INTRODUCTION AUX GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE

Cours de master 2 à l'Université de Rennes 1 (2004–2005)

Antoine Chambert-Loir

Antoine Chambert-Loir
IRMAR, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex.
E-mail : antoine.chambert-loir@univ-rennes1.fr
Url : http://name.math.univ-rennes1.fr/antoine.chambert-loir

Version du 21 juin 2005

CONTENTS

CHAPTER 1

GROUPES DE LIE; THÉORÈME DE CARTAN

§1. Notion de variété différentielle

1.1. Atlas. — Il y a deux façons d'approcher la notion de variété. Dans le point de vue "*atlas*", on se donne un espace topologique M[1], un recouvrement ouvert (U_i) de M et, pour tout i, un homéomorphisme $\varphi_i\colon U_i \to \Omega_i$ où Ω_i est un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Les φ_i sont appelés *cartes locales* et les U_i ouverts de cartes. On impose en outre que pour tout couple (i,j), la composition

$$\varphi_{i,j}\colon \varphi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} U_i \cap U_j \xrightarrow{\varphi_j} \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

soit un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^\infty$. On peut demander seulement que ces difféomorphismes soient de classe $\mathscr{C}^k$, ou dans l'autre sens, exiger que ce soient des difféomorphismes analytiques réels (ce qu'on note parfois $\mathscr{C}^\omega$) ; cela définit la notion de variété de classe $\mathscr{C}^k$, ou de variété analytique réelle.

Sur une telle variété, le calcul différentiel ($\mathscr{C}^\infty$, $\mathscr{C}^k$, voire analytique) garde un sens. Si U est un ouvert de M, on dit en effet qu'une fonction $f\colon U \to \mathbf{R}$ est $\mathscr{C}^\infty$ si pour toute carte (U_i,φ_i), la fonction $f\circ\varphi_i^{-1}$ sur l'ouvert $\Omega_i \cap \varphi_i(U \cap U_i)$ de $\mathbf{R}^n$ soit de classe $\mathscr{C}^\infty$.

De la même façon, on peut définir la notion d'application $\mathscr{C}^\infty$ d'une variété dans une autre : les applications qu'on peut écrire dans des cartes sont $\mathscr{C}^\infty$. D'où aussi la notion d'isomorphisme (difféomorphisme) de variétés, etc.

1.2. Faisceaux. — Cela nous amène au point de vue "*faisceaux*" dans lequel une variété est la donnée d'un espace topologique M et, pour tout ouvert $U \subset M$, d'un ensemble de fonctions continues $\mathscr{C}^\infty(U)$, vérifiant les propriétés suivantes :

– soit U un ouvert de M et $f\colon U \to \mathbf{R}$; la fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ si et seulement si pour tout $x \in V$, il existe un voisinage U_x de x contenu dans U tel que $f|_{U_x}$ soit $\mathscr{C}^\infty$ sur U_x (*propriété de faisceau*);

– pour tout point $x \in M$, il existe un voisinage $U_x \subset M$ et un homéomorphisme $\varphi_x\colon U_x \to \Omega_x$, où Ω_x est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, de sorte que pour tout $U \subset U_x$ et toute fonction $f\colon U \to \mathbf{R}$, f appartient à $\mathscr{C}^\infty(U)$ si et seulement si $f\circ\varphi_x^{-1}$ appartient à $\mathscr{C}^\infty(\varphi_x(U))$.

Une application continue $\varphi\colon M \to N$ entre deux variétés est dite $\mathscr{C}^\infty$ si pour tout ouvert $V \in N$ et toute fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(V)$, la fonction $f\circ\varphi$ appartient à $\mathscr{C}^\infty(\varphi^{-1}(V))$.

Il est pratique de définir l'ensemble $\mathscr{C}^\infty_{M,x}$ des germes de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ en un point x d'une variété M. C'est un couple (U,f) où U est un voisinage ouvert de x et f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur U, modulo la relation d'équivalence : $(U,f) \sim (V,g)$ s'il existe un voisinage W de x contenu dans $U \cap V$ tel que $f|_W = g|_W$ ("f et g coïncident sur un voisinage de x").

---

[1] L'usage veut qu'on se restreigne aux espaces séparés — deux points distincts ont des voisinages ouverts disjoints — et paracompacts — tout recouvrement ouvert admet un raffinement localement fini.

1.3. Ces deux points de vue sont équivalents. Soit M une variété définie par un atlas. Le faisceau des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur M vérifie les axiomes ci-dessus : qu'une fonction soit $\mathscr{C}^\infty$ se vérifie dans un ouvert de carte, et dans un tel ouvert, identifié à un ouvert de $\mathbf{R}^n$, les fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sont exactement les fonctions $\mathscr{C}^\infty$ usuelles.

Inversement, soit M une variété définie par le point de vue faisceaux. On considère le recouvrement ouvert de M formé des voisinages U_x dans le deuxième alinéa définissant $\mathscr{C}^\infty_M$. Montrons que les (U_x, φ_x) forment un atlas. Il suffit de vérifier que l'homéomorphisme $\psi_{x,y} = \varphi_x \circ \varphi_y^{-1}$, de l'ouvert $V_y = \varphi_y(U_x \cap U_y)$ de Ω_y sur l'ouvert $V_x = \varphi_x(U_x \cap U_y)$ de Ω_x, est un difféomorphisme. Par hypothèse, les fonctions $y_1, \dots, y_n$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur V_y, donc les fonctions $y_j \circ \varphi_y$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $U_x \cap U_y$. Par suite, les fonctions $\psi^*_{x,y}(y_j) = y_j \circ \psi_{x,y}$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur V_x. D'après le lemme ci-dessous, cela montre que les composantes de $\psi_{x,y}$ sont des fonctions $\mathscr{C}^\infty$. De même, les composantes de $\varphi_y \circ \varphi_x^{-1}$ sont des fonctions $\mathscr{C}^\infty$. Il en résulte que $\varphi_y \circ \varphi_x^{-1}$ est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme.

LEMME 1.4. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, V un ouvert de $\mathbf{R}^m$ et $f : U \to V$ une application. On écrit $f = (f_1, \dots, f_m)$, où les f_j sont des fonctions de U dans $\mathbf{R}$. On a les propriétés équivalentes, où $k \in \{0, 1, \dots, \infty, \omega\}$.*

a) *l'application f est de classe $\mathscr{C}^k$;*
b) *les fonctions f_j sont de classe $\mathscr{C}^k$;*
c) *pour toute fonction $\varphi : V \to \mathbf{R}$, $\varphi \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^k$.*

La démonstration est laissée en exercice.

1.5. Sous-variétés. — Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et soit X une partie de Ω. S'il existe $n-p$ fonctions $f_1, \dots, f_{n-p} \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ telles que

a) X est le lieu où $f_1, \dots, f_{n-p}$ s'annulent ;
b) en tout point x de X, la matrice des dérivées partielles $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ est de rang $n-p$,

on dit alors que X est une *sous-variété* de dimension p. Plus généralement, on dit que X est une sous-variété de dimension p si tout point x de Ω possède un voisinage U tel que $X \cap U$ soit une sous-variété de dimension p de U au sens précédent. Une sous-variété est automatiquement fermée; le fait d'être une sous-variété est stable par difféomorphisme de l'espace ambient.

On dit alors qu'une partie N d'une variété M est une sous-variété si pour toute carte (U, φ), $\varphi(N \cap U)$ est une sous-variété de $\varphi(U)$.

Si N est une sous-variété d'une variété M, N est munie de manière naturelle d'une structure de variété : on peut ou bien définir des coordonnées locales, et donc des cartes, via le théorème d'inversion locale, ou bien définir le faisceau des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur N en posant qu'une fonction f définie sur un ouvert U de N est $\mathscr{C}^\infty$ si elle est, localement sur cet ouvert, la restriction d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ définie sur un voisinage de U dans M.

1.6. Produits. — Si M et N sont deux variétés de dimensions m et n, leur produit $M \times N$ est muni d'une structure naturelle de variété, dont la dimension est $m+n$. Si (U_i, φ_i) est un atlas de M et (V_j, ψ_j) est un atlas de N, la famille $(U_i \times V_j, (\varphi_i, \psi_j))$ est un atlas de $M \times N$.

1.7. Variétés analytiques réelles ou complexes. — Soit M une variété qui est définie à l'aide de cartes (U_i, φ_i) telles que les Ω_i soient des ouverts de $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$) et telles que les difféomorphismes $\varphi_{i,j}$ soient des applications analytiques (c'est-à-dire développable en série entière au voisinage de tout point). On peut alors définir sur M le faisceau $\mathscr{O}_M$ des fonctions analytiques : une fonction f sur un ouvert de M à valeurs réelles (resp. complexes) sera dite analytique si pour tout i, la fonction $f \circ \varphi_i^{-1}$ sur $\varphi_i(U_i \cap M)$ l'est. Alors, le couple $(M, \mathscr{O}_M)$ est localement isomorphe au couple formé d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$) et du faisceau des fonctions analytiques sur cet ouvert. On dit que c'est une variété analytique réelle (resp. complexe) de dimension n. Inversement, donnons-nous un tel couple. Cela permet de définir la notion d'application analytique vers un ouvert de $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$) et donc de carte analytique, d'où une description en termes d'atlas.

Soit M une variété analytique réelle de dimension n. Comme les fonctions analytiques sont $\mathscr{C}^\infty$, on peut définir le faisceau $\mathscr{C}^\infty_M$ des fonctions qui dans une (ou dans toute) carte, s'expriment par une fonction $\mathscr{C}^\infty$. Le couple $(M,\mathscr{C}^\infty_M)$ est alors localement isomorphe au couple formé d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et du faisceau des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur cet ouvert, ce qui munit M d'une structure de variété différentielle réelle de dimension n.

Soit M une variété analytique complexe de dimension n. Comme les fonctions analytiques complexes sont analytiques réelles, on peut définir le faisceau $\mathscr{C}^\omega_M$ des fonctions qui dans une (ou dans toute) carte, s'expriment par une fonction analytique réelle. Le couple $(M,\mathscr{C}^\omega_M)$ est alors une variété analytique réelle de dimension $2n$. On peut aussi considérer le faisceau des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur M; le couple $(M,\mathscr{C}^\infty_M)$ est une variété différentielle réelle de dimension $2n$.

§2. Fibré tangent

On se limite pour l'instant au cas des variétés différentielles réelles. Les modification à apporter dans le cas des variétés analytiques complexes sont indiquées à la fin de ce paragraphe.

2.1. Vecteurs tangents. — Il y a plusieurs façons équivalentes de définir un vecteur tangent en un point x d'une variété M.

La plus abstraite : c'est une *dérivation en x*, c'est-à-dire une application $\mathbf{R}$-linéaire $X\colon \mathscr{C}^\infty_{M,x} \to \mathbf{R}$ telle que $X(fg) = f(x)X(g) + g(x)X(f)$.

On peut aussi définir un vecteur tangent comme une classe d'équivalence de germe de courbe $\gamma\colon I \to M$, où I est un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ et γ une application $\mathscr{C}^\infty$ telle que $\gamma(0) = x$. La relation d'équivalence est la suivante : $(I,\gamma) \sim (J,\theta)$ si pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^\infty_{M,x}$, on a $(f\circ\gamma)'(0) = (f\circ\theta)'(0)$. Cela équivaut aussi à dire que pour une carte $\varphi\colon U \to \Omega$ contenant x, $(\varphi\circ\gamma)'(0) = (\varphi\circ\theta)'(0)$ (et cela est alors vrai pour toute carte...).

La dernière, à la fois bizarre et commode: un vecteur tangent en un point ξ de $\mathbf{R}^n$ est un vecteur de $\mathbf{R}^n$ ("posé en x", si cela avait un sens); un vecteur tangent en point x de M est la donnée, pour toute carte (U,φ) d'un vecteur X_φ en $\varphi(x)$ tel que l'on ait, si (U,φ) et (V,ψ) sont deux cartes contenant x,

$$X_\varphi = (\varphi\circ\psi^{-1})'(x)(X_\psi) \quad \text{où} \quad (\varphi\circ\psi^{-1})\colon \psi(U\cap V) \to \varphi(V\cap U).$$

Il suffit ainsi de se donner un vecteur tangent dans une carte pour en déduire sa valeur dans les autres.

Esquissons la démonstration de l'équivalence de ces notions. On peut supposer que M est un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Si (I,γ) est un germe de courbe en x, on définit une dérivation en x par la formule $f \mapsto (f\circ\gamma)'(0)$. Le vecteur tangent en un point de $\mathbf{R}^n$ de coordonnées $(a_1,\dots,a_n)$ correspond à la dérivation $a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n\frac{\partial}{\partial x_n}$. Inversement, soit D une dérivation en x sur $\mathbf{R}^n$. Si f est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de x,

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 f'(x+t(y-x))(y-x)\,dt = f(x) + \sum_{j=1}^n g_j(y)(y_j - x_j),$$

avec $g_j(y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+t(y-x))\,dt$. Les fonctions g_j sont $\mathscr{C}^\infty$ et l'on a $g_j(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$. Par suite,

$$D(f) = 0 + \sum_{j=1}^n \big(D(g_j)(y_j-x_j)|_{y=x} + g_j(x)D(y_j-x_j)\big) = \sum_{j=1}^n D(y_j)\frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Par suite, toute dérivation est associée à un vecteur tangent. Enfin, il est facile, dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$, de prolonger un vecteur tangent en un germe de courbe définissant la même dérivation (prendre une ligne droite !); pour une variété, on fait de même en choisissant une carte.

2.2. On note T_xM l'ensemble des vecteurs tangents en un point x d'une variété M. C'est un espace vectoriel de dimension $\dim M$; on l'appelle *espace tangent de M en x*.

Un morphisme de variétés $f\colon M \to N$ possède, en tout point $x \in M$, une différentielle $T_xf\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ définie par la formule

$$T_xf(X)(\varphi) = X(\varphi\circ f),$$

si φ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur N dans un voisinage de $f(x)$ et X une dérivation en x. Si X est la classe d'un germe de courbe (I,γ), $T_x f(X)$ est la classe du germe $(I, f\circ\gamma)$. Dans des cartes (U,φ) de M et (V,ψ) de N, f induit une fonction $\mathscr{C}^\infty$, $F=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\varphi(U)\to\psi(V)$ et l'on a $F'(\varphi(x))(X_\varphi)=Y_\psi$, si X_φ est l'expression du vecteur tangent X dans la carte (U,φ) et Y_ψ est l'expression du vecteur tangent $Y=T_x f(X)$ dans la carte (V,ψ).

Si $f\colon M\to N$ et $g\colon N\to P$ sont des morphismes de variétés, leur composée $g\circ f$ l'est et l'on a

$$T_x(g\circ f)=T_{f(x)}(g)\circ T_x(f)\colon T_xM\to T_{g(f(x))}P.$$

2.3. Immersions, submersions. — Soit $f\colon N\to M$ un morphisme de variétés. On dit que f est une immersion (resp. une submersion) si $T_x f$ est injective (resp. surjective) en tout point x de N.

Soit M une variété. Si N est une sous-variété de M, l'injection canonique i de N dans M est une immersion. Soit (f_j) une famille de fonctions définissant N dans M; l'espace tangent à N en un point x s'identifie alors à l'intersection des noyaux des différentielles $T_x f_j\colon T_xM\to\mathbf{R}$.

Un couple (N,i) formé d'une variété N et d'une immersion injective $i\colon N\to M$ est appelé *sous-variété immergée* de M. On prendra garde que son image n'est pas nécessairement une sous-variété de M (à moins que i ne soit propre).

Soit M une variété et soit $f\colon N\to M$ une submersion. Il résulte du théorème des fonctions implicites que pour tout point y de M, l'image réciproque $f^{-1}(y)$ est une sous-variété de N.

2.4. Champs de vecteurs. — Un *champ de vecteurs* (disons de classe $\mathscr{C}^\infty$, mais la définition générale est analogue) sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ n'est rien d'autre qu'une application $\mathscr{C}^\infty$ de U dans $\mathbf{R}^n$. Soit M une variété. Un champ de vecteurs sur un ouvert U de M est la donnée, en tout point $x\in U$, d'un vecteur tangent X_x en x, de sorte que pour toute carte (V,φ), l'application $x\mapsto(T_x\varphi)^{-1}(X_{\varphi(x)})$ de V dans $\mathbf{R}^n$ soit un champ de vecteurs $\mathscr{C}^\infty$ sur V.

Un tel champ de vecteurs X définit par la formule $X(f)=(x\mapsto X_x(f)$ un endomorphisme $\mathbf{R}$-linéaire X de $\mathscr{C}^\infty(U)$ dans lui-même qui vérifie la relation $X(fg)=gX(f)+fX(g)$. Inversement une telle application définit un unique champ de vecteurs.

Soit $f\colon M\to N$ un difféomorphisme. La différentielle de f s'étend alors en une application notée Tf ou f_* des champs de vecteurs sur M vers les champs de vecteurs sur N, par la formule $f_*(X)(f(x))=(T_xf)(X)$, où X est un champ de vecteurs sur M et $x\in M$. On a $(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$, si $g\colon N\to P$ est un second difféomorphisme de variétés.

Soit $f\colon M\to N$ un *difféomorphisme local*, c'est-à-dire que tout point $x\in M$ possède un voisinage ouvert V_x tel que $f|_{U_x}$ soit un difféomorphisme de U_x sur $V_x=f(U_x)$. Pour tout champ de vecteurs X sur N, on peut alors définir un champ, noté $f^*(X)$, dont la restriction à l'ouvert U_x est le champ $((f|_{U_x})^{-1})_*(X|_{V_x})$. Si $g\colon N\to P$ est un second difféomorphisme local, la composition $g\circ f$ est un difféomorphisme local et l'on a $(g\circ f)^*=f^*\circ g^*$.

Si f est un difféomorphisme, les applications f^* et f_* sont inverses l'une de l'autre.

2.5. Crochet de Lie. — Soit X et Y deux champs de vecteurs sur un ouvert U d'une variété M. Soit $[X,Y]\colon f\mapsto X(Y(f))-Y(X(f))$ l'endomorphisme $X\circ Y-Y\circ X$ de $\mathscr{C}^\infty(U)$. C'est encore un champ de vecteurs. En effet, si f et g sont deux fonctions $\mathscr{C}^\infty$, on a

$$\begin{aligned}
[X,Y](fg) &= X(Y(fg))-Y(X(fg)) = X(fY(g)+gY(f))-Y(fX(g)+gX(f))\\
&= \big(X(f)Y(g)+fX(Y(g))+X(g)Y(f)+gX(Y(f))\big)\\
&\qquad -\big(Y(f)X(g)+fY(X(g))+Y(g)X(f)+gY(X(f))\big)\\
&= f\big(X(Y(g))-Y(X(g))\big)+g\big(X(Y(f))-Y(X(f))\big)\\
&= f[X,Y](g)+g[X,Y](f),
\end{aligned}$$

si bien que $[X,Y]$ est un champ de vecteurs sur U. On l'appelle le *crochet de Lie* des champs X et Y.

Si $f\colon M\to N$ est un difféomorphisme de variétés, on a $f_*([X,Y])=[f_*(X),f_*(Y)]$. Si $f\colon N\to M$ est un difféomorphisme local, on a $f^*([X,Y])=[f^*(X),f^*(Y)]$.

On a aussi l'identité de Jacobi: si X, Y et Z sont des champs de vecteurs sur une variété M,

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.$$

Voilà le premier exemple d'algèbre de Lie, certes pas le plus simple, car de dimension infinie.

DÉFINITION. — *On appelle algèbre de Lie la donnée d'un espace vectoriel V et d'une application bilinéaire $V\times V\to V$ notée $(X,Y)\mapsto[X,Y]$, appelée* crochet, *telle que:*

– *pour tout $X\in V$, $[X,X]=0$ (le crochet est alterné);*
– *pour tous X, Y, Z dans V, $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$ (identité de Jacobi).*

Notons qu'il résulte de la propriété d'alternance que $[X,Y]=-[Y,X]$ pour tous X et Y dans V.

2.6. Soit $f\colon M\to N$ un morphisme de variétés. Soit X un champ de vecteurs sur M et soit Y un champ de vecteurs sur N. Nous dirons que les champs X et Y sont f-associés si pour tout $x\in M$, on a $T_xf(X_x)=Y_{f(x)}$. Cela équivaut à ce que pour toute fonction $\varphi\in\mathscr{C}^\infty(N)$, on ait l'égalité $X(\varphi\circ f)=Y(\varphi)\circ f$, comme le montrent les relations, où $x\in X$,

$$X(\varphi\circ f)(x)=X_x(\varphi\circ f)=(T_xf)(X_x)(\varphi)\overset{(*)}{=}Y_{f(x)}(\varphi)=Y(\varphi)(f(x))$$

dans lesquelles l'égalité $(*)$ est la définition même pour X et Y d'être f-associés.

Si X est un champ de vecteurs sur M, il n'existe pas nécessairement de champ Y sur N tel que X et Y soient f-associés; s'il en existe, il n'est pas forcément unique. Si f est un difféomorphisme, le champ $f_*(X)$ est l'unique champ de vecteurs sur N qui soit f-associé à X; si f est un difféomorphisme local, le champ de vecteurs $f^*(Y)$ est l'unique champ sur X qui soit f-associé à Y.

PROPOSITION 2.7. — *Soit $f\colon M\to N$ un morphisme de variétés différentielles, soit X_1 et X_2 des champs de vecteurs sur M; soit Y_1 et Y_2 des champs de vecteurs sur N. Supposons que X_1 et Y_1 d'une part, et X_2 et Y_2 d'autre part soient f-associés. Alors:*

a) *pour tout couple de nombres réels (λ_1,λ_2), les champs de vecteurs $\lambda_1X_1+\lambda_2X_2$ et $\lambda_1Y_1+\lambda_2Y_2$ sont f-associés.*

b) *les champs de vecteurs $[X_1,X_2]$ et $[Y_1,Y_2]$ sont f-associés.*

La relation pour deux champs de vecteurs d'être f-associés est ainsi compatible aux structures d'algèbres de Lie des espaces de champs de vecteurs sur M et N.

Proof. — La première partie est évidente; démontrons la seconde. Soit $\varphi\in\mathscr{C}^\infty(N)$. On a

$$\begin{aligned}[X_1,X_2](\varphi\circ f)&=X_1(X_2(\varphi\circ f))-X_2(X_1(\varphi\circ f))\\&=X_1(Y_2(\varphi)\circ f)-X_2(Y_1(\varphi)\circ f)\qquad\text{car } X_i \text{ et } Y_i \text{ sont } f\text{-associés}\\&=Y_1(Y_2(\varphi))\circ f-Y_2(Y_1(\varphi))\circ f\\&=[Y_1,Y_2](\varphi)\circ f,\end{aligned}$$

ce qui montre que $[X_1,X_2]$ et $[Y_1,Y_2]$ sont f-associés. □

2.8. Flots. — Soit M une variété différentielle et soit X un champ de vecteurs sur M. Intégrer le champ de vecteurs X à partir de la condition initiale $x_0\in M$, c'est chercher une courbe paramétrée $\gamma\colon I\to M$ telle que $\gamma(0)=x_0$ et $\gamma'(t)=X(\gamma(t))$ pour tout $t\in I$. En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz dans des cartes, on voit qu'il existe une unique solution maximale (I,γ), définie sur un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$. On dit que γ est une courbe intégrale du champ de vecteurs X. Si M est compacte (plus généralement, si le champ X est à support compact), on a $I=\mathbf{R}$: la solution est définie pour tout temps.

