}}) + (\widehat{s_{D'}(\vec{u'}), s_{D'}(\vec{u})}) \\
&= (\widehat{\vec{u}, \vec{u'}}) - (\widehat{\vec{u'}, \vec{u}}) \\
&= 2(\widehat{\vec{u}, \vec{u'}}).
\end{aligned}$$

D'autre part, $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) \equiv (\widehat{D, D'}) \pmod{\pi}$, donc

$$2(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) \equiv 2(\widehat{D, D'}) \pmod{2\pi},$$

ce qui conclut la démonstration. □

On peut aussi définir la notion *d'angle géométrique de droites*. Cela revient à identifier les angles $(\widehat{D, D'})$ et $(\widehat{D', D})$. Un tel angle possède une mesure bien définie $\theta \in [0, \pi/2]$ (celle du secteur « saillant » délimité par les droites D et D'). Si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont des vecteurs directeurs des droites D et D', les angles orientés $(\widehat{\vec{u}, \vec{u'}})$ possibles sont alors θ, $-\theta$, $\pi + \theta$ et $\pi - \theta$.

§2. Géométrie du triangle

INDEX