Le *flot* du champ de vecteurs X est l'application Φ_X qui, à $(t,x)\in\mathbf{R}\times M$ associe, si elle existe, la valeur en t de l'unique courbe intégrale maximale de X qui vaut x au temps 0. Il est défini sur un voisinage $\mathscr{D}(X)$ de $\{0\}\times M$ dans $\mathbf{R}\times M$ et l'application $\mathscr{D}(X)\times M$ est $\mathscr{C}^\infty$, comme le montre le théorème sur la dépendance des solutions d'équations différentielles en la solution initiale. Supposons que Φ_X soit défini en (t,x). Alors Φ_X est défini en $(t+u,x)$ si et seulement si il est défini en $(u,\Phi_X(t,x))$ et l'on a alors

$$\Phi_X(t+u,x) = \Phi_X(u,\Phi_X(t,x)).$$

En particulier, si M est compacte, on a $\mathscr{D}(X) = \mathbf{R}\times M$ et l'équation précédente vaut pour tous réels t, u et tout $x\in M$.

Le théorème sur les solutions d'équations différentielles dépendant d'un paramètre entraîne aussi que si X_s est un champ de vecteurs dépendant de manière $\mathscr{C}^\infty$ d'un paramètre $s\in S$ (S est une variété), la solution maximale γ_s dépend de s de manière $\mathscr{C}^\infty$. Si M est compacte, il en résultera par exemple une fonction $\gamma\colon S\times\mathbf{R}\times X\to X$ telle que $\gamma(s,\cdot)$ soit pour tout $s\in S$ une courbe intégrale du champ de vecteurs X_s.

De même, les flots Φ_{X_s} s'organisent en une application $\mathscr{C}^\infty$ d'un voisinage de $\{0\}\times M\times S$ dans $\mathbf{R}\times M\times S$ dans M. Si M est compacte, cette application est définie sur $\mathbf{R}\times M\times S$.

2.9. Soit $f\colon M\to N$ un morphisme de variétés différentielles, soit X un champ de vecteurs sur M et Y un champ de vecteurs sur N. Notons Φ_t^X et Φ_t^Y leurs flots. On suppose que X et Y sont f-associés. Si $x\in M$, l'application $\gamma\colon t\mapsto\Phi_t^X(x)$ est solution de l'équation différentielle $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$, avec $\gamma(0) = x$. Par suite, l'application $f\circ\gamma$ vérifie

$$(f\circ\gamma)'(t) = T_{\gamma(t)}f(\gamma'(t)) = T_{\gamma(t)}f(X(\gamma(t)) = Y(f(\gamma(t)),$$

puisque les champs X et Y sont f-asociés. Comme $f\circ\gamma(0) = f(x)$, l'unicité de la solution d'une équation différentielle entraîne que $f(\gamma(t)) = \Phi_t^Y(f(x))$, d'où la relation

$$f\circ\Phi_t^X = \Phi_t^Y\circ f.$$

Si f est un difféomorphisme local, on a $X = f^*(Y)$ et cette formule se récrit

$$\Phi_t^{f^*Y} = f^{-1}\circ\Phi_t^Y\circ f.$$

2.10. Soit X et Y deux champs de vecteurs sur une variété M. Notons Φ_t^X le flot associé à X; au voisinage de tout point de M, Φ_t^X est défini pour $|t|$ assez petit et est un difféomorphisme local. Par suite, le champ de vecteur $(\Phi_t^X)^*Y$ est bien défini, localement sur M et pour $|t|$ assez petit. Nous allons montrer que

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t^X)^*Y|_{t=0} = [X,Y]. \tag{2.11}$$

(Le premier membre est appelé *dérivée de Lie* du champ Y par rapport au champ X.)

Posons en effet, pour $(s,t)\in\mathbf{R}^2$ et $f\in\mathscr{C}^\infty(M)$,

$$\alpha(s,t) = Y(f\circ\Phi_s^X)\circ\Phi_t^X.$$

On a $\alpha(0,t) = Y(f)\circ\Phi_t^X$, d'où

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha(0,0) = X(Y(f)).$$

On a aussi $\alpha(s,0) = Y(f\circ\Phi_s^X)$, d'où

$$\frac{\partial}{\partial s}\alpha(0,0) = Y(X(f)).$$

Finalement, au voisinage de 0,

$$\alpha(-t,t) = \alpha(0,0) - t\frac{\partial}{\partial s}\alpha(0,0) + t\frac{\partial}{\partial t}\alpha(0,0) + \mathrm{O}(t^2) = Y(f) + t[X,Y](f) + \mathrm{O}(t^2).$$

Comme

$$\alpha(-t,t) = Y(f\circ\Phi_{-t}^X)\circ\Phi_t^X = ((\Phi_t^X)^*)(f),$$

cela montre que

$$\frac{d}{dt}((\Phi_t^X)^*)(f)|_{t=0} = [X,Y](f),$$

d'où la relation (2.11).

2.12. Supposons que les champs X et Y commutent, c'est-à-dire que l'on ait $[X,Y]=0$. Posons $Y_t = (\Phi_t^X)^* Y$. On a $Y_{t+s} = (\Phi_s^X)^* Y$, d'où l'équation différentielle $\frac{d}{dt} Y_t = [X, Y_t]$. Puisque $[X,Y]=0$, cette équation admet les champs $t \mapsto Y_t$ et $t \mapsto Y$ pour solution, donc $Y = (\Phi_t^X)^* Y$. Comme le flot associé à $(\Phi_t^X)^* Y$ est égal à $s \mapsto (\Phi_t^X)^{-1} \circ \Phi_s^Y \circ \Phi_t^Y$. Autrement dit,

$$\Phi_t^X \circ \Phi_s^Y = \Phi_s^Y \circ \Phi_t^X \ :$$

les flots de deux champs de vecteurs qui commutent commutent.

2.13. Cas des variétés analytiques complexes. —

Exercices. — 1) Montrer que l'application naturelle de $\mathscr{C}^\infty(M)$ dans $\mathscr{C}^\infty_{M,x}$ est un homomorphisme surjectif de **R**-algèbres.
2) Les vecteurs tangents en $x \in M$ s'identifient aussi aux dérivations *locales* de $\mathscr{C}^\infty(M)$ (qui ne dépendent que de la valeur de la fonction au voisinage de x).
3) Soit $\mathfrak{m}_x$ l'idéal de $\mathscr{C}^\infty(M)$ formé des fonctions nulles en x. Écrire un isomorphisme de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ sur le dual de $T_x M$.
4) Dans la question précédente, si l'on remplace $\mathscr{C}^\infty$ par $\mathscr{C}^0$ (resp. par $\mathscr{C}^k$, avec $k \in \mathbf{N}^*$), on obtient un espace vectoriel nul (resp. de dimension infinie).
5) Calculer explicitement le crochet de deux champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^n$.
6) Démontrer la prop. 2.7 par un calcul explicite lorsque $f\colon \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$ est l'application donnée par $f(x_1,\dots,x_p) = (x_1,\dots,x_p,0,\dots,0)$.

§3. Groupes de Lie “généraux”

DÉFINITION 3.1. — *On appelle* groupe de Lie *un groupe topologique G muni d'une structure de variété telle que la multiplication $G \times G \to G$ et l'inverse $G \to G$ soient des applications $\mathscr{C}^\infty$.*

Un homomorphisme de groupes de Lie $f\colon G \to H$ une application $\mathscr{C}^\infty$ qui est un morphisme de groupes.

Exemples 3.2. — a) Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^{n^2}$: complémentaire du lieu où le déterminant s'annule. Le produit de deux éléments est donné par des polynômes; la formule usuelle avec la comatrice montre que l'inverse d'un élément est donné par une fraction rationnelle dont le dénominateur (le déterminant) ne s'annule pas. Cela montre que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un groupe de Lie.
b) La multiplication des nombres complexes de module 1 fait du cercle unité un groupe de Lie.
c) Un théorème important, dû à von Neumann et Cartan, affirme qu'un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie est une sous-variété et donc un groupe de Lie. Il entraîne sans effort que tous les groupes classiques (groupe orthogonal, symplectique, etc.) sont des groupes de Lie. Voir au § 4.

La “formule de Campbell–Hausdorff” permet de montrer qu'un groupe de Lie est canoniquement muni d'une structure de variété analytique (réelle) pour laquelle multiplication et passage à l'inverse sont des applications analytiques.

Il y a aussi une notion de *groupe de Lie complexe*, dont la définition est obtenue à partir de la définition ci-dessus en remplaçant le mot *variété* par le mot *variété analytique complexe* et la condition $\mathscr{C}^\infty$ par *analytique complexe*. Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ en est l'exemple le plus immédiat.

Tout élément g d'un groupe de Lie G définit deux applications de translation (à droite, à gauche) dans G, ρ_g et λ_g, par les formules $\rho_g(x) = xg$ et $\lambda_g(x) = gx$.

3.3. Quelques remarques concernant la topologie des groupes de Lie. Dans toute variété différentielle, les singletons sont des ensembles fermés. La diagonale Δ de $G \times G$ est l'image réciproque de l'élément neutre par l'application $(x,y) \mapsto xy^{-1}$, c'est donc une partie fermée ce qui montre qu'un groupe de Lie est un espace topologique séparé.

Montrer ensuite l'existence d'une métrique et d'une partition de l'unité.

3.4. Un champ de vecteurs X sur un groupe de Lie G est dit *invariant à droite* si $(\rho_g)_*(X) = X$ pour tout $g \in G$. Il est dit invariant à gauche si $(\lambda_g)_*(X) = X$. Si X est un champ de vecteurs et si D_X désigne la dérivation associée, le champ X est invariant à gauche si et seulement si, pour toute fonction f,

$$D_X f(g) = D_{X(e)}(h \mapsto f(gh)).$$

Ainsi, un champ de vecteur invariant est déterminé par sa valeur en l'origine e de G. Inversement, si X est un vecteur tangent en e, la formule $X(g) = (\lambda_g)_*(X)$ définit un vecteur tangent en tout $g \in G$ et l'application $g \mapsto X(g)$ est $\mathscr{C}^\infty$, ainsi qu'on le voit dans des cartes. Le champ de vecteurs obtenu est invariant à gauche et vérifie $X(e) = X$; on le notera parfois L_X. Autrement dit, l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche est un espace vectoriel de dimension $\dim G$, canoniquement isomorphe à l'espace tangent de G en l'orgine. Un raisonnement analogue vaut pour les champs de vecteurs invariants à droite.

Pour tout $g \in G$, $(\lambda_g)_*[X,Y] = [(\lambda_g)_*X, (\lambda_g)_*Y]$. Cela montre que le crochet de deux champs de vecteurs invariants à gauche est invariant à gauche et munit T_eG d'une structure d'algèbre de Lie. On l'appelle *l'algèbre de Lie* de G ; on la note $\mathrm{Lie}(G)$ ou $\mathfrak{g}$.

De même, le crochet de deux champs de vecteurs invariants à droite est invariant à droite. Notons $\nu \colon G \to G$ l'application $g \mapsto g^{-1}$. Sa différentielle en l'origine est $X \mapsto -X$ (*exercice!*) Si X est un champ de vecteurs invariant à droite, $\nu_*(X)$ est un champ de vecteurs invariant à gauche. La formule $\nu_*([X,Y]) = [\nu_*(X), \nu_*(Y)]$ montre que l'application ν_* définit un isomorphisme de la structure d'algèbre de Lie sur T_eG qu'on déduit du crochet des champs de vecteurs invariants à droite sur celle fournie par le crochet des champs de vecteurs invariants à gauche.

3.5. Soit $f \colon G \to H$ un morphisme de groupes de Lie. Soit $X \in \mathrm{Lie}(G)$ et soit Y l'unique champ de vecteurs invariant à gauche sur H dont la valeur en l'élément neutre est $T_e(f)(X_e)$. Cela définit une application de $\mathrm{Lie}(G)$ dans $\mathrm{Lie}(H)$, notée $\mathrm{Lie}(f)$. Pour tout $g \in G$, on a $f \circ \lambda_g = \lambda_{f(g)} \circ f$, si bien que pour champ de vecteurs invariant à gauche X sur G et tout $g \in G$,

$$(T_g f)(X_g) = f_*((\lambda_g)_*)(X_e) = (\lambda_{f(g)})_*(f_*(X_e)) = (\mathrm{Lie}(f)(X))_{f(g)},$$

ce qui montre que les champs X et Y sont f-associés. D'après la proposition 2.7, *l'application* $\mathrm{Lie}(f)$ *est un morphisme d'algèbres de Lie.*

3.6. Sous-groupes à un paramètre. — Un sous-groupe à un paramètre dans un groupe de Lie G est un homomorphisme de groupes de Lie $f \colon \mathbf{R} \to G$, autrement dit une application $\mathscr{C}^\infty$ f de $\mathbf{R}$ dans G telle que $f(s+t) = f(s)f(t)$ pour tout couple (s,t) de nombres réels. Si f est un tel sous-groupe à un paramètre, $f'(0)$ est un élément de $\mathfrak{g}$ (penser à la définition de T_eG en termes de courbes). En outre, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f'(t)$ est un vecteur tangent à G en $f(t)$. Comme $f(t+u) = f(t)f(u) = \lambda_{f(t)}(f(u))$ dans G, on a $f'(t) = (\lambda_{f(t)})_*(f'(0))$. (On a aussi $f'(t)) = (\rho_{f(t)})_*(f'(0))$.

Inversement, si v est un vecteur tangent en e, montrons qu'il existe un unique sous-groupe à un paramètre f tel que $f'(0) = v$. Pour cela, prolongeons v en un champ de vecteurs invariant à gauche X_v. La formule ci-dessus montre que f est nécessairement la courbe intégrale de X_v passant par e. Considérons donc une telle courbe intégrale, définie sur un intervalle ouvert maximal I contenant 0.

Fixons $u \in I$ et considérons la courbe F définie par

$$t \mapsto f(u)^{-1} f(u+t) = \lambda_{f(u)^{-1}}(f(u+t)),$$

pour $|t|$ assez petit. Sa dérivée en t est

$$\begin{aligned}(\lambda_{f(u)^{-1}})_*(f'(u+t)) &= (\lambda_{f(u)^{-1}})_* X_v(u+t) = (\lambda_{f(u)^{-1}})_*(\lambda_{f(u+t)})_*(v) \\ &= (\lambda_{F(t)})_*(v) = X_v(F(t)).\end{aligned}$$

C'est donc une courbe intégrale du champ X_v. Par unicité, $F = f$ et $f(u+t) = f(u)f(t)$ pour $|t|$ assez petit. Cela entraîne que l'on peut prolonger f à tout $\mathbf{R}$, donc que l'intervalle I est $\mathbf{R}$. Cette formule est alors vraie pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $u \in \mathbf{R}$, si bien que f est un sous-groupe à un paramètre. Notons $\exp(v) = f(1)$; on a en fait $\exp(tv) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

3.7. Soit $F\colon G\to H$ un morphisme de groupes de Lie. Pour tout sous-groupe à un paramètre $f\colon \mathbf{R}\to G$ de dérivée à l'origine X, $F\circ f$ est un sous-groupe à un paramètre dont la dérivée en l'origine est $\operatorname{Lie}(F)(X)$. On a donc $\exp_H\circ\operatorname{Lie}(F) = F\circ\exp_G$ (foncteurialité de l'exponentielle).

3.8. Lorsque v varie, il résulte du théorème sur les équations différentielles dépendant d'un paramètre que *l'aplication exponentielle* $\exp\colon \mathfrak{g}\to G$ définie par $v\mapsto \exp(v)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Par construction, sa dérivée à l'origine est l'identité.

Il en résulte le théorème:

THÉORÈME. — *Soit* $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_m$ *des sous-espaces vectoriels de* $\mathfrak{g}$ *dont* $\mathfrak{g}$ *soit la somme directe. L'application* $(X_1,\dots,X_m)\mapsto \exp(X_1)\dots\exp(X_m)$ *de* $\bigoplus\mathfrak{a}_i$ *dans* G *est un difféomorphisme d'un voisinage de* 0 *dans* $\mathfrak{g}$ *sur un voisinage de* e *dans* G.

Proof. — La différentielle en l'origine de la multiplication $G\times G\to G$ est l'addition $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$. En composant les différentielles, on voit donc que la différentielle en l'origine de l'application de l'énoncé est l'application de $\prod\mathfrak{a}_i$ sur $\mathfrak{g}$ donnée par $(X_1,\dots,X_m)\mapsto X_1+\dots+X_m$. C'est un isomorphisme et le théorème d'inversion locale permet de conclure. □

Cela s'applique en particulier à l'exponentielle elle-même, de $\mathfrak{g}$ dans G.

LEMME 3.9 (Formule de Taylor). — *Soit* $X\in\mathfrak{g}$ *et notons* D_X *le champ de vecteurs invariant à gauche associé à* X. *Pour toute fonction* $f\in\mathscr{C}^\infty(G)$ *et tout entier* $n\geqslant 0$, *on a alors le développement limité*

$$f(\exp X) = f(e) + D_X f(e) + \dots + \frac{1}{n!}D_X^n f(e) + \mathrm{O}(\|X\|^{n+1}),$$

pour une norme arbitraire $\|\cdot\|$ *sur* $\mathfrak{g}$. *En particulier, on a*

$$f(\exp(tX)) = f(e) + tD_X f(e) + \dots + \frac{1}{n!}t^n D_X^n f(e) + \mathrm{O}(t^{n+1}).$$

Proof. — Par définition d'une dérivation invariante à gauche, on a, pour $f\in\mathscr{C}^\infty(G)$, $D_X f(g) = \frac{d}{dt}f(g\exp(tX))|_{t=0}$. Continuons:

$$D_X^2 f(g) = \frac{d}{dt}(D_X f)(g\exp(tX))_{t=0} = \frac{d}{dt}\frac{d}{du}f(g\exp(tX)\exp(ux))_{t=u=0}$$

et, par récurrence,

$$\begin{aligned} D_X^n f(g) &= \frac{d}{dt_1}\dots\frac{d}{dt_n}f(g\exp(t_1X)\dots\exp(t_nX))_{t_1=\dots=t_n=0} \\ &= \frac{d}{dt_1}\dots\frac{d}{dt_n}f(g\exp((t_1+\dots+t_n)X))_{t_1=\dots=0}. \end{aligned}$$

Considérons une fonction φ, définie et $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$, et posons $\Phi(t_1,\dots,t_n)=\varphi(t_1+\dots+t_n)$. On a

$$\frac{d}{dt_1}\dots\frac{d}{dt_n}\Phi(t_1,\dots,t_n)|_0 = \frac{d}{dt_1}\dots\frac{d}{dt_{n-1}}\varphi'(t_1+\dots+t_{n-1})|_0 = \dots = \varphi^{(n)}(0).$$

Il résulte de cette remarque que

$$D_X^n f(g) == \frac{d^n}{ds^n}f(g\exp(sX))_{s=0}.$$

D'après la formule de Taylor pour les fonctions réelles d'une variable réelles, on a alors

$$f(\exp(tX)) = f(e) + tD_X f(e) + \frac{1}{2}t^2 D_X^2 f(e) + \dots + \frac{1}{n!}t^n D_X^n f(e) + \mathrm{O}(t^{n+1}).$$

Cela montre le cas particulier. Pour en déduire la première formule, remarquons que la formule de Taylor pour la fonction $f\circ\exp\colon\mathfrak{g}\to\mathbf{R}$ s'écrit

$$f(\exp(X)) = f(e) + P_1(X) + \dots + \frac{1}{n!}P_n(X) + \mathrm{O}(\|X\|^{n+1}),$$

où P_m désigne la différentielle m-ième de $f\circ\exp$ en l'origine; c'est un polynôme homogène de degré m sur $\mathfrak{g}$. En substituant X à tX à ce développement limité et en comparant avec le cas particulier déjà démontré, on en déduit que $t^m D_X^m f(e) = P_m(tX) = t^m P_m(X)$. Le lemme en résulte. □

PROPOSITION 3.10. — *Soit G un groupe de Lie, notons $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Si $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $t\in\mathbf{R}$, on a*

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp\big(t(X+Y) + \frac{1}{2}t^2[X,Y] + \mathrm{O}(t^3)\big) \tag{3.10a}$$

$$\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX) = \exp\big(tY + t^2[X,Y] + \mathrm{O}(t^3)\big) \tag{3.10b}$$

$$\exp(-tX)\exp(-tY)\exp(tX)\exp(tY) = \exp\big(t^2[X,Y] + \mathrm{O}(t^3)\big) \tag{3.10c}$$

Proof. — Notons D_X et D_Y les dérivations invariantes à gauche sur $\mathscr{C}^\infty(G)$ associées à X et Y. On a remarqué dans la démonstration du lemme précédent que $D_X^n f(g) = \frac{d^n}{dt^n} f(g\exp(tX))|_{t=0}$ pour tout $g\in G$ et tout $n\geqslant 0$. Par conséquent,

$$D_X^n D_Y^m f(e) = \frac{d^n}{dt^n}\big(D_Y^m f(\exp(tX))\big)|_{t=0} = \frac{d^n}{dt^n}\frac{d^m}{ds^m} f(\exp(tX)\exp(tY)\big)|_{t=s=0}.$$

Autrement dit, on a le développement limité

$$f(\exp(tX)\exp(tY)) = \\ f(e) + t(D_X f(e) + D_Y f(e)) + \frac{1}{2}t^2(D_X^2 f(e) + 2D_XD_Y f(e) + D_Y^2 f(e)) + \mathrm{O}(t^3)).$$

Comme l'exponentielle réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ sur un voisinage de e dans G, on peut écrire, pour t assez petit,

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp(Z(t)) = \exp(tZ_1 + t^2 Z_2 + \mathrm{O}(t^3)).$$

D'après la formule de Taylor, on a donc

$$\begin{aligned} f(\exp(tX)\exp(tY)) &= f(\exp(tZ_1 + t^2Z_2 + \mathrm{O}(t^3))) \\ &= f(e) + tD_{Z_1}f(e) + t^2 D_{Z_2} f(e) + \frac{1}{2}t^2 D_{Z_1}^2 f(e) + \mathrm{O}(t^3), \end{aligned}$$

d'où, en comparant ces expressions, $D_{Z_1} = D_X + D_Y$ et

$$\frac{1}{2}(D_X^2 + 2D_XD_Y + D_Y^2) = D_{Z_2} + \frac{1}{2}D_{Z_1}^2 = D_{Z_2} + \frac{1}{2}(D_X+D_Y)^2.$$

Finalement, on obtient

$$D_{Z_2} = \frac{1}{2}(D_XD_Y - D_YD_X) = \frac{1}{2}[X,Y].$$

Cela démontre la première relation, et même le dévelopement limité

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp\big((X+Y) + \frac{1}{2}[X,Y] + \mathrm{O}(\|X\| + \|Y\|)^3\big).$$

Les deux autres relations s'en déduisent facilement. □

3.11. Si $g\in G$, l'application $c_g\colon G\to G$ qui, à $x\in G$, associe gxg^{-1} est différentiable en l'origine. Notons $\mathrm{Ad}(g)$ sa différentielle en l'origine ; c'est un automorphisme de $\mathfrak{g}$. Comme c_g est un homomorphisme de groupes, on a, par fonctorialité de l'exponentielle,

$$c_g(\exp(X)) = \exp(\mathrm{Ad}(g)(X)).$$

On a, de plus, $c_g\circ c_h(x) = c_g(hxh^{-1} = (gh)x(gh)^{-1} = c_{gh}(x)$, d'où $\mathrm{Ad}(g)\circ\mathrm{Ad}(h) = \mathrm{Ad}(gh)$: l'application Ad de G dans $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est un morphisme de groupes. Elle est en outre (évidemment ?) différentiable. On l'appelle la *représentation adjointe* de G. Sa différentielle en l'origine est un homomorphisme d'algèbres de Lie $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g}\to\mathrm{End}(\mathfrak{g})$. Par fonctorialité de l'exponentielle, on a

$$\mathrm{Ad}(\exp(X)) = \exp(\mathrm{ad}(X)),\quad X\in\mathfrak{g}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\exp_G(X)\exp_G(Y)\exp_G(-X) &= \exp_G(\mathrm{Ad}(\exp_G(X))(Y))\\ &= \exp_G\big(\exp_{\mathrm{GL}(\mathfrak{g})}(\mathrm{ad}(X))(Y)\big)\\ &= \exp_G\big(Y+\mathrm{ad}(X)(Y)+\frac{1}{2!}\mathrm{ad}(X)^2(Y)+\dots\big).\end{aligned}$$

En particulier, lorsque t tend vers 0,

$$\exp_G(tX)\exp_G(tY)\exp_G(-tX) = \exp_G(tY+t^2\,\mathrm{ad}(X)(Y)+\mathrm{O}(t^3)).$$

En comparant avec la formule (3.10b), on en déduit la relation

$$\boxed{\mathrm{ad}(X)(Y)=[X,Y].}$$

Exercices. — 1) Un champ de vecteurs sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ s'identifie à une fonction de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$; écrire les conditions d'invariance à droite et à gauche.

2) Montrer que l'exponentielle de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est l'application exponentielle usuelle de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

3) Montrer que le crochet de Lie sur $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ est donné par $(A,B)\mapsto AB-BA$.

4) Dans le cas $G=\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, donner ainsi une démonstration directe de la prop. 3.10.

5) Déterminer les images des applications exponentielle

$$\mathrm{M}_n(\mathbf{C})\to\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \quad\text{et}\quad \mathrm{M}_n(\mathbf{R})\to\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}).$$

6) Soit G un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit X et $Y\in\mathfrak{g}$ tels que $[X,Y]=0$. Montrer que $\exp(X)$ et $\exp(Y)$ commutent.

7) Inversement, montrer qu'il existe un voisinage U de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que si X et Y sont des éléments de U tels que $\exp(X)$ et $\exp(Y)$ commutent, on a $[X,Y]=0$. (*Soit U une boule ouverte de centre* 0 *dans* $\mathfrak{g}$ *telle que l'exponentielle réalise un difféomorphisme de U sur son image* $\exp(U)$. *Si X et $Y\in U$ sont tels que* $\exp(X)$ *et* $\exp(Y)$ *commutent, montrer que* $Y=\mathrm{Ad}(\exp(X))(Y)$, *puis que* $\exp(X)$ *et* $\exp(tY)$ *commutent pour* $|t|\leqslant 1$.)

8) Montrer que tout morphisme de groupes continu $\mathbf{R}\to G$ est de la forme $t\mapsto\exp(tX)$.

§4. Sous-groupes fermés d'un groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie et soit H un sous-groupe *fermé* de G. Le but de ce paragraphe est de démontrer que H est un sous-groupe de Lie de G.

4.1. Notons $\mathfrak{h}$ l'ensemble des $X\in\mathfrak{g}$ tels qu'il existe une suite (g_k) d'éléments de H, une suite (ε_k) de réels non nuls tendant vers 0 telles que

$$g_k=\exp(\varepsilon_k A+\mathrm{o}(\varepsilon_k)).$$

LEMME 4.2. — a) *Les conditions suivantes sur $X\in\mathfrak{g}$ sont équivalentes:*

(i) *on a $X\in\mathfrak{h}$;*

(ii) *il existe une suite (t_k) de réels non nuls tendant vers* 0 *tels que* $\exp(t_kA)\in H$ *pour tout k;*

(iii) *on a* $\exp(tX)\in H$ *pour tout $X\in\mathbf{R}$.*

b) *La partie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.*

Proof. — *a*) Le seul point non trivial est que (i) entraîne (iii). Considérons donc des suites (g_k) et (ε_k). Comme $g_k\to e$, on peut écrire $g_k=\exp(X_k)$ pour k assez grand, où (X_k) est une suite d'éléments de $\mathfrak{g}$ qui tend vers 0. On a alors $X_k=_e ps_kX+\mathrm{o}(\varepsilon_k)$. Soit t un réel et choisissons une suite d'entiers (m_k) telle que $(\varepsilon_k m_k)$ converge vers t. Alors, m_kX_k converge vers tX et $g_k^{m_k}=\exp(m_kX_k)$ tend vers $\exp(tX)$. Comme $g_k\in H$, $g_k^{m_k}\in H$ pour tout k; puisque H est fermé dans G, $\exp(tX)\in H$.

b) Comme $\exp(tX)\exp(tY)=\exp(t(X+Y)+\mathrm{o}(t))$, $\mathfrak{h}$ est stable par addition. Il est évidemment stable par multiplication par un scalaire, donc est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$.

En outre, $\exp(-tX)\exp(-tY)\exp(tX)\exp(tY)=\exp(t^2[X,Y]+\mathrm{o}(t^2))$, ce qui montre que $[X,Y]\in\mathfrak{h}$ si X et Y appartiennent à $\mathfrak{h}$. □

Il résulte du lemme que la restriction à $\mathfrak{h}$ de l'exponentielle est une application de $\mathfrak{h}$ dans H. Soit V un supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. L'application de $\mathfrak{h} \times V$ dans G qui à (X, Y) associe $\exp(X)\exp(Y)$ est un difféomorphisme d'un voisinage U de 0 dans $\mathfrak{h} \times V$ sur un voisinage de e dans G.

L'image de $U \cap \mathfrak{h}$ est alors une sous-variété de G au voisinage de e. Montrons que, quitte à diminuer U, cette image est l'intersection de H avec un voisinage de e dans G.

LEMME 4.3. — *Il existe un voisinage Ω de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que pour $X \in \Omega$, $\exp(X) \in H$ si et seulement si $X \in \mathfrak{h}$.*

Proof. — Si ce n'est pas vrai, il existe une suite (X_k) d'éléments de $\mathfrak{g}$ tendant vers 0, telle que $\exp(X_k)$ appartienne à H mais $X_k \not\in \mathfrak{h}$. On peut écrire $\exp(X_k) = \exp(A_k)\exp(B_k)$ avec $A_k \in \mathfrak{h}$ et $B_k \in V$, avec $A_k \to 0$ et $B_k \to 0$. Par hypothèse, $B_k \neq 0$. De plus, $h_k = \exp(-A_k)\exp(X_k) = \exp(B_k)$ appartient à H. Munissons $\mathfrak{g}$ d'une norme et posons $\varepsilon_k = \|B_k\|$. La suite (B_k/ε_k) est une suite d'éléments de norme 1 dans V; quitte à remplacer la suite (g_k) par une sous-suite, on peut donc supposer qu'elle converge vers un élément $B \in V$ de norme 1. Alors, $B_k = \varepsilon_k(B_k/\varepsilon_k) = \varepsilon_k B + o(\varepsilon_k)$ et $\exp(B_k) \in H$. Cela montre que $B \in \mathfrak{h}$ et contredit l'hypothèse que V est un supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. □

Cela montre que H est une sous-variété de G au voisinage de e. Si h est un point de H, $H = hH$ est alors une sous-variété de $G = hG$ au voisinage de $h = he$. La multiplication $H \times H \to H$ et le passage à l'inverse $H \to H$ sont les restrictions de la multiplication et de l'inverse de G; ce sont donc des applications $\mathscr{C}^\infty$.

Nous avons ainsi démontré le théorème, démontré par J. von Neumann (1927, 1929) lorsque $G = \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, et par Élie Cartan en général:

THÉORÈME 4.4 (Cartan). — *Tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie en est une sous-variété et est canoniquement muni d'une structure de groupe de Lie.*

Remarque. — Supposons que G soit un groupe de Lie analytique réel (resp. complexe). L'application exponentielle étant analytique, la version analytique du théorème d'inversion locale, entraîne qu'un sous-groupe fermé de G est une sous-variété analytique réelle. De même, si G est un groupe de Lie analytique complexe, un sous-groupe fermé H de G dont l'espace tangent $\mathfrak{h}$ à l'origine est un sous-espace vectoriel complexe de $\mathfrak{g}$ est une sous-variété analytique complexe et un sous-groupe de Lie complexe de G.

PROPOSITION 4.5. — *Soit G un groupe de Lie et soit H un sous-groupe fermé de G; notons $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ leurs algèbres de Lie. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. La restriction à $\mathfrak{h}$ de l'application exponentielle de G est l'application exponentielle de H.*

PROPOSITION 4.6. — *Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie G. Le sous-groupe de G engendré par l'image de $\exp_G$ est la composante connexe de l'élément neutre dans G. En particulier, si G est connexe, $\exp_G(\mathfrak{g})$ engendre G.*

Proof. — Comme l'exponentielle est continue, $\exp(\mathfrak{g})$ est une partie connexe de G; elle contient en outre un voisinage de l'identité dans G. Par suite, le sous-groupe G_0 engendré par $\exp(\mathfrak{g})$ est connexe et ouvert dans G. Il est nécessairement fermé dans G, car son complémentaire est ouvert puisqu'on peut l'écrire comme une réunion de classes à droite sous G_0 et que ces classes sont ouvertes. Le groupe G_0 est ainsi le plus grand sous-groupe ouvert connexe de G; c'est aussi la composante connexe de l'élément neutre e dans G. En particulier, si G est connexe, on a $G_0 = G$. □

Voici une conséquence immédiate, mais importante, de cette proposition :

PROPOSITION 4.7. — *Soit G un groupe de Lie. Si deux sous-groupes fermés connexes de G ont même algèbre de Lie, ils sont égaux.*

Exercices. — 1) Dans un groupe topologique, la composante connexe de l'identité est un sous-groupe fermé et distingué.

2) Soit G et H des groupes de Lie. On suppose que H est *discret* et que c'est un sous-groupe *distingué* de G. Montrer que H est contenu dans le *centre* de G, c'est-à-dire que $gh = hg$ pour tout $g \in G$ et tout $h \in H$.
3) Soit G un groupe de Lie connexe. Montrer que G est engendré par tout voisinage de l'identité dans G.
4) Soit G un groupe de Lie. Montrer qu'il existe un voisinage U de e dans G tel que U ne contienne aucun sous-groupe distinct de $\{e\}$.
5) Soit G un groupe de Lie connexe commutatif. Montrer que $[A,B] = 0$ pour A et B dans $\mathfrak{g}$. En déduire que l'exponentielle $\exp_G$ est un morphisme de groupes, qu'elle est surjective et que son noyau est un sous-groupe discret de $\mathfrak{g}$. En déduire que $G \simeq \mathbf{R}^a \times (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^b$ pour deux entiers a et b.
6) Soit G un groupe de Lie. Pour A et B dans $\mathfrak{g}$, montrer que $[A,B] = 0$ si et seulement si $\exp(tA)\exp(sB) = \exp(sB)\exp(tA)$ pour t, $s \in \mathbf{R}$. Le centre Z de G est un sous-groupe de Lie de G. Si G est connexe, l'algèbre de Lie de Z est l'ensemble des $A \in \mathfrak{g}$ telles que $[A,B] = 0$. pour tout $B \in \mathfrak{g}$. Ce résultat est-il nécessairement valable si G n'est pas connexe?

§5. Exemples classiques

5.1. Groupe spécial linéaire. — Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est de dimension n^2. De même, le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est de dimension $2n^2$ si on le regarde comme groupe de Lie réel, et de dimension n^2 si on le considère comme groupe de Lie complexe.

Le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est le noyau du déterminant, $\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^*$, qui est un morphisme de groupes continu. Il est donc fermé. Son algèbre de Lie $_n(\mathbf{R})$ est formée des matrices A telles que $\det(\exp(tA)) = 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Comme $\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr} A)$, il en résulte que $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices de trace nulle. Ainsi, $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est de dimension $n^2 - 1$.

Le résultat analogue vaut pour le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$, dont l'algèbre de Lie est l'ensemble des matrices complexes de trace nulle. Comme son algèbre de Lie est un sous-$\mathbf{C}$-espace vectoriel de $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$ est un sous-groupe de Lie complexe et sa dimension complexe est $n^2 - 1$; sa dimension comme sous-groupe de Lie réel est le double.

5.2. Groupe orthogonal. — Le groupe O_n est l'ensemble des matrices $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telles que ${}^{\mathrm{t}}g \cdot g = \mathrm{I}_n$, ou encore ${}^{\mathrm{t}}g = g^{-1}$ Il est fermé. Son algèbre de Lie est constituée des matrices A telles que ${}^{\mathrm{t}}\exp(tA) = \exp(-tA)$ pour tout réel t. Comme ${}^{\mathrm{t}}\exp(A) = \exp({}^{\mathrm{t}}A)$, un développement limité au voisinage de $t = 0$ montre qu'on a alors ${}^{\mathrm{t}}A = -A$. Inversement, cette condition implique évidemment que $\exp(tA) \in \mathrm{O}_n$ pour tout t. Autrement dit, $\mathfrak{o}_n$ est l'ensemble des matrices antisymétriques. Cela entraîne que O_n est de dimension $n(n-1)/2$.

Le groupe orthogonal admet comme sous-groupe SO_n, formé des matrices orthogonales de déterminant égal à 1, soit

$$\mathrm{SO}_n = \mathrm{O}_n \cap \mathrm{SL}_n(\mathbf{R}).$$

Il est encore fermé. Comme toute matrice antisymétrique est automatiquement de trace nulle, l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_n$ de SO_n est égale à celle de O_n, voilà pourquoi celle de O_n était en général notée $\mathfrak{so}_n$.

Le groupe SO_2 est isomorphe au groupe des nombres complexes de module 1 dans $\mathbf{C}$, donc au groupe $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

Le groupe SO_n *est connexe.* Cela résulte par exemple de ce que toute matrice orthogonale est semblable à une matrice diagonale par blocs, dont les blocs sont ou bien des matrices orthogonales 2×2, de la forme $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$, ou bien des ± 1. Pour une matrice orthogonale de déterminant 1, le nombre de -1 est pair; on les regroupe deux par deux, en les écrivant sous la forme d'une matrice de rotation d'angle π. Il est alors facile d'écrire un chemin dans SO_n qui rejoint toute matrice à l'identité.

Plus généralement, si q est une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$, le groupe orthogonal de q, noté $\mathrm{O}(q)$ est le groupe des matrices $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telles que $q(gx) = q(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et $\mathrm{SO}(q)$ est son sous-groupe formé des matrices de déterminant 1. Un cas particulièrement intéressant en physique est celui de la forme quadratique de Lorentz sur $\mathbf{R}^4$

$$q(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2,$$

de signature $(3,1)$. (c est la vitesse de la lumière.)

5.3. Groupe unitaire. — C'est l'ensemble U_n des matrices $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telles que $g^* g = \mathrm{I}_n$, où $g^* = {}^{\mathrm{t}}\bar{g}$. Son algèbre de lie $\mathfrak{u}_n$ est formée des matrices A (dites antihermitiennes) telles que $A + A^* = 0$. Ce n'est pas un groupe de Lie complexe. Sa dimension comme groupe de Lie réel est égale à n^2.

Son sous-groupe SU_n, intersection avec $\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$, a pour algèbre de Lie l'ensemble $\mathfrak{su}_n$ des matrices antihermitiennes de trace nulle. Par suite, SU_n est un groupe de Lie réel de dimension n^2-1 (la condition sur la trace ne rajoute qu'une équation linéaire sur $\mathbf{R}$ car la diagonale d'une matrice antihermitienne est imaginaire pure).

5.4. Groupe symplectique. — Soit maintenant une forme bilinéaire *alternée* b sur $\mathbf{C}^n$ et intéressons-nous aux automorphismes g de $\mathbf{C}^n$ telles que $b(gx, gy) = b(x,y)$ pour x, $y \in \mathbf{C}^n$. Si l'on exige que b soit *inversible*, c'est-à-dire que $b(x,y) = 0$ pour tout y implique $x = 0$, alors n est pair et, notant $m = n/2$, $\mathbf{C}^n$ admet une base $(e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_m)$ telle que $b(e_i, e_j) = 0$, $b(f_i, f_j) = 0$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant m$, $b(e_i, f_j) = 0$ si $i \neq j$, et $b(e_i, f_i) = 1$. Dans cette base, la matrice de b est égale à la matrice par blocs

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_m \\ -\mathrm{I}_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Le *groupe symplectique* $\mathrm{Sp}_n(\mathbf{C})$ l'ensemble des matrices $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telles que ${}^{\mathrm{t}}gJg = J$. C'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, donc un sous-groupe de Lie. Comme

$${}^{\mathrm{t}}(\exp(tA))J\exp(tA) = J + t({}^{\mathrm{t}}AJ + JA) + \mathrm{o}(t),$$

son algèbre de Lie $\mathfrak{sp}_n(\mathbf{C})$ est contenue dans l'ensemble des matrices A telles que ${}^{\mathrm{t}}AJ + JA = 0$; réciproquement, une telle matrice A vérifie

$${}^{\mathrm{t}}(\exp(tA))J = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} {}^{\mathrm{t}}A^n J = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (-1)^n J A^n = J\exp(-tA),$$

donc appartient à $\mathfrak{sp}_n(\mathbf{C})$. On voit aussi que $\mathfrak{sp}_n(\mathbf{C})$ est une sous-algèbre de Lie complexe, donc $\mathrm{Sp}_n(\mathbf{C})$ est un sous-groupe de Lie complexe.

Si l'on écrit la matrice A par blocs $\left(\begin{smallmatrix} X & Z \\ Y & T \end{smallmatrix}\right)$, la condition ${}^{\mathrm{t}}AJ + JA = 0$ devient

$$\begin{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}X & {}^{\mathrm{t}}Y \\ {}^{\mathrm{t}}Z & {}^{\mathrm{t}}T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_m \\ -\mathrm{I}_m & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_m \\ -\mathrm{I}_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Z \\ Y & T \end{pmatrix},$$

soit encore

$$\begin{pmatrix} -{}^{\mathrm{t}}Y & {}^{\mathrm{t}}X \\ -{}^{\mathrm{t}}T & {}^{\mathrm{t}}Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y & T \\ -X & -Z \end{pmatrix},$$

si bien que $\mathfrak{sp}_n(\mathbf{C})$ est l'ensemble des matrices par blocs de la forme $\left(\begin{smallmatrix} X & Z \\ Y & -{}^{\mathrm{t}}X \end{smallmatrix}\right)$ où Y et Z sont symétriques. Par suite, $\mathrm{Sp}_n(\mathbf{C})$ est de dimension complexe $2\frac{1}{2}m(m+1) + m^2 = 2m^2 + m = m(2m+1)$. De même, $\mathrm{Sp}_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de Lie réel, de dimension moitié.

5.5. Nombres complexes et quaternions. — Le corps des nombres complexes agit sur lui-même par translation, ce qui permet de l'identifier à une sous-algèbre de $\mathrm{M}_2(\mathbf{R})$. Précisément, l'application qui, à $x + iy \in \mathbf{C}$, associe la matrice $\left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right)$ est un homomorphisme de $\mathbf{R}$-algèbres, injectif.

Plus généralement, on peut identifier $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ à un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbf{R})$, en associant à la matrice inversible $X + iY$ la matrice par blocs $\left(\begin{smallmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{smallmatrix}\right)$.

Le corps (non commutatif) $\mathbf{H}$ des quaternions est une algèbre de dimension 4 sur $\mathbf{R}$, de base $\{1, i, j, k\}$, avec les relations $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = -ji = k$. Si $a = x + yi + zj + tk \in \mathbf{H}$, notons $\bar{a} = x - yi - zj - tk$; l'application $a \mapsto \bar{a}$ est un antiautomorphisme de $\mathbf{H}$ ($\mathbf{R}$-linéaire, et $\overline{ab} = \bar{b}\,\bar{a}$). De plus, $a\bar{a} = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ (norme de a) est non nul si $a \neq 0$, ce qui montre que $\mathbf{H}$ est un corps.

L'action de **H** par multiplication à gauche sur lui-même permet de le considérer comme une sous-algèbre de $M_4(\mathbf{R})$, l'élément a ci-dessus étant identifié à la matrice

$$\begin{pmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{pmatrix}.$$

On peut aussi écrire un quaternion sous la forme

$$a = x + yi + zj + tk = (x + yi) + (z - ti)j = u + vj.$$

Grâce à l'identification de **C** avec certaines matrices 2×2, cela permet d'identifier **H** à la sous-algèbre de $M_2(\mathbf{C})$ formée des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, on peut ainsi considérer le groupe $GL_n(\mathbf{H})$ comme un sous-groupe de $GL_{2n}(\mathbf{C})$, ou de $GL_{4n}(\mathbf{R})$. On peut aussi considérer le groupe unitaire d'une forme hermitienne sur le corps des quaternions.

5.6. Groupes unipotents. — Soit N l'ensemble des matrices de $GL_n(\mathbf{C})$ qui sont triangulaires supérieures, avec des 1 sur la diagonale. C'est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbf{C})$. Son algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ est formée des matrices triangulaires supérieures n'ayant que des 0 sur la diagonale, donc nilpotentes.

On a une définition analogue en remplaçant **C** par **R**. Pour $n = 2$, N est l'ensemble des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. C'est un sous-groupe isomorphe à **R**.

5.7. Produits de groupes. — Le groupe $GL_n(\mathbf{C}) \times GL_m(\mathbf{C})$ peut-être considéré naturellement comme un sous-groupe fermé de $GL_{n+m}(\mathbf{C})$, celui des matrices diagonales par blocs, le premier bloc étant de taille n et le second de taille m. Si G et H sont des sous-groupes fermés dans $GL_n(\mathbf{C})$ et $GL_m(\mathbf{C})$ respectivement, $G \times H$ est ainsi naturellement un sous-groupe fermé de $GL_{n+m}(\mathbf{C})$. Son algèbre de Lie s'identifie à la somme directe $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ vue comme sous-algèbre de Lie de $M_n(\mathbf{C}) \oplus M_m(\mathbf{C}) \subset M_{n+m}(\mathbf{C})$.

Exercice. — Montrer que l'application exponentielle est surjective pour SO_n, SU_n et U_n.

§6. Homomorphismes continus de groupes de Lie

Il s'agit de prouver qu'un homomorphisme continu $f : G \to H$ entre deux groupes de Lie est nécessairement $\mathscr{C}^\infty$. La démonstration repose sur le cas particulier où le groupe G est **R**.

PROPOSITION 6.1. — *Soit G un groupe de Lie et soit $f : \mathbf{R} \to G$ un morphisme de groupes. Si f est continu, il existe $X \in \mathfrak{g}$ tel que $f(t) = \exp(tX)$ pour tout t. En particulier, f est différentiable.*

Proof. — Soit U une boule ouverte de centre 0 dans $\mathfrak{g}$ telle que l'exponentielle réalise un difféomorphisme de U sur son image. Comme f est continu et $f(0) = e$, il existe un réel $r > 0$ tel que $f(t) \in \exp(U)$ pour $|t| < r$, donc une fonction continue $t \mapsto X(t)$ de $]-r, r[$ dans $\mathfrak{g}$ telle que $f(t) = \exp(X(t))$. Quitte à diminuer r, on peut supposer que $2X(t)$ appartient à U pour $|t| < r$.

Si $|t| < r/2$, on a alors $\exp(X(2t)) = f(2t) = f(t)^2 = \exp(2X(t))$, si bien que $X(2t) = 2X(t)$, car $X(2t)$ et $2X(t)$ appartiennent à U. Le même argument montre que $X(kt) = kX(t)$ pour tout entier $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ tel que que $|t| < r/k$ et $kX(t) \in U$.

Par récurrence, on a alors $X(2^{-n}t) = 2^{-n}X(t)$ si $|t| < r$, puis $X(k2^{-n}t) = k2^{-n}X(t)$ si $|t| < r$ et $|k| \leqslant 2^n$. Comme les nombres rationnels de la forme $k/2^n$ sont denses dans $[0, 1]$ et comme X est continue, cela montre que $X(st) = sX(t)$ pour tout $s \in [0, 1]$ et tout réel t tel que $|t| < r$. Il existe donc $X \in \mathfrak{g}$ tel que $X(t) = tX$ pour $|t| < r$ (car $X(t)/t$ est constant, pour $|t| < r$, $t \neq 0$). Par suite, $f(t) = \exp(tX)$ pour $|t| < r$. Comme le sous-groupe de **R** engendré par l'intervalle $]-r, r[$ est égal à **R**, cette formule est vraie pour tout réel t. □

THÉORÈME 6.2 (Cartan). — *Soit G et H des groupes de Lie; notons $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ leurs algèbres de Lie. Soit $f\colon G \to H$ un homomorphisme de groupes qui est continu.*

a*) Il existe alors une unique application $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ telle que $f(\exp_G(tX)) = \exp_H(t\varphi(X))$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.*

b*) L'application φ est $\mathbf{R}$-linéaire et l'on a*

$$\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$$

pour X, $Y \in \mathfrak{g}$.

c*) L'homomorphisme $f\colon G \to H$ est indéfiniment différentiable*[(2)]*. L'application φ est sa différentielle à l'origine.*

Proof. — Si $A \in \mathfrak{g}$, l'application $t \mapsto f(\exp_G(tA))$ est un sous-groupe à un paramètre dans H. Il est donc de la forme $t \mapsto \exp(t\varphi(A))$ pour une unique matrice $A \in \mathfrak{h}$.

Considérons alors le graphe de f dans $G \times H$, c'est-à-dire l'ensemble Γ des couples $(g, f(g))$, pour $g \in G$. C'est un sous-groupe de $G \times H$. Comme f est continu, Γ est fermé: si $(g_n, f(g_n))$ converge vers (g, h), alors $g_n \to g$ et $f(g_n)$ converge vers h; puisque f est continu, $h = f(g)$ et $(g, h) \in \Gamma$. D'après le théorème de Cartan, Γ est un sous-groupe de Lie de $G \times H$.

Son algèbre de Lie L est une sous-algèbre de Lie du produit $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. C'est de plus l'ensemble des couples $(A, \varphi(A))$ pour $A \in \mathfrak{g}$ car un sous-groupe à un paramètre de Γ est de la forme $t \mapsto (g(t), f(g(t)))$ pour un unique sous-groupe à un paramètre dans G. Cela entraîne le *b*).

L'exponentielle $\exp_G\colon \mathfrak{g} \to G$ définit une paramétrisation locale de G au voinage de l'identité. La formule $f \circ \exp_G = \exp_H \circ \varphi$ entraîne alors que, au voisinage de l'identité, f est la composée de l'exponentielle de H, de l'application linéaire φ est de l'inverse de l'exponentielle de G. C'est donc une application différentiable (et même analytique réelle si...) La dérivée en $t = 0$ de l'application $t \mapsto \exp_G(tA)$ est égale à A. En dérivant en $t = 0$ la relation $f(\exp_G(tA)) = \exp_H(t\varphi(A))$, il vient ainsi $df_0(A) = \varphi(A)$, pour tout $A \in \mathfrak{g}$, si bien que $\varphi = df_0$. □

Une conséquence de ce théorème est qu'il y a au plus une structure de groupe de Lie sur un groupe topologique: si G et G' sont deux groupes de Lie, tout isomorphisme de G sur G' est différentiable, ainsi que son inverse; il induit en particulier un isomorphisme entre leurs algèbres de Lie.

COROLLAIRE 6.3. — *Un homomorphisme de groupes de Lie connexes est déterminé par l'homomorphisme correspondant entre algèbres de Lie.*

Proof. — Soit en effet f_1 et $f_2\colon G \to H$ des homomorphismes de groupes de Lie ayant même différentielle φ. L'ensemble K des $g \in G$ tels que $f_1(g) = f_2(g)$ est un sous-groupe de G. Comme f_1 et f_2 sont continus, la fonction $f_1 - f_2\colon G \to M_m(\mathbf{C})$ l'est aussi et K est fermé. La formule $f_1 \circ \exp_G = \exp_H \circ \varphi = f_2 \circ \exp_G$ montre que f_1 et f_2 coïncident sur l'image de l'exponentielle, donc sur un voisinage de l'élément neutre de G. Comme K est un sous-groupe de G, K est ouvert dans K. Puisque G est connexe, on a donc $K = G$. □

Exercices. — 1) Montrer que tout sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ qui est connexe et de dimension 1 est isomorphe, ou à $\mathbf{R}$, ou à SO_2.
2) Définir un homomorphisme injectif et continu $O_n \to \mathrm{SO}_{n+1}$.
3) Montrer qu'un homomorphisme bijectif de groupes de Lie est un isomorphisme.
4) Soit G un groupe de Lie complexe. Montrer que la représentation adjointe $G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est une application analytique complexe. En déduire que, si G est compact et connexe, alors G est commutatif.

[(2)] et même analytique si G et H sont considérés comme des groupes de Lie analytiques

CHAPTER 2

REPRÉSENTATIONS

§1. Premières notions

1.1. Soit G un groupe; une *représentation* de G sur un k-espace vectoriel V est un homomorphisme de groupes $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$. Si V est de dimension 1, $\mathrm{GL}(V) = k^*$ et on parle alors de *caractère*. On dit qu'un sous-espace $W \subset V$ est stable par ρ si l'on a $\rho(g)(W) \subset W$ pour tout g dans G. D'un tel sous-espace stable, on déduit une *sous-représentation* de G sur W, ainsi qu'une *représentation quotient* de G sur l'espace vectoriel V/W. L'ensemble, noté V^ρ ou simplement V^G, des *vecteurs fixes de* ρ, c'est-à-dire des $v \in V$ tels que $\rho(g)(v) = v$ pour tout $g \in G$ est évidemment un sous-espace stable de ρ.

1.2. À partir de représentations d'un groupe G sur des espaces vectoriels (sur le même corps), les constructions tensorielles de l'algèbre linéaire permettent d'en déduire d'autres:

– si $\rho_i\colon G \to \mathrm{GL}(V_i)$ sont des représentations, leur somme, $\bigoplus \rho_i\colon G \to \mathrm{GL}(\bigoplus_i V_i)$ est définie par

$$(\bigoplus_i \rho_i)(g)(\sum_i v_i) = \sum_i \rho_i(g)(v_i);$$

– on définit de manière analogue le produit d'une famille quelconque de représentations, la notion n'étant différente que si le produit est infini;

– la représentation contragrédiente d'une représentation $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation sur le dual V^* de V, définie par

$$\rho^*(g)(\varphi) = {}^{\mathrm{t}}(\rho(g^{-1}))(\varphi), \quad \text{pour } \varphi \in V^*,$$

soit encore, si $v \in V$ et $\varphi \in V^*$,

$$(\rho^*(g))(\varphi)(v) = \varphi(\rho(g^{-1})(v));$$

– plus généralement, si ρ_1 et ρ_2 sont deux représentations de G sur V_1 et V_2, on définit une représentation ρ de G sur $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ en posant

$$\rho(g)(f)(v_1) = \rho_2(g)(f(\rho_1(g^{-1})(v_1))),$$

pour $g \in G$, $f \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ et $v_1 \in V_1$. On la note $\mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2)$;

– le produit tensoriel de deux représentations ρ_1 et ρ_2 sur des espaces vectoriels V_1 et V_2 est une représentation de G sur $V_1 \otimes V_2$ telle que $(\rho_1 \otimes \rho_2)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(v_1) \otimes \rho_2(v_2)$. L'identification usuelle de $V_1^* \otimes V_2$ avec $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ identifie aussi les deux représentations $\rho_1^* \otimes \rho_2$ et $\mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2)$;

– si ρ est une représentation de G sur un espace vectoriel V, on définit de manière analogue des représentations de G sur les puissances symétriques et alternées de V. Si V est de dimension finie n, on a ainsi la représentation déterminant $\det\rho\colon G \to k^*$.

§2. Opérateurs d'entrelacement, représentations irréductibles

2.1. Soit ρ_1 et ρ_2 deux représentations d'un groupe G sur des espaces vectoriels V_1 et V_2. On dit qu'une application linéaire $f\colon V_1 \to V_2$ *entrelace* ρ_1 et ρ_2, ou que c'est un *opérateur d'entrelacement*, si l'on a

$\rho_2(g)(f(v)) = f(\rho_1(g)(v))$ pour tout $g \in G$ et tout $v \in V_1$. Notant $\rho = \mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2)$, cela revient donc à dire que $\rho(g)(f) = f$ pour tout $g \in G$, c'est-à-dire f est un vecteur fixe de la représentation ρ. On dit aussi que f est un homomorphisme de ρ_1 dans ρ_2, ou que f est un G-homomorphisme de V_1 dans V_2. On note $\mathrm{Hom}_G(\rho_1, \rho_2)$ l'ensemble des opérateurs d'entrelacement entre ρ_1 et ρ_2; il est aussi égal à $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)^G$.

Deux représentation ρ_1 et ρ_2 sont dites isomorphes, ou équivalentes, s'il existe un opérateur d'entrelacement $f\colon V_1 \to V_2$ qui est bijectif.

2.2. On dit qu'une représentation ρ d'un groupe G sur un espace vectoriel V est *irréductible* si $V \neq 0$ et si ses seuls sous-espaces stables sont les sous-espaces triviaux 0 et V. Ainsi, dans le cas où V est de dimension finie, une représentation ρ est au contraire réductible si V possède une base dans laquelle les matrices des applications linéaires $\rho(g)$, pour $g \in G$, soient toutes triangulaires par blocs (de dimensions $< \dim V$).

LEMME 2.3. — *Soit (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux représentations d'un groupe G et soit $f\colon V_1 \to V_2$ un opérateur d'entrelacement. Le noyau de f est un sous-espace vectoriel stable de V_1; l'image de f est un sous-espace vectoriel stable de V_2.*

En particulier, supposant $f \neq 0$, on a les propriétés suivantes :

a) *si ρ_1 est irréductible, f est injective ;*
b) *si ρ_2 est irréductible, f est surjective ;*
c) *si ρ_1 et ρ_2 sont toutes deux irréductibles, f est bijective.*

Proof. — Soit v un élément du noyau de f. Pour tout $g \in G$, on a donc $f(\rho_1(g)(v)) = \rho_2(g)(f(v)) = \rho_2(g)(0) = 0$, donc $\rho_1(g)(v)$ appartient au noyau de f. Cela prouve que le noyau de f est stable.

Soit w un élément de l'image de f et soit $v \in V_1$ tel que $w = f(v)$. Pour tout $g \in G$, les égalités $\rho_2(g)(w) = \rho_2(g)(f(v)) = f(\rho_1(g)(v))$ montrent que $\rho_2(g)(w)$ appartient à l'image de f. Ainsi, l'image de f est stable par ρ_2.

Les trois autres propriétés découlent immédiatement de ceci et de la définition d'une représentation irréductible. □

THÉORÈME 2.4 (Suites de Jordan-Hölder). — *Soit ρ une représentation d'un groupe G sur un k-espace vectoriel de dimension finie V.*

a) *Il existe une suite croissante de sous-espaces stables*

$$0 = V_m \subset V_{m-1} \subset \cdots \subset V_1 \subset V_0 = V$$

telles que pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant m$, la représentation déduite de ρ sur V_{i-1}/V_i soit irréductible.

b) *Si $0 \subset W_{n-1} \subset \cdots \subset W_1 \subset V$ est une seconde suite de tels sous-espaces stables, on a $n = m$ et il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que la représentation de G sur V_{i-1}/V_i soit isomorphe à celle de G sur $W_{\sigma(i)-1}/W_{\sigma(i)}$, pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Une telle suite de sous-espaces stables est appelée *suite de composition*.

Proof. — L'existence d'une telle suite de sous-espaces stables se démontre par récurrence sur la dimension de V. En effet, l'ensemble des sous-espaces non nuls de V qui sont stables par ρ admet un élément W de dimension minimale; la représentation de G sur W déduite de ρ est alors irréductible et on conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à la représentation de G sur l'espace quotient V/W.

Démontrons la seconde assertion par récurrence sur $\dim V$. Posons $F = W_1 \cap V_1$; c'est un sous-espace stable de V.

Si $F = W_1$, alors $W_1 \subset V_1$. Alors, la représentation déduite de ρ sur V/W_1 admet le sous-espace stable V/V_1, ce qui implique $W_1 = V_1 = F$. Par récurrence, on a $n-1 = m-1$ est les quotients successifs V_{i-1}/V_i et W_{i-1}/W_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ sont égaux, à l'ordre près. Le cas où $F = V_1$ se traite de même.

Supposons maintenant que F soit distinct de V_1 et W_1. L'application évidente $W_1 \to V/V_1$ est un opérateur d'entrelacement, et son noyau est F. On en déduit un opérateur d'entrelacement injectif, non nul, $W_1/F \to V/V_1$; comme V/V_1 est irréductible, il est nécessairement surjectif, si bien que les représentations de G déduites de ρ sur W_1/F et V/V_1 sont isomorphes. Il en est de même des représentations sur V_1/F et V/W_1 que l'on déduit de ρ.

Considérons alors une suite de composition de F, $F \supset F_1 \supset \dots F_p = 0$, d'où deux suites de composition de V:

$$V \supset V_1 \supset F \supset F_1 \supset \cdots \supset F_p = 0$$
$$V \supset W_1 \supset F \supset F_1 \supset \cdots \supset F_p = 0$$

pour lesquelles l'assertion à démontrer est vraie, car V/W_1 est isomorphe à V_1/F, et V/V_1 est isomorphe à W_1/F. De plus, le premier cas traité montre que les quotients successifs de la première suite coïncident avec ceux de la suite de composition

$$V \supset V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_m = 0$$

tandis que les quotients successifs de la seconde coïncident avec ceux de la suite de composition

$$V \supset W_1 \supset W_2 \supset \cdots \supset W_n = 0.$$

Cela démontre le théorème. □

§3. Représentations semi-simples

3.1. On dit qu'une représentation $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ est *semi-simple*, ou *complètement réductible*, si elle est isomorphe à une somme directe de représentations irréductibles. Supposons V de dimension finie; une telle représentation peut alors s'écrire $\rho = \bigoplus \rho_i^{n_i}$, où les $\rho_i\colon G \to \mathrm{GL}(V_i)$ sont des représentations irréductibles deux à deux non isomorphes et où $\rho_i^{n_i}$ désigne la représentation déduite de ρ_i sur $V_i^{n_i}$. D'après le théorème de Jordan-Hölder, l'ensemble des couples (ρ_i, n_i) est uniquement déterminé par ρ.

LEMME 3.2. — *Soit $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *la représentation ρ est semi-simple ;*
(ii) *tout sous-espace stable de V possède un supplémentaire stable ;*
(iii) *tout sous-espace stable de V est l'image d'un projecteur dans V qui est un endomorphisme de ρ.*

Proof. — On a (iii)⇒(ii), car le noyau d'un projecteur dans V est stable par ρ, si c'est un endomorphisme de ρ. Inversement, si V est la somme directe $W \oplus W'$ de sous-espaces stables de V, le projecteur p de noyau W' et d'image W est un endomorphisme de ρ. En effet, pour tout v dans V, on peut écrire $v = w + w'$, avec $w \in W$ et $w' \in W'$, et alors

$$p(\rho(g)(v)) = p(\rho(g)(w)) + p(\rho(g)(w')) = \rho(g)(w) = \rho(g)(p(v)),$$

pour tout $g \in G$.

Supposant (iii), remarquons tout d'abord que toute sous-représentation de ρ vérifie aussi l'assertion (iii). Soit en effet W un sous-espace stable de V et W' un sous-espace stable de W. Il existe un projecteur p dans V, d'image W' qui est un endomorphisme de ρ. Sa restriction à W est alors un projecteur d'image W' (car $W' \subset W$) et c'est un endomorphisme de la sous-représentation de ρ sur W. Si l'hypothèse (iii) est satisfaite, montrons maintenant que ρ est semi-simple, par récurrence sur la dimension de V. Si ρ est irréductible, elle est semi-simple. Sinon, il existe un sous-espace stable W, avec $W \neq 0$ et $W \neq V$. Par hypothèse, W possède un sous-espace stable W', de sorte que ρ est la somme directe des sous-représentations déduites de ρ sur W et W'. Par récurrence, ces deux représentations sont semi-simples, si bien que ρ est semi-simple.

Supposons enfin que ρ soit semi-simple et montrons que tout sous-espace stable W de V possède un supplémentaire stable. Écrivons $\rho = \bigoplus_{i=1}^m \rho_i$, où $\rho_i\colon G \to \mathrm{GL}(V_i)$ est une représentation irréductible de G. Pour tout i, $W \cap V_i$ est un sous-espace stable de V_i, si bien que l'on a ou bien $W \cap V_i = 0$, ou bien $V_i \subset W$. On construit alors par récurrence une suite $(W'_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$ de sous-espaces stables de V de la façon suivante: Posons $W'_0 = 0$, puis posons $W'_i = W'_{i-1} + V_i$ si $(W'_{i-1} + W) \cap V_i = 0$ et $W'_i = W'_{i-1}$ sinon. Par récurrence, on a les relations $W'_i + W \supset V_1 + \cdots + V_i$ et $W'_i \cap W = 0$. La première est évidente; la seconde l'est aussi si $W'_{i-1} + W$ contient V_i, car alors $W'_i = W'_{i-1}$, et si $W'_{i-1} + W \cap V_i = 0$, les espaces W'_{i-1}, W et V_i sont en somme directe, donc $W'_{i-1} + V_i$ et W aussi. Finalement, W'_m est un supplémentaire stable de W. □

COROLLAIRE 3.3. — *Toute sous-représentation, tout quotient d'une représentation semi-simple est semi-simple. La contragrédiente d'une représentation semi-simple est semi-simple. Une somme de représentations semi-simple est semi-simple.*

Exemple 3.4. — Supposons que V soit un espace vectoriel euclidien (ou hermitien) et que $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ soit une représentation unitaire, c'est-à-dire d'image contenue dans le groupe orthogonal (unitaire) de V. Alors, V est semi-simple. Soit en effet W un sous-espace stable de V, et soit W' son supplémentaire orthogonal. Si $v \in W'$ et $w \in W$, on a, pour tout $g \in G$,

$$\langle \rho(g)(v), w\rangle = \langle v, \rho(g)^*(w)\rangle = \langle v, \rho(g)^{-1}(w)\rangle = \langle v, \rho(g^{-1})(w)\rangle = 0$$

car $\rho(g^{-1})(w) \in W$; par suite, $\rho(g)(v)$ est orthogonal à W, donc $\rho(g)(W') \subset W'$.

THÉORÈME 3.5 (Théorème du bicommutant). — *Soit ρ une représentation d'un groupe G sur un espace vectoriel de dimension finie V. Soit A l'espace vectoriel engendré dans* $\mathrm{End}(V)$ *par l'image de ρ, A' son commutant (ensemble des $u \in$* $\mathrm{End}(V)$ *tels que $au = ua$ pour tout $a \in A$) et A'' le commutant de A. Si ρ est semi-simple, on a $A'' = A$.*

Remarquons que A, A' et A'' sont des sous-algèbres de $\mathrm{End}(V)$. De plus, un endomorphisme $u \in \mathrm{End}(V)$ appartient à A' si et seulement s'il commute à tout $\rho(g)$, $g \in G$. Par suite, $A' = \mathrm{End}_G(V)$. Remarquons aussi que l'inclusion $A \subset A''$ est évidente.

Proof. — Considérons un élément x de V et soit $W = Ax$ l'espace vectoriel engendré par les $\rho(g)(x)$ dans V. C'est un sous-espace stable de V. Comme V est semi-simple, il existe donc un projecteur p dans V d'image W tel que $\rho(g)p\rho(g^{-1}) = p$ pour tout $g \in G$. Autrement dit, $p \in A'$. Si $u \in A''$, on a ainsi $up = pu$, si bien que $u(W) \subset W$. Par suite, il existe $a \in A$ tel que $u(x) = a(x)$.

Nous allons appliquer ce raisonnement à la représentation ρ^n de G sur V^n. Elle est semi-simple. Notons B le sous-espace engendré par l'image de ρ^n dans $\mathrm{End}(V^n)$, B' son commutant, et B'' le commutant de B'. Identifions $\mathrm{End}(V^n)$ à des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathrm{End}(V^n)$. L'algèbre B est constituée de matrices diagonales par blocs, tous égaux à un même endomorphisme dans A. Puis, B' s'identifie aux matrices (b_{ij}) avec $b_{ij} \in A'$ pour tout couple (i,j). Enfin, constatons que B'' contient les matrices diagonales par blocs tous égaux à un même endomorphisme appartenant à A''.

Soit $u \in A''$. Soit $v \in \mathrm{End}(V^n)$ l'endomorphisme diagonal par blocs, chaque bloc étant u; on a $v \in B''$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de V ; appliquant ce qui précède à l'élément $(e_1, \dots, e_n)$ de V^n, on voit qu'il existe $b \in B$ tel que $b(e_1, \dots, e_n) = v(e_1, \dots, e_n)$ pour tout i. Par suite, il existe $a \in A$ tel que $a(e_i) = u(e_i)$ pour tout i. Cela entraîne $a = u$, et donc $A'' \subset A$, d'où le théorème. □

Exercices. — 1) Soit $G = \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{R}$, et soit $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ défini par $\rho(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quels sont les sous-espaces stables de ρ ? Montrer que ρ n'est pas semi-simple.

2) Toute sous-représentation, tout quotient d'une représentation semi-simple est semi-simple.

3) Soit G un groupe, soit V_1 et V_2 des espaces vectoriels et soit $V = V_1 \oplus V_2$ leur somme directe. Soit ρ une représentation de G sur V tel que V_1 soit un sous-espace stable par ρ. Remarquer que ρ s'écrit, par blocs, $\rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & f(g) \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$, où ρ_1 et ρ_2 sont des représentations de G sur V_1 et V_2.

On suppose que ρ_1 et ρ_2 sont irréductibles et non isomorphes. Montrer que ρ est isomorphe à $\rho_1 \oplus \rho_2$ si et seulement s'il existe $u \in \mathrm{Hom}(V_2, V_1)$ tel que $f(g) = \rho_1(g)u - u\rho_2(g)$ pour tout $g \in G$.

4) Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de V et soit $v \in \mathrm{End}(V)$ un endomorphisme qui commute à tout endomorphisme commutant avec u. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $v = P(u)$.

5) Soit $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation sur un espace de dimension finie. Montrer que tout sous-espace stable possède un unique supplémentaire stable si et seulement si ρ est isomorphe à une somme directe de représentations irréductibles deux à deux non isomorphes.

6) Soit G un groupe fini, k un corps dont la caractéristique ne divise pas l'ordre de G. Soit V un espace vectoriel sur k et ρ une représentation de G sur V. Si p est un projecteur dans V, montrer que

$$q = \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g\in G} \rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1}$$

est un projecteur de même image que p qui entrelace ρ. En déduire que V est semi-simple.
7) L'application $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ donnée par $n \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est une représentation qui n'est pas semi-simple.
8) Soit H un espace de Hilbert et $A \subset \mathscr{L}(H)$ une sous-algèbre stable par passage à l'adjoint. Soit u un élément du bicommutant de A. Soit $x_1, \dots, x_n$ des éléments de H et soit ε un réel > 0. Montrer qu'il existe $v \in A$ tel que $\| v(x_i) - u(x_i) \| \leqslant \varepsilon$. En déduire que le bicommutant de A est l'adhérence de A pour la topologie de $\mathscr{L}(H)$ donnée par la convergence simple (*théorème du bicommutant de von Neumann*).

§4. Théorèmes de Burnside et de Schur

THÉORÈME 4.1 (Lemme de Schur). — *Soit ρ une représentation irréductible d'un groupe G sur un k-espace vectoriel de dimension finie V. Supposons que le corps k soit algébriquement clos. Alors, tout opérateur d'entrelacement de V dans lui-même est une homothétie.*

Proof. — Soit f un endomorphisme de ρ. Comme k est algébriquement clos, l'endomorphisme de V défini par f possède au moins une valeur propre λ. Alors, $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ est un endomorphisme de ρ qui n'est pas injectif. Puisque ρ est irréductible, il est nul et f est égal à l'homothétie de rapport λ. □

COROLLAIRE 4.2. — *Soit G un groupe commutatif et soit ρ une représentation irréductible de G sur un espace vectoriel de dimension finie V. Si k est algébriquement clos, V est de dimension* 1.

Proof. — Soit $g \in G$. L'application $\rho(g) \colon V \to V$ est alors un opérateur d'entrelacement de V dans lui-même car pour tout $h \in G$, $\rho(h) \circ \rho(g) = \rho(hg) = \rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h)$. Il résulte du lemme de Schur que $\rho(g)$ est une homothétie; notons $\lambda(g)$ son rapport. L'application $g \mapsto \lambda(g)$ est un homomorphisme de groupes $G \to k^*$ et $\rho(g) = \lambda(g)\,\mathrm{id}_V$ pour tout $g \in G$. Tout sous-espace de V est donc stable par V. Puisque ρ est supposée irréductible, $\dim V = 1$. □

THÉORÈME 4.3 (Théorème de Burnside). — *Soit G un groupe et soit ρ une représentation irréductible de G sur un k-espace vectoriel V de dimension finie. Supposons que le corps k soit algébriquement clos. Alors, les applications linéaires $\rho(g)$, pour $g \in G$, engendrent* $\mathrm{End}(V)$.

Proof. — Soit A le sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}(V)$ engendré par les $\rho(g)$, $g \in G$. Comme V est irréductible et k algébriquement clos, le commutant $A' = \mathrm{End}_G(A)$ de A est réduit aux homothéties. Par suite, le bicommutant de A est égal à $\mathrm{End}(V)$. Le théorème résulte donc du théorème du bicommutant. □

Avant d'en donner une application, rappelons qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel V de dimension finie est dit unipotent si $u - \mathrm{id}_V$ est nilpotent; lorsque cela revient à dire que 1 est la seule racine du polynôme minimal (ou caractéristique) de u. Par suite, la trace d'une matrice unipotente est égale à la dimension de V.

THÉORÈME 4.4. — *Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ formé de matrices unipotentes. Il existe alors une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ tel que pour tout $g \in G$, PgP^{-1} soit triangulaire supérieure.*

On peut le formuler de manière plus intrinsèque: *Soit V un espace vectoriel de dimension finie et soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ formé d'endomorphismes unipotents. Il existe alors une suite de sous-espaces de V stables par G, $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$, avec $\dim V_i = i$ pour tout i.* En effet, si e_i est un élément quelconque de $V_i \setminus V_{i-1}$, la matrice d'un élément de G dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est alors triangulaire supérieure.

Proof. — Démontrons le théorème par récurrence sur la dimension de V. On dispose de fait d'une représentation ρ de G sur V. Si W est un sous-espace de V stable par G et non trivial, le théorème résulte de l'hypothèse de récurrence appliquée à la sous-représentation sur W et à la représentation quotient sur V/W. On peut ainsi supposer que ρ est irréductible et $V \neq 0$.

Fixons un élément u dans G et posons $n = u - \mathrm{id}_V$. Pour tout $g \in G$, $\mathrm{tr}(ng) = \mathrm{tr}(ug) - \mathrm{tr}(g) = 0$ car ug et g sont toutes deux unipotentes. Par suite, A désignant le sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}(V)$ engendré par les g, $g \in G$, on a $\mathrm{tr}(na) = 0$ pour tout $a \in A$. On a $A = \mathrm{End}(V)$, d'après le théorème de Burnside. Il résulte alors du lemme suivant que $n = 0$. Autrement dit $G = \{\mathrm{id}_V\}$ et, dans ce cas, le théorème est évident. □

LEMME 4.5. — *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k. La forme bilinéaire $(u, v) \mapsto \mathrm{tr}(uv)$ sur $\mathrm{End}(V)$ est inversible.*

Proof. — Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de V, $\mathrm{End}(V)$ admet la base $(E_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où $E_{ij} = e_i^* \otimes e_j$. On a $E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{jk}E_{i\ell}$ et $\mathrm{tr}(E_{i\ell}) = \delta_{i\ell}$. Si $u = \sum u_{ij}E_{ij}$ appartient au noyau de la forme trace, on a donc $\mathrm{tr}(uE_{k\ell}) = 0$ pour tout k et tout ℓ, d'où

$$0 = \sum_{i,j=1}^{n} u_{ij}\delta_{jk}\,\mathrm{tr}(E_{i\ell}) = u_{\ell,k}$$

ce qui montre que $u = 0$. □

Exercices. — 1) Soit $\rho\colon \mathbf{R} \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ la représentation donnée par $\rho(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right)$. Montrer qu'elle est irréductible. Montrer que la sous-algèbre de $M_2(\mathbf{R})$ qu'elle engendre est isomorphe à $\mathbf{C}$.
2) Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation de dimension finie, sa trace est la fonction $G \to k$ donnée par $g \mapsto \mathrm{tr}\,\rho(g)$. Si ρ_1 et ρ_2 sont des représentations de dimension finie, calculer la trace des représentations $\rho_1 \oplus \rho_2$, ρ_1^*, $\mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2)$, $\rho_1 \otimes \rho_2$. Calculer la trace d'une représentation en fonction des traces des quotients successifs d'une suite de composition. Si ρ_1 et ρ_2 sont isomorphes, alors elles ont même trace. Exhiber un contre-exemple à la réciproque.
3) Pour $i = 1, 2$, soit G_i un groupe et ρ_i une représentation irréductible de G_i sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel V_i de dimension finie. Montrer à l'aide du théorème de Burnside que la représentation $\rho_1 \otimes \rho_2$ de $G_1 \times G_2$ sur l'espace vectoriel $V_1 \otimes V_2$ est irréductible.
4) [(1)] Soit G un groupe commutatif et soit ρ une représentation irréductible de G sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel V de dimension finie $\neq 1$. On suppose que ρ est isomorphe à une représentation orthogonale. Montrer que $\dim V = 2$ et qu'il existe un morphisme de groupes $\varphi\colon G \to \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ telle que ρ s'écrive, dans une base convenable

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(g) & -\sin\varphi(g) \\ \sin\varphi(g) & \cos\varphi(g) \end{pmatrix}.$$

§5. Représentations d'algèbres de Lie

5.1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps k. Une représentation de $\mathfrak{g}$ sur un k-espace vectoriel V est une application linéaire $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ telle que $\varphi([A,B]) = [\varphi(A), \varphi(B)]$ pour A, B dans $\mathfrak{g}$.

On définit de manière évidente la somme directe ou le produit de représentations. Si φ_1 et φ_2 sont des représentations de $\mathfrak{g}$ sur V_1 et V_2 respectivement, on définit une représentation $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ de $\mathfrak{g}$ sur $V_1 \otimes V_2$ par la formule

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(A)(v_1 \otimes v_2) = \varphi_1(A)(v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes \varphi_2(A)(v_2),$$

pour $A \in \mathfrak{g}$, $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$. On définit aussi une représentation $\mathrm{Hom}(\varphi_1, \varphi_2)$ de $\mathfrak{g}$ sur $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ par

$$\mathrm{Hom}(\varphi_1, \varphi_2)(A)(f)\colon v \mapsto \varphi_2(A)(f(v)) - f(\varphi_1(A)(v)),$$

pour $A \in \mathfrak{g}$, $f \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ et $v \in V_1$.

[(1)] Vérifier!

5.2. Un sous-espace stable d'une représentation $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ est un sous-espace vectoriel $W \subset V$ tel que $\varphi(A)(W) \subset W$ pour tout $A \in \mathfrak{g}$. On en déduit alors une *sous-représentation* de $\mathfrak{g}$ sur W, ainsi qu'une *représentation quotient* de $\mathfrak{g}$ sur V/W. La notion de représentation irréductible est analogue au cas des groupes.

Un opérateur d'entrelacement entre deux représentations (φ_1, V_1) et (φ_2, V_2) est une application linéaire $f\colon V_1 \to V_2$ telle que $f \circ \varphi_1(A) = \varphi_2(A) \circ f$ pour tout $A \in \mathfrak{g}$. Noyau et image d'un opérateur d'entrelacement sont des sous-espaces stables. Par suite, f est injective si φ_1 est irréductible; f est surjective si φ_2 est irréductible. Si le corps k est algébriquement clos, un opérateur d'entrelacement d'une représentation irréductible dans elle-même est une homothétie (analogue du lemme de Schur).

On a aussi un énoncé de type Jordan-Hölder: existence d'une suite de composition, et unicité des quotients successifs à l'ordre près.

§6. Un exemple: $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$

6.1. Commençons par déterminer les représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$. Les trois matrices

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$. Elles vérifient les relations

$$[X, Y] = H, \quad [H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y.$$

Soit $\varphi\colon \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}) \to \mathrm{End}(V)$ une représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ Pour $\lambda \in \mathbf{C}$, notons V_λ le noyau de l'endomorphisme $\varphi(H) - \lambda\,\mathrm{id}_V$. Un nombre complexe λ sera appelé *poids* de la représentation φ si $V_\lambda \neq 0$, c'est-à-dire si λ est une valeur propre de $\varphi(H)$. Remarquons que $\varphi(X)$ applique V_λ dans $V_{\lambda+2}$; en effet, si $v \in V_\lambda$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(H)(\varphi(X)(v)) &= [\varphi(H), \varphi(X)](v) + \varphi(X)(\varphi(H)(v)) \\ &= 2\varphi(X)(v) + \varphi(X)(\lambda v) \\ &= (\lambda+2)(\varphi(X)(v)).\end{aligned}$$

De même, $\varphi(Y)$ applique V_λ dans $V_{\lambda-2}$.

Puisque $\varphi(H)$ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, $\varphi(X)$ et $\varphi(Y)$ sont des endomorphismes nilpotents. Il existe ainsi des vecteurs $v \in V$ qui sont vecteurs propres de $\varphi(H)$ et qui sont annulés par $\varphi(X)$; de tels vecteurs seront dits *primitifs*.

Fixons un tel vecteur v_0 et posons, pour tout entier $m \geqslant 1$, $v_m = \varphi(Y)^m(v_0)$. Soit $n \geqslant 0$ le plus grand entier tel que $v_n \neq 0$.

LEMME 6.2. — *Pour tout entier $m \geqslant 0$, on a les relations*

$$\varphi(Y)(v_m) = v_{m+1}, \quad \varphi(H)(v_m) = (n-2m)v_m \quad \textit{et} \quad \varphi(X)(v_m) = m(n-m+1)v_{m-1}$$

(où l'on a posé $v_{-1} = 0$).

Proof. — La première relation est la définition de v_{m+1}. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $\varphi(H)(v_0) = \lambda v_0$. Comme $\varphi(Y)(V_\mu) \subset V_{\mu-2}$, on a par récurrence $\varphi(H)(v_m) = (\lambda - 2m)v_m$. On a $\varphi(X)(v_0) = 0$ par définition d'un vecteur primitif; pour $m \geqslant 0$, on a

$$\varphi(X)(v_{m+1}) = \varphi(X)(\varphi(Y)(v_m)) = [\varphi(X), \varphi(Y)](v_m) + \varphi(Y)(\varphi(X)(v_m)).$$

Supposons que $\varphi(X)(v_m) = \lambda_m v_{m-1}$, il vient

$$\varphi(X)(v_{m+1}) = (\lambda - 2m)v_m + \varphi(Y)(\lambda_m v_{m-1}) = (\lambda - 2m + \lambda_m)v_m.$$

On a donc par récurrence $\varphi(X)(v_m) = \lambda_m v_{m-1}$ pour tout entier $m \geqslant 0$, où

$$\lambda_m = \lambda + (\lambda - 2) + \cdots + (\lambda - 2m + 2) = m(\lambda - m + 1).$$

Par définition de l'entier n, $v_n \neq 0$ et $v_{n+1} = 0$. En particulier, $\varphi(X)(v_{n+1}) = 0$ et $(n+1)(\lambda - n) = v_n = 0$, si bien que $\lambda = n$. Cela termine la démonstration du lemme. □

Les calculs précédents montrent que le sous-espace vectoriel de V engendré par $v_0,\dots,v_n$ est stable par les endomorphismes $\varphi(H)$, $\varphi(X)$ et $\varphi(Y)$. De plus, $v_0,\dots,v_n$ sont vecteurs propres de $\varphi(H)$ pour des valeurs propres distinctes; ils sont en particulier linéairement indépendants. Par suite:

COROLLAIRE. — *Le sous-espace de V engendré par $v_0,\dots,v_n$ est un sous-espace stable, irréductible, de V de dimension $n+1$.*

Seule l'irréductibilité n'a pas été démontrée. Soit W un sous-espace vectoriel stable de $\operatorname{vect}(v_0,\dots,v_n)$, non nul, et soit $v\in W$. Écrivons $v = a_0$.

Remarque. — Comme $H=[X,Y]$, l'endomorphisme $\varphi(H)$ de ce sous-espace stable est égal au commutateur $[\varphi(X),\varphi(Y)]$. Il est par conséquent de trace nulle, ce qui permet de retrouver l'égalité $\lambda = n$ établie dans la démonstration du lemme.

6.3. Supposons maintenant que φ soit une représentation irréductible et soit v un vecteur primitif. Le sous-espace stable construit au paragraphe précédent est nécessairement égal à V, d'où en particulier une base $(v_0,\dots,v_n)$ de V telles que soient vérifiées les relations:

$$\varphi(H)(v_m)=(n-2m)v_m,\quad \varphi(X)(v_m)=m(n-m+1)v_{m-1},\quad\text{et}\quad \varphi(Y)(v_m)=v_{m+1},$$

pour $0\leqslant m\leqslant n$, avec les conventions $v_{-1}=v_{n+1}=0$.

6.4. En fait, nous allons montrer que V est isomorphe à la représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$, puissance symétrique n-ième de la représentation standard. Soit $V(n)$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\operatorname{Sym}^n\mathbf{C}^2$, dont la famille $(e_1^n, e_1^{n-1}e_2,\dots,e_2^n)$ est une base, où (e_1,e_2) est la base canonique de $\mathbf{C}^2$. L'action de $\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}^2$ s'étend de manière naturelle en une représentation sur $V(n)$. La représentation correspondante de l'algèbre de Lie est ainsi définie par

$$\varphi(A)(v)\frac{d}{dt}\left(\varphi(e^{tA})(v)\right)_{t=0},$$

pour $A\in\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$. Remarquons que

$$e^{tH}=\begin{pmatrix} e^t & 0\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix},\quad e^{tX}=\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad e^{tY}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}.$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(H)(e_1^{n-m}e_2^m) &= \frac{d}{dt}\left(e^{(n-2m)t}e_1^{n-m}e_2^m\right)_{t=0}=(n-2m)e_1^{n-m}e_2^m\\
\varphi(X)(e_1^{n-m}e_2^m) &= \frac{d}{dt}\left(e_1^{n-m}(te_1+e_2)^m\right)_{t=0}=me_1^{n-m+1}e_2^{m-1}\\
\varphi(Y)(e_1^{n-m}e_2^m) &= \frac{d}{dt}\left((e_1+te_2)^{n-m}e_2^m\right)_{t=0}=(n-m)e_1^{n-m-1}e_2^{m+1}.
\end{aligned}$$

Par suite, posant $v_m=\frac{1}{(n-m)!}e_1^{n-m}e_2^m$, on a

$$\varphi(H)(v_m)=(n-2m)v_m,\quad \varphi(X)(v_m)=m(n-m+1)v_{m-1},\quad \varphi(Y)(v_m)=v_{m+1}.$$

Cela montre que la représentation V de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ étudiée plus haut est isomorphe à la représentation dérivée de celle du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ sur $V(n)$.

6.5. Opérateur de Casimir. — Soit φ une représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ sur un espace vectoriel V de dimension finie. L'opérateur de Casimir dans V est défini par

$$C=\frac{1}{2}\varphi(H)^2+\varphi(H)+2\varphi(Y)\varphi(X).$$

LEMME 6.6. — *L'opérateur $C\in\operatorname{End}(V)$ commute à l'image de φ.*

Proof. — Il suffit de montrer que $[C,\varphi(A)]=0$ pour $A\in\{H,X,Y\}$. Simplifions tout d'abord ce commutateur: si $A\in\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$, on a

$$\begin{aligned}[C,\varphi(A)] &= \frac{1}{2}\left(\varphi(H)^2\varphi(A)-\varphi(A)\varphi(H)^2\right)+[\varphi(H),\varphi(A)]\\ &\qquad +2(\varphi(Y)\varphi(X)\varphi(A)-\varphi(A)\varphi(Y)\varphi(X))\\ &= \frac{1}{2}\varphi(H)[\varphi(H),\varphi(A)]+\frac{1}{2}[\varphi(H),\varphi(A)]\varphi(H)+[\varphi(H),\varphi(A)]\\ &\qquad +2\varphi(Y)[\varphi(X),\varphi(A)]+2[\varphi(Y),\varphi(A)]\varphi(X)\\ &= \frac{1}{2}\varphi(H)\varphi([H,A])+\frac{1}{2}\varphi([H,A])\varphi(H)+\varphi([H,A])\\ &\qquad +2\varphi(Y)\varphi([X,A])+2\varphi([Y,A])\varphi(X).\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}[C,\varphi(H)] &= 0+0+0+2\varphi(Y)\varphi(-2X)+2\varphi(2Y)\varphi(X)=0\\ [C,\varphi(X)] &= \frac{1}{2}\varphi(H)\varphi(2X)+\frac{1}{2}\varphi(2X)\varphi(H)+\varphi(2X)+2\varphi(-H)\varphi(X)\\ &= [\varphi(X),\varphi(H)]+2\varphi(X)=\varphi([X,H])+2\varphi(X)=\varphi(-2X)+2\varphi(X)=0\\ [C,\varphi(Y)] &= \frac{1}{2}\varphi(H)\varphi(-2Y)+\frac{1}{2}\varphi(-2Y)\varphi(H)+\varphi(-2Y)+2\varphi(Y)\varphi(H)\\ &= [\varphi(Y),\varphi(H)]-2\varphi(Y)=\varphi([Y,H])-2\varphi(Y)=\varphi(2Y)-2\varphi(Y)=0.\end{aligned}$$

Cela démontre le lemme. □

Calculons l'opérateur C dans le cas où V est la représentation $V(n)$: pour tout entier m tel que $0\leqslant m\leqslant n$, on a:

$$\begin{aligned}C(v_m) &= \frac{1}{2}(n-2m)^2v_m+(n-2m)v_m+2m(n-m+1)v_mv_m\\ &= \frac{1}{2}\left((n^2-4mn+4m^2)+(2n-4m)+(4mn-4m(m-1))\right)v_m\\ &= \frac{1}{2}\left(n^2+2n\right)v_m.\end{aligned}$$

Ainsi, l'opérateur C agit comme l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}n^2+n$; en particulier, C est inversible si $n>0$. (Comme $V(n)$ est irréductible, il résulte du lemme de Schur que C est une homothétie; nous aurons cependant besoin d'utiliser le fait que C est inversible.)

THÉORÈME 6.7. — *Toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ est semi-simple.*

Proof. — Soit $\varphi\colon\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})\to\mathrm{End}(V)$ une telle représentation ; il suffit de montrer que tout sous-espace stable $W\subset V$ admet un supplémentaire stable.

De la représentation φ sur V, on déduit une représentation π de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ sur $\mathrm{End}(V)$, définie par

$$(\pi(A)(f))(v)=\varphi(A)(f(v))-f(\varphi(A)(v))=[\varphi(A),f](v),$$

pour $A\in\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ et $f\in\mathrm{End}(V)$ et $v\in V$. Un supplémentaire stable d'un sous-espace stable W est le noyau d'un un projecteur f dans V d'image W qui commute à l'image de φ, c'est-à-dire est invariant par π. On cherche ainsi une application linéaire $f\colon V\to W$ invariante par π dont la restriction à W est l'identité.

Considérons plus généralement le sous-espace M de $\mathrm{End}(V)$ formé des applications linéaires $f\colon V\to W$ dont la restriction à W est une homothétie, et soit N le sous-espace de M formé des applications linéaires $f\colon V\to W$ dont la restriction à W est nulle. Ce sont des sous-espaces stables de $\mathrm{End}(V)$. En effet, si $f\in\mathrm{Hom}(V,W)$ vérifie $f|_W=\lambda\,\mathrm{id}_W$, la formule ci-dessus montre que $(\pi(A)(f))(v)$ appartient à W pour tout $v\in V$ et tout $A\in\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$, car W est un sous-espace stable de V. Si de plus $v\in W$,

$$(\pi(A)(f))(v)=\varphi(A)(\lambda v)-\lambda\varphi(A)(v)=0$$

car $\varphi(A)(v) \in W$. En particulier, $\pi(A)(M) \subset N$ pour tout $A \in \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$.

Cela nous ramène à montrer que si W est un sous-espace stable de codimension 1 dans V, il existe un vecteur $v \in V \setminus W$ tel que $\varphi(A)(v) = 0$ pour tout $A \in \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$. Démontrons ce fait par récurrence sur $\dim V$.

Au préalable, remarquons que toute représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ sur un espace vectoriel de dimension 1 est identiquement nulle. Cela résulte de ce qu'une telle représentation est nécessairment irréductible, donc isomorphe à la représentation $V(0)$. Cela peut aussi se vérifier directement en utilisant le fait que les trois générateurs H, X et Y de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ sont des commutateurs, donc agissent par 0 sur un espace de dimension 1.

Par suite, il revient au même de chercher un supplémentaire stable de dimension 1 ou de chercher un vecteur v annulé par la représentation.

Premier cas: $\dim W = 1$. La sous-représentation $\varphi|_W$ est aussi nulle, si bien que $\varphi(A)(W) = 0$. Par suite, si A et $B \in \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$,

$$\varphi(A)\varphi(B)(V) \subset \varphi(A)(W) = 0,$$

et en particulier

$$\varphi([A,B]) = [\varphi(A), \varphi(B)] = 0.$$

Comme $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ est engendré par des commutateurs, la représentation φ est nulle. Tout vecteur de $V \setminus W$ convient.

Deuxième cas: la sous-représentation sur W est irréductible de dimension > 1. L'opérateur de Casimir C de V laisse stable W. Sa restriction à W n'est autre que l'opérateur de Casimir de W, tandis que l'application linéaire qu'il induit sur le quotient V/W est l'opérateur de Casimir de V/W, donc est nul. Cela entraîne que $C(V) \subset W$ et que la restriction à W de C est inversible, car W est isomorphe à une représentation $V(n)$, $n \geqslant 1$. Comme C commute à l'image de φ, son noyau est un sous-espace stable de V ; c'est un supplémentaire de W.

Cas général. Si W est irréductible, on conclut par l'un des deux cas précédents. Considérons sinon un sous-espace vectoriel stable non trivial $U \subset W$ de dimension minimale, de sorte que la sous-représentation de φ sur U est irréductible. Le sous-espace stable W/U de la représentation quotient V/U est de codimension 1; comme $\dim U > 0$, il admet un supplémentaire par l'hypothèse de récurrence. Il existe ainsi un sous-espace stable $M \subset V$ tel que $V/U = M/U \oplus W/U$. Alors, U est un sous-espace stable de codimension 1 de la sous-représentation sur M déduite de φ. Comme $\dim U < \dim V$, l'espace U admet par récurrence un supplémentaire stable dans M, lequel est automatiquement un supplémentaire (stable) de W dans V. □

Par suite, toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ est une somme directe

$$V = \bigoplus_{p \geqslant 0} V(p)^{d_p}.$$

La *multiplicité* d_p de la représentation $V(p)$ dans la représentation V se détermine aisément en considérant les valeurs propres de $\varphi(H)$. En effet, comme les valeurs propres de H agissant sur $V(n)$ sont les entiers $n - 2m$, avec $0 \leqslant m \leqslant n$, celles de $\varphi(H)$ sont des entiers et pour tout entier $k \geqslant 0$, les multiplicités des valeurs propres k et $-k$ sont toutes deux égales à $d_k + d_{k+2} + \dots$. Cela permet de décomposer explicitement certaines représentations. Voici un exemple.

THÉORÈME 6.8 (Formule de Clebsch-Gordan). — *Si m et n sont deux entiers positifs ou nuls, on a*

$$V(m) \otimes V(n) \simeq \bigoplus_{p=|m-n|}^{m+n} V(p).$$

Proof. — L'action de H sur $V(m) \otimes V(n)$ se fait par la formule

$$H \cdot (v \otimes w) = (H \cdot v) \otimes w + v \otimes (H \cdot w).$$

Ses valeurs propres sont les sommes d'une valeur propre de H sur $V(m)$ et d'une valeur propre de H sur $V(n)$, comptées avec multiplicités: ce sont les $(m - 2p + n - 2q)$, avec $0 \leqslant p \leqslant m$ et $0 \leqslant q \leqslant n$. Supposons $m \leqslant n$; alors $m+n-2k$ est valeur propre avec la multiplicité $k+1$ si $k \leqslant m$, avec la multiplicité

$m+1$ si $m \leqslant k \leqslant n$, et avec la multiplicité $m+n+1-k$ si $n \leqslant k \leqslant m+n$. Le second membre de la formule donnée est une représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ sur laquelle H agit avec les mêmes valeurs propres, avec les mêmes multiplicités, d'où le théorème. □

6.9. Considérons maintenant une représentation analytique complexe ρ de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie V. Soit φ sa différentielle, elle est $\mathbf{C}$-linéaire par hypothèse. C'est ainsi une représentation l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ sur V.

Soit $W \subset V$ un sous-espace stable de ρ; il est alors stable par φ. Inversement, le calcul de l'exponentielle d'une matrice par blocs montre que, si W est stable par φ, alors W est stable par l'image de l'exponentielle, donc par le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ qu'elle engendre. Comme $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ est connexe (il est engendré par l'ensemble connexe des matrices de transvections), W est un sous-espace stable de ρ. Autrement dit, *ρ est irréductible si et seulement si sa différentielle l'est.* De même, tout supplémentaire de W qui est stable par $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ est un supplémentaire de W, stable par ρ. Puisque les représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ sont semi-simples, la représentation ρ est semi-simple.

Nous avons déterminé toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ et démontré qu'elles proviennent toutes de représentations holomorphes du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. Toute représentation holomorphe irréductible de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ est donc isomorphe à l'une des $V(n)$. De plus, toute représentation holomorphe de dimension finie de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ est somme directe de représentation irréductibles.

Exercices. — 1) Soit V, W deux espaces vectoriels de dimension finie, $A \in \mathrm{End}(V)$, $B \in \mathrm{End}(W)$, de valeurs propres $a_1, \dots, a_m$ et $b_1, \dots, b_n$ respectivement. Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme $A \otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_V \otimes B$ de $V \otimes W$ sont, comptées avec multiplicité, les $a_i + b_j$, avec $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$. (Se ramener au cas où les a_i et b_j sont distincts par le principe de prolongement des identités algébriques; considérer alors des bases formées de vecteurs propres.

2) Calculer de même le spectre de l'endomorphisme $A \otimes B$ de $V \otimes W$ (même méthode.) Une autre approche consiste à expliciter la décomposition de Dunford–Jordan de $A \otimes B$ à partir de celles de A et B.

3) Décomposer les représentations $\mathrm{Sym}^m V(n)$ et $\bigwedge^m V(n)$, pour m et $n \geqslant 0$.

4) Montrer que la contragrédiente de $V(n)$ est isomorphe à $V(n)$; déterminer l'ensemble des isomorphismes de l'une sur l'autre.

CHAPTER 3

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES COMPACTS

Ce chapitre est de nature plus analytique et culmine avec le théorème de PETER-WEYL, généralisation aux groupes topologiques compacts de la théorie des séries de Fourier. Nous allons voir que les représentations irréductibles d'un groupe compact sont de dimension finie et que toute représentation unitaire sur un espace de Hilbert (séparable) est somme directe hilbertienne de représentations irréductibles.

§1. Mesure de Haar

1.1. Si X est un espace topologique localement compact, on identifiera mesures de Radon positives sur X et formes linéaires positives sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}_c(X)$ des fonctions continues à support compact sur X.

Supposons qu'un tel espace soit muni d'une action à gauche d'un groupe G; si $g \in G$, notons $\lambda_g \colon X \to X$ l'application $x \mapsto g \cdot x$ (translation). Une mesure μ sur X est dite *invariante* (à gauche) si l'on a $(\lambda_g)_* \mu = \mu$ pour tout $g \in G$. Cela revient à dire que $\int_X f(gx)\, d\mu(x) = \int_X f(x)\, d\mu(x)$ pour toute fonction continue à support compact f sur X et tout $g \in G$.

Il y a une notion analogue de mesure invariante lorsqu'on a une action à droite, et une notion de mesure bi-invariante si l'on a deux actions, l'une à droite et l'autre à gauche. Cela s'applique en particulier lorsque $X = G$, muni de ses deux actions par translation à gauche et à droite.

THÉORÈME 1.2. — *Soit G un groupe topologique compact. Il existe une unique mesure de probabilité invariante à gauche sur G. Cette mesure est aussi invariante à droite.*

En fait, on peut démontrer que tout groupe topologique localement compact possède une mesure invariante à gauche, unique à un scalaire près, qu'on appelle *mesure de Haar*. (C'est HAAR qui, le premier, en a démontré l'existence sous des hypothèses un peu restrictives ; l'unicité est due à VON NEUMANN.) L'unique mesure de probabilité bi-invariante sur un groupe compact est parfois appelée *mesure de Haar normalisée.*

Proof. — Nous supposerons que G est métrisable. L'espace de Banach $\mathscr{C}(G)$ des fonctions continues sur G est alors séparable ; fixons une suite (f_n) de fonctions continues sur G qui est dense dans sa boule unité. Munissons le dual de $\mathscr{C}(G)$ de la topologie faible-*, c'est-à-dire de la topologie de la convergence simple. Cette topologie est définie par les semi-normes $\mu \mapsto |\mu(f_n)|$, donc par la distance d définie par

$$d(\mu, \nu) = \sum_n 2^{-n} \left|(\mu - \nu)(f_n)\right|.$$

pour laquelle cette boule unité est compacte (théorème de Banach-Alaoglu, conséquence du théorème de Tychonov). Soit en effet une suite (μ_i) de mesures vérifiant $\|\mu_i\| \leqslant 1$ pour tout i. La suite $(\mu_i(f_1))_i$ est alors bornée, donc admet une sous-suite convergente $(\mu_{\varphi_1(i)}(f_1))$. Par récurrence, il existe une fonction strictement croissante $\varphi_k\colon \mathbf{N}\to\mathbf{N}$ telle que la suite $(\mu_{\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_k(i)}(f_k))$ converge. Posons $\varphi(i)=\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_i(i)$; la suite $(\mu_{\varphi(i)})(f_k))$ converge ainsi pour tout entier k. Comme la suite $(\mu_{\varphi(i)})$ est équicontinue et qu'elle converge (simplement) sur la partie dense $\{f_1,\dots\}$, elle converge en tout point vers une forme linéaire μ, nécessairement de norme $\leqslant 1$. Cela montre que la suite (μ_i) converge vers μ pour la topologie faible-*.

En particulier, l'ensemble $\mathscr{P}$ des mesures de probabilité sur G, muni de cette topologie, est une partie convexe et compacte de l'espace des mesures. L'application φ de $\mathscr{P}$ dans $\mathbf{R}_+$ définie par

$$\varphi(\mu)=\sum_n 2^{-n}\left|\mu(f_n)\right|$$

est continue, convexe, et même strictement convexe. Supposons en effet que $\varphi(t\mu+(1-t)\nu)=t\varphi(\mu)+(1-t)\varphi(\nu)$ pour $\mu,\nu\in\mathscr{P}$ et $t\in[0,1]$. Alors, $\mu(f_n)$ et $\nu(f_n)$ sont de même signe pour tout n. Par suite, pour toute fonction $f\in\mathscr{C}(G)$, $\mu(f)$ et $\nu(f)$ sont de même signe. Cela entraîne que μ et ν sont proportionnelles, donc égales car ce sont des mesures de probabilité.

Le groupe G agit sur $\mathscr{P}$ par translation à gauche et à droite; ces actions seront notées λ et δ. Posons alors pour $\mu\in\mathscr{P}$,

$$\Phi(\mu)=\sup_{g\in G}\varphi((\lambda_g)_*\mu).$$

La fonction Φ est semi-continue inférieurement (comme sup de fonctions continues), convexe (comme sup de fonctions convexes). Comme $\mathscr{P}$ est compact, l'ensemble des mesures $\mu\in\mathscr{P}$ telles que $\Phi(\mu)=\inf\Phi$ est une partie $\mathscr{P}_0$, convexe, compacte, non vide de $\mathscr{P}$. Par construction, Φ est G-invariante : $\Phi((\lambda_g)_*\mu)=\Phi(\mu)$ pour tout $g\in G$. Par suite, $\mathscr{P}_0$ est stable par l'action de G.

Remarquons que l'application $g\mapsto(\lambda_g)_*\mu$ est continue. En effet, si $f\in\mathscr{C}(G)$ et si (g_n) est une suite d'éléments de G qui converge vers g, $\int_G f(g_nx)\,d\mu(x)$ converge vers $\int_G f(gx)\,d\mu(x)$ par convergence dominée (uniforme, même!). Comme G est compact, la borne supérieure qui définit Φ est un maximum. Cela entraîne que Φ est strictement convexe et donc que $\mathscr{P}_0$ est un singleton, d'où l'existence d'une mesure de probabilité invariante à gauche sur G.

Par le même argument, G possède des mesures de probabilité invariantes à droite; on peut aussi pousser une mesure invariante à gauche par l'anti-isomorphisme $g\mapsto g^{-1}$. Soit ainsi μ et ν des mesures de probabilité invariantes, respectivement à gauche et à droite, sur G.

Soit $f\in\mathscr{C}(G)$. Nous allons calculer l'intégrale double $\int_{G\times G}f(yx)\,d\mu(x)\,d\nu(y)$ de deux manières. On a en effet

$$\int_{G\times G}f(yx)\,d\mu(x)\,d\nu(y)=\int_G\left(\int_G f(yx)\,d\mu(x)\right)d\nu(y)=\int_G\mu(f)\,d\nu(y)=\mu(f)$$

car μ est invariante à gauche et ν est de masse totale 1. De même, on a

$$\int_{G\times G}f(yx)\,d\mu(x)\,d\nu(y)=\int_G\left(\int_G f(yx)\,d\nu(y)\right)d\mu(x)=\int_G\nu(f)\,d\mu(x)=\nu(f)$$

car ν est invariante à droite et μ est de masse totale 1. Il en résulte que $\mu=\nu$. Cela prouve à la fois l'unicité d'une mesure de probabilité invariante à gauche (resp. à droite) sur G et sa bi-invariance. □

1.3. Le cas des groupes de Lie. — Lorsque G est un groupe de Lie, on peut utiliser la structure de variété de G pour décrire de manière commode une classe de mesures et en déduire une démonstration relativement simple de l'existence d'une mesure invariante à gauche sur G.

Une structure de variété riemannienne sur une variété différentielle M est la donnée, pour tout point $x\in M$, d'un produit scalaire euclidien sur T_xM, de sorte que si X et Y sont des champs de vecteurs locaux sur un ouvert U de M, la fonction de U dans $\mathbf{R}$ définie par $x\mapsto\langle X(x),Y(x)\rangle_x$ soit $\mathscr{C}^\infty$. Dans une carte (U,φ), il existe des champs de vecteurs $X_1,\dots,X_n$ qui forment une base de T_xM en tout point $x\in U$ (on a noté $n=\dim M$) — on dit que le fibré tangent est trivialisé. Alors, sur U, la structure riemannienne est donnée par l'application $\mathscr{C}^\infty$ $g\colon U\to M_n(\mathbf{R})$, qui à $x\in U$, associe la matrice g_x du produit scalaire sur T_xX dans cette base.

Soit (M,g) une variété riemannienne.

Soit f une fonction à support compact, contenu dans l'image d'une paramétrisation[1] (U,φ). On définit $\int_M f$ par la formule

$$\int_M f = \int_U f(\varphi(x))\sqrt{\det g_U(x)}\,dx_1\dots dx_n.$$

Elle ne dépend pas de la paramétrisation choisie. En effet, si α est un difféomorphisme de U sur V, et $\psi = \varphi\circ\alpha$, on a

$$\int_U f(\varphi(x))\sqrt{\det g_U(x)}\,dx_1\dots dx_n = \int_V f(\psi(\alpha(y))\sqrt{\det g_U(\alpha(y))}\,\left|J\alpha(y)\right|\,dy_1\dots dy_n,$$

où $J\alpha$ est le jacobien de α. D'autre part, on a $\det g_V(y) = \deg g_U(\alpha(y))J\alpha(y)^2$, d'où la formule

$$\int_U f(\varphi(x))\sqrt{\det g_U(x)}\,dx_1\dots dx_n = \int_V f(\psi(y))\sqrt{\det g_V(y)}\,dy_1\dots dy_n.$$

Si f est à support compact, ou bien si f est positive, on peut l'écrire comme somme, finie dans le premier cas, de fonctions à support dans des ouverts de cartes, positives dans le second cas. Cela permet d'intégrer de telles fonctions.

Supposons maintenant que G soit un groupe de Lie. Fixons un produit scalaire sur T_eG. On peut alors en déduire une structure riemannienne invariante à gauche sur G en utilisant la translation à droite pour obtenir un produit scalaire sur T_gG, pour $g\in G$. Il en résulte une mesure invariante à gauche sur G. Remarquons qu'un autre produit scalaire sur T_eG fournirait une mesure multiple de celle-ci: la matrice de passage d'un produit scalaire à l'autre serait constante, donc son déterminant aussi.

1.4. Exemples. —

§2. Généralités sur les représentations continues des groupes topologiques

2.1. Soit (ρ, V) une représentation d'un groupe G. Si G est muni d'une topologie de groupe et si V est muni d'une structure d'espace vectoriel topologique, on dit que la représentation ρ est continue si l'application de $G\times V$ dans V donnée par $(g,v)\mapsto \rho(g)(v)$ est continue. Cela entraîne que pour tout $g\in G$, l'application linéaire $\rho(g)$ est continue. Cela entraîne aussi que pour tout $v\in V$ et tout $\varphi\in V^*$, la fonction sur G donnée par $g\mapsto\varphi(\rho(g)(v))$ est continue.

Si V est de dimension finie, chacun des coefficients matriciels de la matrice de $\rho(g)$ dans une base fixée de V est une fonction continue de $g\in G$. L'application $\rho\colon G\to \mathrm{GL}(V)$ est alors continue.

Si V est de dimension infinie, l'application ρ n'est en général pas continue (exercice 2).

2.2. Soit (ρ, V) une représentation continue d'un groupe topologique G sur un espace vectoriel normé. L'application de $G\times V$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $(g,v)\mapsto \left\|\rho(g)(v)\right\|$ est continue; elle envoie $G\times\{0\}$ sur 0. Il existe donc un voisinage ouvert Ω de l'élément neutre dans G et un réel $\delta>0$ tels que $\left\|\rho(g)(v)\right\|\leqslant 1$ si $g\in\Omega$ et $\|v\|\leqslant\delta$. En particulier, $\left\|\rho(g)\right\|\leqslant 1/\delta$ si $g\in\Omega$.

Supposons que G soit compact. On peut alors recouvrir G par un nombre fini d'ouverts G de la forme Ωg_i. Il en résulte que $\left\|\rho(g)\right\|\leqslant \max\left\|\rho(g_i)\right\|/\delta$, si bien que les normes des applications linéaires $\rho(g)$ sont uniformément bornées lorsque $g\in G$. Appliquant ceci à l'application linéaire $\rho(g)^{-1}=\rho(g^{-1})$, on en déduit qu'il existe deux réels strictement positifs m et M tels que

$$m\|v\|\leqslant\left\|\rho(g)(v)\right\|\leqslant M\|v\|$$

pour tout $g\in G$ et tout $v\in V$.

[1] c'est-à-dire dans un ouvert de carte: avec les notations de ce paragraphe, $(\varphi(U),\varphi^{-1})$ est une carte.

2.3. Soit (ρ, V) une représentation continue d'un groupe topologique sur un espace vectoriel topologique (en général un espace vectoriel normé). Nous ne considérerons en général que les sous-espaces fermés de V. La représentation ρ sera par exemple dite irréductible si V n'a pas de sous-espace vectoriel fermé stable non trivial. L'adhérence d'un sous-espace stable (non nécessairement fermé) est encore stable. L'irréductibilité au sens usuel entraîne ainsi l'irréductibilité au sens des représentations continues, mais la réciproque n'est pas vraie en général[(2)]. En dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé, si bien que ces deux notions sont équivalentes.

2.4. Si (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) sont deux représentations continues de G, un opérateur d'entrelacement entre ρ_1 et ρ_2, ou un morphisme de la représentation ρ_1 vers la représentation ρ_2 est une application linéaire *continue* $f\colon V_1 \to V_2$ telle que $\rho_2(g) \circ f = f \circ \rho_1(g)$ pour tout $g \in G$.

Les constructions tensorielles usuelles sont définies dans ce contexte, pour autant qu'elles ne mettent en jeu qu'un nombre fini de représentations.

Exercices. — 1) Soit G un groupe topologique localement compact et soit ρ une représentation de G sur un espace de Banach V telle que :

(i) pour tout $g \in G$, l'application $v \mapsto \rho(g)(v)$ est continue;
(ii) pour tout $v \in V$, l'application $g \mapsto \rho(g)(v)$ est continue.

Démontrer à l'aide du théorème de Banach-Steinhaus qu'il existe un voisinage Ω de l'élément neutre dans G et un réel $C > 0$ tels que l'on ait $\|\rho(g)\| \leqslant C$ pour tout $g \in \Omega$. En déduire que ρ est une représentation continue.
2) Considérons la représentation ρ obtenue en faisant agir le groupe $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ agissant sur l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ par translations. Montrer qu'elle est continue et que pour tout $g \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $\rho(g)$ est un automorphisme unitaire de H. Calculer la norme de $\rho(g) - \mathrm{id}_H$ lorsque $g \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est la classe d'un nombre irrationnel. En conclure que l'application $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathrm{GL}(H)$ n'est pas continue.

§3. Unitarisation

3.1. Soit G un groupe compact, muni de son unique mesure de probabilité bi-invariante. Soit V un espace vectoriel de dimension finie (sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) et soit $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation continue.

Soit π l'endomorphisme de V donné par

$$\pi(v) = \int_G \rho(g)(v)\,dg, \qquad (v \in V).$$

Si $h \in G$ et $v \in V$, on a

$$\rho(h)(\pi(v)) = \int_G \rho(hg)(v)\,dg = \pi(v),$$

si bien que l'image de π est contenue dans l'espace V^G des vecteurs invariants par G. Inversement, si $\rho(g)(v) = v$ pour tout $g \in G$, on a $\pi(v) = v$. Cela prouve que π est un projecteur sur V^G dans V.

Si de plus C est une partie convexe de V stable par ρ, on constate que $\pi(C) \subset C$.

3.2. Soit W un sous-espace stable de V et appliquons cet argument à la représentation de G sur $\mathrm{End}(V)$ déduite de ρ, prenant pour C l'espace affine des projecteurs dans V sur W (qui est stable par G car pour tout projecteur p d'image W et tout $g \in G$, $\rho(g) \circ \rho(g)^{-1}$ est un projecteur dans V d'image $\rho(g)(W) = W$). Il existe ainsi un projecteur G-invariant sur W dans V; son noyau est un supplémentaire stable de W.

COROLLAIRE. — *Toute représentation continue de dimension finie d'un groupe compact est semi-simple.*

[(2)] Trouver un exemple?

3.3. Si (ρ, V) est une représentation continue de G, G agit sur l'espace $V^* \otimes V^*$ des formes bilinéaires sur V, resp. sur l'espace $\overline{V}^* \otimes V^*$ des formes sesquilinéaires sur V si le corps de base est $\mathbf{C}$. Les produits scalaires (resp. hermitiens) en forment une partie convexe, d'où l'existence d'un produit scalaire (hermitien) invariant sur V. Par suite, la représentation (ρ, V) est isomorphe à une représentation *unitaire*, c'est-à-dire une représentation dont l'image est formée d'applications unitaires.

Du point de vue matriciel, cela montre que tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ ou de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ (resp. du groupe unitaire $\mathrm{U}_n(\mathbf{C})$).

Lorsque V est de dimension infinie, adapter cet argument requiert apparemment la théorie, un peu subtile, des mesures vectorielles. Nous procéderons directement.

PROPOSITION 3.4. — *Soit G un groupe compact, muni de son unique mesure de probabilité bi-invariante. Soit V un espace de Hilbert (réel ou complexe) et soit $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation continue. Alors V possède un produit scalaire G-invariant qui définit une norme équivalente à la norme hilbertienne initiale. La représentation (ρ, V) est donc isomorphe à une représentation unitaire.*

Proof. — Notons q le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme initiaux sur V. Comme G est compact, on a démontré qu'il existe deux réels $m > 0$ et $M > 0$ tels que

$$m \leqslant \|\rho(g)\| \leqslant M$$

pour tout $g \in G$. Posons, pour v et $w \in V$,

$$q_1(v, w) = \int_G q(\rho(g)(v), \rho(g)(w))\, dg.$$

Il est immédiat que cela définit une forme bilinéaire (sesquilinéaire) sur V et que

$$m\|v\|^2 \leqslant q_1(v, v) \leqslant M\|v\|^2$$

pour tout $v \in V$. Par suite, q_1 est un produit scalaire équivalent au produit scalaire initial sur V. Notons V_1 l'espace V muni de q_1; c'est un espace de Hilbert et la représentation (ρ, V) est isomorphe à la représentation (ρ, V_1). Enfin, q_1 est G-invariant, ce qui montre que cette représentation est unitaire. □

Exercices. — 1) Soit (ρ, V) une représentation d'un groupe G sur un $\mathbf{C}$ espace vectoriel. L'espace vectoriel conjugué de V, noté $\bar{V}$, a même groupe additif mais la loi externe est "tordue" par la conjugaison complexe: si $v \in \bar{V}$, $\lambda \cdot v = \bar{\lambda} v$. La représentation conjuguée de ρ est la représentation de G sur $\bar{V}$ donnée par les mêmes applications $\rho(g)$. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de V, la matrice de $\bar{\rho}(g)$ dans la base correspondante de $\bar{V}$ est la conjuguée de celle de $\rho(g)$.
2) Une forme sesquilinéaire sur un espace vectoriel complexe V s'identifie à une application linéaire $\bar{V} \to V^*$. Une forme sesquilinéaire invariante sur une représentation (ρ, V) s'identifie à un opérateur d'entrelacement $\bar{V} \to V^*$.
3) Soit ρ une représentation irréductible d'un groupe compact G sur un espace vectoriel complexe de dimension finie V. Montrer que deux produits scalaires invariants sur V sont proportionnels.

§4. Coefficients matriciels, caractères

4.1. Soit G un groupe compact ; notons $\mathscr{C}(G)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur G et $L^2(G)$ l'espace de Hilbert des fonctions (à valeurs complexes, mesurables, modulo l'égalité presque partout) sur G qui sont de carré intégrable pour la mesure de probabilité invariante. Comme G est compact, $\mathscr{C}(G)$ est un sous-espace dense de $L^2(G)$.

4.2. Soit (ρ, V) une représentation continue de G sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie V. Nous désignerons par $\mathscr{C}(\rho)$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(G)$ engendré par les coefficients matriciels de ρ dans une base fixée de V. C'est aussi l'espace vectoriel engendré par les fonctions de la forme $g \mapsto \varphi(\rho(g)(v))$ pour $v \in V$ et $\varphi \in V^*$. Il ne dépend donc pas de la base choisie. En particulier, si ρ' est une représentation isomorphe à ρ, les espaces $\mathscr{C}(\rho)$ et $\mathscr{C}(\rho')$ sont égaux.

Puisque G est compact, toute représentation ρ est somme directe de représentations irréductibles ρ_i. L'espace $\mathscr{C}(\rho)$ est alors la somme des espaces $\mathscr{C}(\rho_i)$ dans $\mathscr{C}(G)$.

La fonction constante égale à 1 est le coefficient matriciel de la représentation triviale.

Si ρ_1 et ρ_2 sont deux représentations de dimension finie, les coefficients matriciels de la représentation $\rho_1\otimes\rho_2$ (dans une base formée de tenseurs décomposés) sont les produits d'un coefficient matriciel de ρ_1 et de ρ_2. Il en résulte que l'espace $\mathscr{C}(\rho_1\otimes\rho_2)$ est le produit des espaces $\mathscr{C}(\rho_1)$ et $\mathscr{C}(\rho_2)$ dans $\mathscr{C}(G)$.

Les coefficients matriciels de la représentation $\operatorname{Hom}(\rho_1,\rho_2)$ sont engendré par les fonctions de la forme $f_1(g^{-1})f_2(g)$, où f_1 est un coefficient matriciel de ρ_1 et f_2 un coefficient matriciel de ρ_2. Si ρ_1 et ρ_2 sont unitaires, $\rho_1(g^{-1})=\rho^*(g)$, si bien que les coefficients matriciels de $\operatorname{Hom}(\rho_1,\rho_2)$ sont engendrés par les fonctions de la forme $\overline{f_1}f_2$, avec $f_1\in\mathscr{C}(\rho_1)$ et $f_2\in\mathscr{C}(\rho_2)$. En particulier, les coefficients matriciels de la représentation contragrédiente ρ^* sont les conjugués des coefficients matriciels de ρ.

Notons $\mathscr{R}(G)$ la somme des espaces $\mathscr{C}(\rho)$ dans $\mathscr{C}(G)$, lorsque ρ parcourt les (classes d'isomorphisme) représentations de dimension finie de G. Il résulte de ce qui précède que $\mathscr{R}(G)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{C}(G)$ stable par la conjugaison complexe.

4.3. Soit ρ une représentation de G sur un espace vectoriel de dimension finie V. Rappelons que nous avions défini un projecteur π d'image V^G dans V, donné par la formule

$$\pi(v)=\int_G \rho(g)(v)\,dg,\qquad (v\in V).$$

Si $V^G=0$, c'est-à-dire si V ne contient pas la représentation triviale, on a alors $\pi=0$: les fonctions de $\mathscr{C}(\rho)$ sont de moyenne nulle.

4.4. Relations d'orthogonalité de Schur. — Appliquons ceci au cas à une représentation ρ de la forme $\operatorname{Hom}(\rho_1,\rho_2)$, où ρ_1 et ρ_2 sont deux représentations unitaires irréductibles de G. Les coefficients matriciels de ρ sont engendrés par les fonctions de la forme $\overline{f_1}f_2$, où f_1 et f_2 sont des coefficients matriciels de ρ_1 et ρ_2 respectivement. Si ρ_1 et ρ_2 ne sont pas isomorphes, on a $\operatorname{Hom}(\rho_1,\rho_2)^G=0$. Par suite, les espaces $\mathscr{C}(\rho_1)$ et $\mathscr{C}(\rho_2)$ sont orthogonaux dans $L^2(G)$.

Soit (ρ,V) une représentation unitaire irréductible de G et appliquons ceci à la représentation $\operatorname{Hom}(\rho,\rho)$. D'après le lemme de Schur, $\operatorname{Hom}(\rho,\rho)^G$ est l'ensemble des homothéties de V. Soit $f\in\operatorname{End}(V)$; il existe un élément $c(f)\in\mathbf{C}$ tel que $\pi(f)=c(f)\operatorname{id}_V$. Pour calculer $c(f)$, rappelons que, par définition, G agit sur f par

$$g\cdot(f)=\rho(g)\circ f\circ\rho(g^{-1})$$

pour $g\in G$, si bien que

$$(\dim V)c(f)=\operatorname{tr}\pi(f)=\int_G \operatorname{tr}\big(\rho(g)\circ f\circ\rho(g)^{-1}\big)\,dg=\int_G \operatorname{tr}(f)\,dg=\operatorname{tr}(f),$$

d'où l'égalité

$$\int_G \rho(g)\circ f\circ\rho(g)^{-1}\,dg=\frac{1}{\dim V}\operatorname{tr}(f)\operatorname{id}_V. \tag{4.5}$$

Considérons le cas particulier de l'application linéaire $f\colon v\mapsto\langle\alpha,v\rangle\beta$ dont la trace est $\langle\alpha,\beta\rangle$. (Dans l'identification $\operatorname{End}(V)\simeq V^*\otimes V$, f correspond au tenseur décomposé $(\langle\alpha,\cdot\rangle)\otimes\beta$.) Il vient, pour $v\in V$ et $w\in V$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\dim V}\langle\alpha,\beta\rangle\langle v,w\rangle &=\int_G\langle v,\rho(g)\circ f\circ\rho(g)^{-1}(z)\rangle\,dg\\ &=\int_G\langle\rho(g^{-1})(v),f\circ\rho(g^{-1})(w)\rangle\,dg\\ &=\int_G\langle\rho(g)(v),f\circ\rho(g)(w)\rangle\,dg\\ &=\int_G\big\langle\rho(g)(v),\langle\alpha,\rho(g)(w)\rangle\beta\big\rangle\,dg\\ &=\int_G\langle\rho(g)(v),\beta\rangle\,\langle\alpha,\rho(g)(w)\rangle\,dg\\ &=\int_G\langle\alpha,\rho(g)(w)\rangle\,\overline{\langle\beta,\rho(g)(v)\rangle}\,dg.\end{aligned}$$

Soit $n = \dim V$ et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de V. Soit $(\rho_{ij}(g))$ la matrice de $\rho(g)$ dans cette base. Si $\alpha = e_i$ et $w = e_j$, on a $\langle \alpha, \rho(g)(w) \rangle = \rho_{ij}(g)$. Les relations précédentes entraînent donc: *lorsque* $1 \leqslant i, j \leqslant n$, *les fonctions* $\sqrt{\dim V}\rho_{ij}$ *sur* G *forment une base orthonormée de* $\mathscr{C}(\rho)$. En particulier, $\dim \mathscr{C}(\rho) = (\dim V)^2$.

4.6. Caractères. — Soit ρ une représentation continue d'un groupe compact sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle *caractère* de ρ la fonction continue $g \mapsto \operatorname{tr} \rho(g)$ sur G. On la note parfois χ_ρ.

Si ρ est la somme des représentations ρ_1 et ρ_2, son caractère est la somme des caractères de ρ_1 et ρ_2.

Si ρ_1 et ρ_2 sont deux représentations isomorphes, on a $\operatorname{tr} \rho_1(g) = \operatorname{tr} \rho_2(g)$, car si f est un isomorphisme $V_1 \to V_2$, $\rho_2(g) = f \circ \rho_1(g) \circ f^{-1}$ et $\rho_1(g)$ ont même trace. Dans la suite, on pourra en particulier se limiter aux caractères des représentations unitaires. On en déduit ainsi que, χ désignant le caractère d'une représentation ρ, le caractère de la représentation contragrédiente ρ^* est la fonction $g \mapsto \chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

On a

$$\int_G \left|\chi_\rho(g)\right|^2 dg = \int_G \left| \sum_{i=1}^{\dim V} \rho_{ii}(g) \right| dg = \sum_{i=1}^{\dim V} \frac{1}{\dim V} = 1.$$

De plus, si ρ_1 et ρ_2 sont deux représentations continues irréductibles non isomorphes, leurs caractères sont donc orthogonaux dans $L^2(G)$ puisque le caractère d'une représentation ρ est un élément de $\mathscr{C}(\rho)$. *Les caractères d'une famille de représentations irréductibles deux à deux non isomorphes forment donc une famille orthonormale.*

Rappelons que toute représentation de dimension finie d'un groupe compact est somme directe de représentations irréductibles. Soit (ρ, V) une représentation, et soit $\rho \simeq \sum \rho_i^{n_i}$ une décomposition de ρ en somme directe de représentations irréductibles deux à deux non isomorphes. On a ainsi

$$\chi_\rho(g) = \sum_i n_i \chi_{\rho_i}(g).$$

Multiplions cette relation par $\overline{\chi_{\rho_j}}$ et intégrons la sur G; il vient

$$n_j = \int_G \overline{\chi_{\rho_j}}(g) \chi_\rho(g)\, dg.$$

Par conséquent, *deux représentations de dimension finie d'un groupe compact qui ont même caractère sont isomorphes.*

Calculons aussi la norme du caractère d'une représentation ρ. On a

$$\int_G \left|\chi_\rho(g)\right|^2 dg = \sum_i n_i^2.$$

En particulier, *une représentation ρ d'un groupe compact est irréductible si et seulement son caractère est de norme* 1.

4.7. Produits de groupes. — Soit G_1 et G_2 deux groupes compacts, soit (ρ_1, V_1) une représentation de G_1 et soit (ρ_2, V_2) une représentation de G_2 (toutes deux continues et de dimension finie). Le groupe $G = G_1 \times G_2$ est alors muni d'une représentation continue sur l'espace vectoriel $V = V_1 \otimes V_2$, en posant, pour $g = (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$,

$$\rho(g) = \rho_1(g_1) \otimes \rho_2(g_2).$$

Notons $(\rho^1_{ij}(g_1))$ la matrice de $\rho_1(g_1)$ dans une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V_1, et $\rho^2_{ij}(g_2)$ la matrice de $\rho_2(g_2)$ dans une base $(f_1, \dots, f_m)$ de V_2. Dans la base formée des $e_i \otimes f_j$, la matrice de ρ est égale à $(\rho^1_{ii'}(g_1)\rho^2_{jj'}(g_2))$. Par suite, le caractère de ρ est donné par

$$\chi_\rho(g) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \rho^1_{ii}(g_1)\rho^2_{jj}(g_2) = \chi_{\rho_1}(g_1)\chi_{\rho_2}(g_2).$$

Par suite, $\rho_1 \otimes \rho_2$ est irréductible si ρ_1 et ρ_2 le sont (voir aussi l'exercice 3, p. 26).

Inversement, considérons une représentation irréductible (ρ, V) du groupe G. La représentation du groupe $G_1 \subset G$ qu'elle définit par restriction est semi-simple: il existe des représentations irréductibles (V_i) de G_1, deux à deux distinctes, telle que l'application linéaire

$$\bigoplus_i V_i \otimes \operatorname{Hom}_{G_1}(V_i, V) \to V$$

soit un isomorphisme. Pour tout i, l'action de G_2 sur V permet d'en déduire une sur $\operatorname{Hom}_{G_1}(V_i, V)$, d'où une action de $G_1 \times G_2$ sur $V_i \otimes \operatorname{Hom}_{G_1}(V_i, V)$, de sorte que cette application linéaire soit un morphisme de représentations de G. Si V est irréductible, il n'y a qu'un facteur, ce qui montre que (ρ, V) est isomorphe à une représentation de la forme $\rho_1 \otimes \rho_2$, où les deux représentations ρ_1 et ρ_2 sont nécessairement irréductibles.

§5. Le théorème de Peter-Weyl

5.1. La représentation (bi-)régulière. — Soit G un groupe compact et munissons le de son unique mesure de probabilité bi-invariante. L'espace de Hilbert $L^2(G)$ est alors doté de deux actions de G, l'une par translation à droite, l'autre par translation à gauche:

$$\mathrm{r}(g_1, g_2)(f) = \left(g \mapsto f(g_1^{-1} g g_2)\right).$$

Montrons que *c'est une représentation unitaire continue de $G \times G$*, que nous appellerons *représentation bi-régulière de $G \times G$*. On en déduit deux représentations de G sur $L^2(G)$, par translations à droite ou à gauche; on les appelle la *représentation régulière droite* et la *représentation régulière gauche* de G.

Tout d'abord, $\mathrm{r}(g_1, g_2)(f)$ appartient à $L^2(G)$ et est de même norme que f, car la mesure dg est bi-invariante. Ainsi, $\mathrm{r}(g_1, g_2)$ est un automorphisme unitaire de $L^2(G)$. Pour montrer que r est une représentation continue, il suffit alors de montrer que, $f \in L^2(G)$ étant fixée, l'application $(g_1, g_2) \mapsto \mathrm{r}(g_1, g_2)(f)$ est continue de $G \times G$ dans $L^2(G)$. Quitte à remplacer f par $\mathrm{r}(h_1, h_2)(f)$, il suffit de montrer la continuité en l'élément neutre.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathscr{C}(G)$ est dense dans $L^2(G)$, il existe une fonction continue $\varphi \in \mathscr{C}(G)$ telle que $\left\|f - \varphi\right\|_2 \leqslant \varepsilon$. Puisque G est compact, φ est uniformément continue et il existe un voisinage Ω de l'élément neutre de G tel que $\Omega = \Omega^{-1}$ et tel que $\left|\varphi(g) - \varphi(h)\right| \leqslant \varepsilon$ si $g^{-1}h \in \Omega$. Alors, si $g_1, g_2 \in \Omega$ et $g \in G$,

$$\left|\varphi(g_1^{-1} g g_2) - \varphi(g)\right| \leqslant \left|\varphi(g_1^{-1} g g_2) - \varphi(g g_2)\right| + \left|\varphi(g g_2) - \varphi(g)\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

Par suite, on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\left\|\mathrm{r}(g_1, g_2)(\varphi) - \varphi\right\|_2 \leqslant 2\varepsilon,$$

et donc

$$\left\|\mathrm{r}(g_1, g_2)(f) - f\right\|_2 \leqslant 4\varepsilon.$$

Cela montre que l'application $(g_1, g_2) \mapsto \mathrm{r}(g_1, g_2)(f)$ est continue en l'élément neutre de $G \times G$ et termine la démonstration de ce que la représentation bi-régulière de $G \times G$ sur $L^2(G)$ est une représentation unitaire continue.

5.2. Soit (ρ, V) une représentation irréductible de dimension finie d'un groupe compact G. Considérons la représentation de $G \times G$ sur $V^* \otimes V$ définie par $\pi(g_1, g_2) = \rho^*(g_1) \otimes \rho(g_2)$. L'application linéaire

$$\Phi\colon V^* \otimes V \to L^2(G), \quad (\varphi \otimes v) \mapsto \left(g \mapsto \varphi(\rho(g)(v)\right)$$

est un morphisme de représentations de $G \times G$. En effet, l'image par $\Phi \circ \pi(g_1, g_2)$ d'un tenseur $\varphi \otimes v$ est la fonction qui, à $g \in G$, associe

$$\rho^*(g_1)(\varphi)(\rho(g)(\rho(g_2)(v))) = (\varphi \circ \rho(g_1)^{-1})(\rho(g g_2)(v)) = \varphi(\rho(g_1^{-1} g g_2)(v)).$$

C'est bien l'image par $\mathrm{r}(g_1, g_2)$ de la fonction $\Phi(\varphi \otimes v)\colon g \mapsto \varphi(\rho(g)(v))$. L'image de Φ est le sous-espace $\mathscr{C}(\rho)$, donc $\Phi \neq 0$ (si $V \neq 0$). Comme $V^* \otimes V$ est une représentation irréductible de $G \times G$, Φ est injective et définit donc un isomorphisme

$$V^* \otimes V \to \mathscr{C}(\rho)$$

de représentations de $G \times G$.

Si ρ est unitaire, il résulte des relations d'orthogonalité de Schur que

$$\left\|\Phi(\varphi \otimes v)\right\|^2 = \int_G \left|\varphi(\rho(g)(v))\right|^2 \, dg = \frac{1}{\dim V} \left\|\varphi\right\|^2 \|v\|^2.$$

Autrement dit, l'application linéaire $\sqrt{\dim V}\Phi$ est un isomorphisme de représentations unitaires.

5.3. Inversement, soit V un sous-espace vectoriel de $L^2(G)$, de dimension finie, et stable par translation à droite. L'espace V définit donc une sous-représentation de $L^2(G)$. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de V. Pour tout $g \in G$, il existe donc une matrice $(\rho_{ij}(g))$ telle que

$$f_i(xg) = \sum_{j=1}^n \rho_{ij}(g) f_j(x), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

et l'application $g \mapsto (\rho_{ij}(g))$ est continue; c'est la matrice de la sous-représentation (r_V, V) de la représentation régulière sur V. Appliquons cet égalité lorsque $x = e$ est l'élément neutre de G; il vient

$$f_i(g) = \sum_{j=1}^n \rho_{ij}(g) f_j(e),$$

ce qui montre que f_i est une combinaison linéaire de coefficients matriciels de ρ: les f_i appartiennent à $\mathscr{C}(\mathrm{r}_V)$. Ce sont en particulier des fonctions continues.

Si $f \in \mathscr{C}(V)$, posons

$$\rho(f) = \int_G f(g)\rho(g) \, dg.$$

C'est un endomorphisme de V. Si $f(g) = \varphi(\rho(g)(v))$, on a

$$\psi(\rho(f)(w)) = \int_G \varphi(\rho(g)(v))\psi(\rho(g)(w)) \, dg = \langle\varphi, \psi\rangle\langle v, w\rangle.$$

5.4. Soit alors (ρ_i, V_i) une famille de représentations irréductibles, unitaires, de dimension finie, deux à deux non isomorphes, contenant un représentant de chaque classe d'isomorphisme. Comme les espaces $\mathscr{C}(\rho_i)$ sont deux à deux orthogonaux, ils sont en somme directe, d'où un isomorphisme de représentations (préhilbertiennes)

$$\bigoplus_i V_i^* \otimes V_i \to \bigoplus_i \mathscr{C}(\rho_i),$$

où les sommes directes sont orthogonales. Rappelons qu'on note $\mathscr{R}(G)$ le membre de droite de l'égalité précédente.

THÉORÈME (Peter-Weyl). — *L'espace $\mathscr{R}(G)$ est dense dans $\mathscr{C}(G)$ (pour la topologie de la convergence uniforme) et dans $L^2(G)$ (pour sa topologie d'espace de Hilbert).*

Lorsque G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ (ou $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, cela revient au même), on peut démontrer ce théorème assez simplement. En effet, dans ce cas les coefficients matriciels de la représentation naturelle suffisent à séparer les points de G. Comme $\mathscr{R}(G)$ est une sous-algèbre involutive de $\mathscr{C}(G)$ et comme G est compact, il résulte du théorème de Stone-Weierstrass que $\mathscr{R}(G)$ est dense dans $\mathscr{C}(G)$. Comme $\mathscr{C}(G)$ est dense dans $L^2(G)$, $\mathscr{R}(G)$ l'est alors aussi. Le cas général fera l'objet du paragraphe suivant. Avant de donner des exemples, remarquons la conséquence suivante.

PROPOSITION 5.5. — *Soit G un groupe compact, muni de sa mesure de Haar normalisée, et soit (ρ_j, V_j) une famille de représentations irréductibles de dimension finie de G. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *toute représentation irréductible de dimension finie de G est isomorphe à l'une des V_j ;*

b) *les coefficients matriciels des représentations V_j engendrent un sous-espace dense de $L^2(G)$;*

b′) *les coefficients matriciels des représentations V_j engendrent un sous-espace dense de $\mathscr{C}(G)$;*

c) *les caractères des représentations V_j engendrent un sous-espace dense du sous-espace de $L^2(G)$ formé des fonctions invariantes par conjugaison;*

c′) *les caractères des représentations* V_j *engendrent un sous-espace dense du sous-espace de* $\mathscr{C}(G)$ *formé des fonctions invariantes par conjugaison.*

Proof. — Le théorème de Peter-Weyl est que a) entraîne b) et b′). Si (ρ, V) est une représentation irréductible de G, l'intégrale $\int_G \rho_{ij}(hgh^{-1})\,dh$ est un multiple du caractère de ρ. On en déduit facilement[3] que b) entraîne c) et que b′) entraîne c′). Enfin, supposons qu'il existe une représentation (ρ, V) de G, irréductible et de dimension finie, qui ne soit pas dans la liste (ρ_j, V_j). Son caractère χ est alors orthogonal aux caractères χ_j des ρ_j, ce qui contredit c). Cela contredit aussi c′) car $\mathscr{C}(G)$ est dense dans $L^2(G)$. □

THÉORÈME 5.6. — *Un groupe de Lie compact est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un groupe linéaire.*

Proof. — Soit G un groupe de Lie compact. Notons (V_n, ρ_n) des représentants, indexés par $n \in \mathbf{N}$, des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de dimension finie de G. Soit π_N la somme directe des ρ_n pour $n \leqslant N$; c'est un homomorphisme de G dans un groupe linéaire. Son noyau H_N est un sous-groupe de Lie de G. Si $H \subset H'$ sont deux sous-groupes de Lie d'un même groupe de Lie compact G, on a $\dim H \leqslant \dim H'$; si l'on a égalité, alors H et H' ont même algèbre de Lie et ne diffèrent que par leurs composantes connexes, celui de H étant plus petit que celui de H'. Si ces deux entiers sont les mêmes pour H et pour H', on a alors $H = H'$. L'application qui à N associe le couple formé de la dimension de H_N et du nombre de ses composantes connexes est ainsi décroissante, lorsque $\mathbf{N}^2$ est muni de l'ordre lexicographique. Comme c'est un bon ordre sur $\mathbf{N}^2$, la suite de sous-groupes (H_N) est alors stationnaire. Soit H sa limite et soit N un entier tel que $H_n = H$ pour $n \geqslant N$.

Toute fonction continue sur H est la restriction d'une fonction continue sur G. D'après le théorème de Peter-Weyl, une telle fonction doit être approchée d'une combinaison linéaire de coefficients matriciels de G. Comme ceux-ci sont constants sur H, les seules fonctions continues sur H sont les constantes. Cela montre que H est réduit à l'élément neutre.

L'homomorphisme $\pi_N \colon G \to \mathrm{GL}(V_N)$ est un homomorphisme injectif, continu, de groupes de Lie. Son image G' est un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}(V_N)$, nécessairement compact, et l'application de G dans G' induite par π_N est une application bijective continue. D'après le théorème de Cartan, elle est différentiable. Sa bijection réciproque est continue, car G est compact (th. de Poincaré). D'après le théorème de Cartan, elle est aussi différentiable. Cela montre que G est isomorphe à un sous-groupe compact d'un groupe linéaire. □

5.7. Cas particulier des groupes finis. — Si G est un groupe fini muni de la topologie discrète, il est compact. Notons $n = \operatorname{card} G$. L'espace $L^2(G)$ s'identifie alors à l'espace des fonctions sur G, muni du produit scalaire hermitien

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} f_2(g).$$

Son sous-espace des fonctions invariantes par conjugaison est de dimension r et les caractères d'une famille $(\rho_i, V_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de représentations complexes irréductibles de dimension finie, deux à deux non isomorphes, en forment une base. Par suite, r est égal au nombre de classes de conjugaison dans G. Soit n_i la dimension de V_i. L'isomorphisme $\bigoplus_i V_i^* \otimes V_i \simeq L^2(G)$ entraîne la relation

$$n_1^2 + \cdots + n_r^2 = n.$$

5.8. Exemple du groupe S_1. — C'est le groupe des nombres complexes de module 1. Il est compact, commutatif. Son application exponentielle est $\theta \mapsto \exp(\mathrm{i}\theta)$. Sa mesure de Haar normalisée est $d\theta/2\pi$, où le représentant θ appartient à, disons, $[0, 2\pi[$.

Soit $\rho \colon \mathrm{S}_1 \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible de S_1 sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. D'après le corollaire 4.2, on a $\dim V = 1$, car S_1 est commutatif. L'application $\theta \mapsto \rho(\exp(\mathrm{i}\theta))$ est un morphisme de groupes $\mathbf{R} \to \mathbf{C}^*$, donc est de la forme $\theta \mapsto \exp(\theta x)$, avec $x \in \mathbf{C}$, et $\exp(2\mathrm{i}\pi x) = 1$, c'est-à-dire $x \in \mathbf{Z}$.

---

[3] vérifier

Cela montre que les représentations irréductibles de S_1 sont de dimension 1, indexées par un entier $n \in \mathbf{Z}$: $\rho_n\colon S_1 \to \mathbf{C}^*$, $z \mapsto z^n$. L'espace $\mathscr{C}(\rho_n)$ est de dimension 1, engendré par la fonction $z \mapsto z^n$, de S_1 dans $\mathbf{C}$. L'espace $\mathscr{R}(S_1)$ s'identifie à l'espace $\mathbf{C}[z, z^{-1}]$ des polynômes en z et en $1/z$. D'après le théorème de Peter-Weyl, il est dense dans $\mathscr{C}(S_1)$ et dans $L^2(S_1)$.

On retrouve ainsi que toute fonction 2π-périodique de carré intégrable se décompose en série trigonométrique (au sens L^2) ; toute fonction continue 2π-périodique est approchable uniformément par des polynômes trigonométriques. En ce sens, le théorème de Peter-Weyl généralise la théorie des séries de Fourier.

Nous n'avons en revanche pas démontré de résultat analogue au théorème de Dirichlet (convergence ponctuelle de la série de Fourier) ou de Fejér (convergence en moyenne de Cesàro). La généralisation de la transformation de Fourier, c'est-à-dire l'extension du théorème de Peter-Weyl au groupes non nécessairement compacts nécessite de faire intervenir des représentations de dimension infinie.

5.9. Exemple du groupe SU_2. — Considérons maintenant le groupe SU_2 des matrices unitaires 2×2. Il possède une représentation tautologique de dimension 2; définissons $V(n)$ comme la puissance symétrique n-ième de la représentation standard de SU_2. C'est la restriction à SU_2 de la représentation de $SL_2(\mathbf{C})$ que nous avions étudiée au paragraphe 6.9. Si (e_1, e_2) est une base de la représentation tautologique de SU_2, une base de $V(n)$ est formée des $e_1^k e_2^{n-k}$, pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

Montrons qu'elle est irréductible. Soit W un sous-espace de $V(n)$ stable par SU_2. Il est alors stable par l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}_2$ de SU_2. L'action de $\mathfrak{su}_2$ sur $V(n)$ n'est autre que la puissance symétrique n-ième de la représentation standard de $\mathfrak{su}_2$; c'est aussi la restriction à $\mathfrak{su}_2$ de la représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ sur $V(n)$, dérivée de la représentation de $SL_2(\mathbf{C})$ sur $V(n)$. Rappelons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}_2$ de SU_2 est l'ensemble des matrices antihermitiennes de trace nulle. Elle est de dimension 3 sur $\mathbf{R}$; une base en est

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces trois matrices forment une base sur $\mathbf{C}$ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$. Par suite, l'espace W est stabilisé par $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$, donc aussi par $SL_2(\mathbf{C})$, car ce groupe est connexe. Puisque la représentation de $SL_2(\mathbf{C})$ sur $V(n)$ est irréductible, $W = 0$ ou $W = V(n)$, ce qui montre que la représentation $V(n)$ de SU_2 est irréductible.

Une matrice g de SU_2 est diagonalisable dans une base orthonormée (directe, si l'on veut), donc est conjuguée dans SU_2 à une matrice $g(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$. On a $\operatorname{tr} g = \operatorname{tr} g(\varphi) = 2\cos\varphi$ et l'on peut choisir une détermination de φ dans l'intervalle $[0, \pi]$. Par ρ_n, la matrice $g(\varphi)$ multiplie le vecteur $e_1^k e_2^{n-k}$ de $V(n)$ par $e^{(2k-n)i\varphi}$. Le caractère de la représentation $V(n)$ est ainsi égal à

$$\chi_n(g) = \sum_{k=0}^{n} e^{i(n-2k)\varphi} = \frac{e^{i(n+1)\varphi} - e^{-i(n+1)\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}} = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi},$$

avec $\operatorname{tr} g = 2\cos\varphi$. On en déduit la relation

$$\chi_m(g)\chi_n(g) = \chi_{m+n}(g) + \chi_{m+n-2}(g) + \dots + \chi_{|m-n|}(g).$$

On retrouve ainsi le fait que la représentation $V(m) \otimes V(n)$ est isomorphe à la somme directe des représentations $V(m+n)$, $V(m+n-2)$, ..., $V(|m-n|)$ (formule de Clebsch-Gordan, th. 6.8).

Il en résulte que l'espace vectoriel engendré par les coefficients matriciels des représentations $V(n)$, $n \geqslant 1$, est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions continues sur SU_2. Elle est stable par conjugaison complexe (comme $V(n)$ admet un produit scalaire invariant par SU_2, elle est isomorphe à la représentation $\overline{V(n)}^*$.) Elle sépare les points (les coefficients matriciels de $V(1)$ y suffisent). D'après le théorème de Stone-Weierstrass, elle est donc dense dans $\mathscr{C}(SU_2)$. D'après la proposition 5.5, toute représentation irréductible de dimension finie de SU_2 est l'une des représentations $V(n)$.

Exercices. — 1) Soit V un sous-espace de dimension finie de $L^2(G)$ qui est stable par translation à droite. Montrer que V est contenu dans $\mathscr{R}(G)$. En déduire que $\mathscr{R}(G)$ est la plus grande sous-représentation semi-simple de $L^2(G)$.
2) Démontrer que la représentation $V(n)$ de SU_2 est irréductible en la restreignant aux matrices diagonales de SU_2 et aux matrices de O_2.

3) Montrer qu'une matrice de SU_2 est de la forme $\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$, avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$. En déduire un homéomorphisme de SU_2 sur la sphère unité de $\mathbf{R}^4$. Calculer la mesure de Haar de SU_2.
4) L'application $SU_2 \to [-2, 2]$, $g \mapsto \operatorname{tr} g$ induit une bijection de l'ensemble des classes de conjugaison de SU_2 sur l'intervalle $[-2, 2]$. Si l'on munit l'ensemble des classes de conjugaison de la topologie quotient, c'est un homéomorphisme. Calculer l'image directe de la mesure de Haar de SU_2 sur $[-2, 2]$. En utilisant le fait que les séries trigonométriques en sin sont denses dans l'ensemble des fonctions impaires sur $[0, \pi]$, re-démontrer que toute représentation irréductible de dimension finie de SU_2 est l'une des représentations $V(n)$.

§6. Démonstration du théorème de Peter-Weyl

6.1. Opérateurs à noyau. — Soit X un espace métrique compact muni d'une mesure de Radon μ. Soit $K \in \mathscr{L}^2(X \times X)$; on définit l'opérateur T_K “de noyau K” sur $L^2(X)$ par la formule

$$T_K(f)(x) = \int_X K(x, y) f(y)\, d\mu(y).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|T_K(f)(x)\right|^2 \leqslant \int_X \left|K(x, y)\right|^2\, d\mu(y) \int_X \left|f(y)\right|^2\, d\mu(y),$$

d'où l'inégalité

$$\left\|T_K(f)\right\|_2 \leqslant \|K\|_2 \left\|f\right\|_2$$

qui montre que T_K est une application linéaire continue de $L^2(X)$ dans lui-même, de norme $\leqslant \|K\|_2$.

Soit f et g des éléments de $L^2(X)$. On a

$$\langle f, T_K(g)\rangle = \int_{X\times X} \overline{f(x)} g(y) K(x, y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) = \langle T_{K^*}(f), g\rangle$$

où K^* est le noyau défini par $K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}$. En particulier, si K est symétrique à valeurs réelles, T_K est autoadjoint.

Les combinaisons linéaires de fonctions sur $X \times X$ de la forme $g \otimes h \colon (x, y) \mapsto g(x)h(y)$, pour g et h dans $L^2(X)$, sont denses dans $L^2(X \times X)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe ainsi des fonctions g_i, h_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ dans $L^2(X)$ telles que

$$\left\|K - \tilde{K}\right\|_2 \leqslant \varepsilon, \qquad \tilde{K} = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes h_i.$$

Alors, pour $f \in L^2(X)$,

$$T_{\tilde{K}}(f) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_X h_i(y) f(y)\, d\mu(y)\right) g_i,$$

et

$$\left\|T_{\tilde{K}} - T_K\right\| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, les opérateurs à noyau sont des limites d'opérateurs de rang fini. Cela entraîne qu'ils sont *compacts*, c'est-à-dire que pour tout noyau K, l'image par T_K de la boule unité de $L^2(X)$ est d'adhérence compacte dans $L^2(X)$.

THÉORÈME 6.2. — *Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $T \colon H \to H$ un opérateur compact autoadjoint sur H. Pour tout nombre complexe λ, notons H_λ le noyau de $T - \lambda\,\mathrm{id}_H$ et soit S l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $H_\lambda \neq 0$.*

a) *L'ensemble S est contenu dans* $\mathbf{R}$.
b) *Si $\lambda \neq \mu$, H_λ et H_μ sont orthogonaux.*
c) *Pour tout $\lambda \neq 0$, H_λ est un sous-espace de dimension finie de H.*
d) *Pour tout $t > 0$, l'ensemble des $\lambda \in T$ vérifiant $|\lambda| > t$ est fini.*
e) *La somme directe des H_λ pour $\lambda \in S$ est dense dans H.*

Proof. — Les deux premières assertions sont classiques. Si $f \in H_\lambda$ et $g \in H_\mu$ sont non nuls,

$$\mu\langle f,g\rangle = \langle f, T(g)\rangle = \langle T(f), g\rangle = \bar\lambda\langle f,g\rangle.$$

Prenant $\lambda=\mu$ et $f=g$, il vient $\lambda=\bar\lambda$; prenant $\lambda\neq\mu$, on en déduit $\langle f,g\rangle=0$.

Considérons par l'absurde une suite (λ_n) d'éléments distincts de S vérifiant $|\lambda_n|>t$ pour tout n. Pour tout entier n, soit f_n un élément de H_{λ_n} dont la norme est égale à 1. Si $n\neq m$,

$$\|T(f_n)-T(f_m)\| = \|\lambda_n f_n - \lambda_m f_m\| = \sqrt{\lambda_n^2+\lambda_m^2} \geqslant 2t$$

et la suite $(T(f_n))$ ne peut pas admettre de sous-suite convergente. Cela contredit l'hypothèse que T est un opérateur compact et montre l'assertion *c*).

Pour tout $\lambda\in S$ l'espace H_λ est fermé dans H et l'application linéaire T induit la multiplication par λ sur H_λ. Supposons $\lambda\neq 0$. Soit (f_n) une suite d'éléments de H_λ de norme $\leqslant 1$. La suite $(T(f_n)) = (\lambda f_n)$ possède une sous-suite convergente, car l'opérateur T est compact. Il en résulte que la suite (f_n) possède une sous-suite convergente dans H, donc dans H_λ qui est fermé. La boule unité de H_λ est donc compacte et le théorème de Riesz entraîne que H_λ est de dimension finie.

Montrons la dernière assertion. Soit V la somme directe des H_λ et soit W son orthogonal dans H. Nous devons montrer que V est dense dans H, c'est-à-dire $W=0$. Or, V est stable par T, si bien que W est stable par T. L'espace W est fermé dans H, donc est un espace de Hilbert et l'application linéaire T définit ainsi un opérateur autoadjoint compact sur W. Si $W\neq 0$, le lemme suivant montre que $T|_W$ admet une valeur propre, ce qui est absurde puisqu'un vecteur propre de $T|_W$ est vecteur propre de T, donc appartient à l'un des H_λ. □

LEMME 6.3. — *Soit H un espace de Hilbert et soit T un opérateur linéaire autoadjoint compact sur H. Alors T possède une valeur propre de valeur absolue égale à $\|T\|$.*

Proof. — On peut bien sûr supposer que $T\neq 0$. Pour tout $f\in H$, on a

$$\|T(f)\|^2 = \langle T(f), T(f)\rangle = \langle T^2(f), f\rangle \leqslant \|T^2\|\,\|f\|^2,$$

si bien que $\|T\|^2 \leqslant \|T^2\|$, d'où les égalités,

$$\|T\|^2 = \sup_{\|f\|\leqslant 1} \langle T^2(f), f\rangle = \|T^2\|.$$

Soit (f_n) une suite d'éléments de H tels que $\|f_n\|=1$ et que la suite $\|T(f_n)\|$ converge vers $\|T\|$. Posons $g_n = T(f_n)$; quitte à extraire une suite suite, on peut supposer que la suite (g_n) converge vers un élément g de H. On a $\|g\|=\|T\|$. En passant à la limite dans l'inégalité

$$\|g_n\|^2 = \|Tf_n\|^2 = \langle f_n, T^2 f_n\rangle \leqslant \|f_n\|\,\|Tg_n\| = \|Tg_n\|,$$

on en déduit que $\|Tg\| \geqslant \|g\|^2$, d'où en fait l'égalité. Les inégalités

$$\langle T^2 g, g\rangle = \|Tg\|^2 = \|T\|^2\,\|g\|^2 \geqslant \|Ug\|\,\|g\|$$

entraînent, d'après la réciproque de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que T^2g et g sont positivement liés, donc g est vecteur propre de T^2 pour la valeur propre $\|T^2\|$. L'espace propre correspondant est de dimension finie, car T^2 est encore autoadjoint et compact ; il est en outre stable par T. La diagonalisation de T sur cet espace propre montre que ses valeurs propres y sont $\pm\|T\|$. □

6.4. Supposons de plus que K soit continue sur $X\times X$. Alors, pour toute fonction $f\in L^2(X)$, $T(f)$ est continue sur X et

$$\|T(f)\|_\infty \leqslant \sup_x \left(\int_X |K(x,y)|^2\, d\mu(y)\right)^{1/2} \|f\|_2 \leqslant \|K\|_\infty \|f\|_2,$$

ce qui montre que T est une application linéaire continue de $L^2(X)$ dans $\mathscr{C}(X)$.

6.5. Soit $\delta \in \mathscr{C}(G)$ une fonction continue à valeurs réelles positives telle que $\delta(x^{-1}) = \delta(x)$ pour tout $x \in G$. Considérons l'opérateur à noyau $T\colon L^2(G) \to L^2(G)$ défini par

$$T(f)(g) = \int_G \delta(gx^{-1}) f(x)\, dx.$$

C'est en particulier un opérateur compact auto-adjoint de $L^2(G)$ dans lui-même. Par suite, l'espace $L^2(G)$ est la somme hilbertienne du noyau N de T et des espaces propres V_λ de T, chacun étant de dimension finie.

Si $h \in G$, on a de plus

$$\begin{aligned} T(f)(gh) &= \int_G \delta(ghx^{-1}) f(x)\, dx = \int_G \delta(g(xh^{-1})^{-1}) f(xh^{-1}h)\, dx \\ &= \int_G \delta(gy) f(yh)\, dy. \end{aligned}$$

Autrement dit, T est un endomorphisme de la représentation régulière droite et chaque espace propre V_λ est un sous-espace de dimension finie de $L^2(G)$, stable par translation à droite. Cela entraîne que V_λ est contenu dans $\mathscr{R}(G)$. Par suite, pour toute fonction $f \in L^2(G)$, $T(f)$ appartient à l'adhérence de $\mathscr{R}(G)$ dans $L^2(G)$.

6.6. Soit $f \in \mathscr{C}(G)$. Comme G est compact, f est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ et soit Ω un voisinage de l'élément neutre de G tel que $\left|f(g) - f(h)\right| \leqslant \varepsilon$ si $g^{-1}h \in \Omega$. Soit δ une fonction continue positive d'intégrale 1 sur G à support contenu dans Ω et considérons l'opérateur T défini au paragraphe précédent. Pour tout $g \in G$, on a

$$\left|T(f)(g) - f(g)\right| \leqslant \int_G \delta(gx^{-1}) \left|f(x) - f(g)\right|\, dx \leqslant \varepsilon,$$

d'où $\left\|T(f) - f\right\| \leqslant \varepsilon$ et a fortiori, $\left\|T(f) - f\right\|_2 \leqslant \varepsilon$. Soit φ un élément de $\mathscr{R}(G)$ tel que $\left\|T(f) - \varphi\right\|_2 \leqslant \varepsilon$. Il en résulte que $\left\|f - \varphi\right\|_2 \leqslant 2\varepsilon$, ce qui prouve que l'adhérence de $\mathscr{R}(G)$ dans $L^2(G)$ contient $\mathscr{C}(G)$, donc est égale à $\mathscr{C}(G)$.

Il reste à montrer que $\mathscr{R}(G)$ est dense dans $\mathscr{C}(G)$. Soit $f \in \mathscr{C}(G)$ et soit $\varepsilon > 0$. Choisissons δ comme précédemment, de sorte que $\left\|T(f) - f\right\| \leqslant \varepsilon$. Soit $\varphi \in \mathscr{R}(G)$ une fonction telle que $\left\|f - \varphi\right\|_2 \leqslant \varepsilon / \|\delta\|_\infty$. Alors, $T(\varphi)$ appartient à $\mathscr{R}(G)$ et vérifie $\left|T(f) - T(\varphi)\right| \leqslant \varepsilon$. Par suite, $\left\|f - T(\varphi)\right\| \leqslant 2\varepsilon$, ce qui montre que $\mathscr{R}(g)$ est dense dans $\mathscr{C}(G)$.

Exercices. — 1) Soit T un opérateur autoadjoint sur un espace de Hilbert H et soit ξ un vecteur unitaire de H tel que

$$|\langle \xi, T(\xi)\rangle| = \sup_{\|\xi\|=1} |\langle x, T(x)\rangle|.$$

Montrer que si $\langle \xi, y\rangle = 0$, alors $\langle \xi, T(y)\rangle = 0$. En déduire que ξ est vecteur propre de T.

2) Soit T un opérateur autoadjoint compact sur un espace de Hilbert H. Soit M la borne supérieure des $|\langle T(x), x\rangle|$, lorsque $x \in H$, $\|x\| = 1$.

Considérer une suite (x_n) d'éléménts de norme 1 dans H telle $|\langle T(x_n), x_n\rangle|$ converge vers M. Montrer que l'on peut supposer, quitte à en extraire une sous-suite, que (x_n) converge faiblement vers un élément ξ tel que $\|\xi\| = 1$, et que $(T(x_n))$ converge. Montrer que $|\langle T(\xi), \xi\rangle| = M$. En déduire que ξ est vecteur propre de T.

CHAPTER 4

GÉOMÉTRIE "GLOBALE" DES GROUPES DE LIE

§1. Rappels sur la théorie des revêtements et du groupe fondamental

1.1. Soit M un espace topologique. Rappelons qu'on dit qu'un espace topologique E muni d'une application continue $p\colon E \to M$ est un *revêtement* de M s'il existe, pour tout point x de M, un voisinage U de x, un espace discret F et un homéomorphisme $\varphi_U\colon p^{-1}(U) \to U \times F$ tel que $p = \mathrm{pr}_1 \circ \varphi_U$. Un tel homéomorphisme est appelé trivialisation du revêtement au-dessus de U. Si M est connexe, toutes les fibres d'un revêtement ont même cardinal, qu'on appelle alors *degré* du revêtement.

1.2. Supposons que M soit une variété différentiable et soit $p\colon E \to M$ un revêtement de M. Soit U un ouvert de M au-dessus duquel E est trivialiable; soit $\varphi_U\colon U \times F \to p^{-1}(U)$ une trivialisation. Il existe alors une unique structure de variété sur $p^{-1}(U)$ tel que l'application φ_U soit un isomorphisme de variétés. Si U et V sont des ouverts de M, l'homéomorphisme $\varphi_{UV}\colon (U \cap V) \times F \to (U \cap V) \times G$ déduit de trivialisations φ_U sur U et φ_V sur V est de la forme $(u,t) \mapsto (u, \theta(u,t))$ où pour tout t, $u \mapsto \theta(u,t)$ est localement constant. Comme $U \cap V$ est localement connexe, $U \cap V$ est réunion disjointe d'ouverts connexes sur lesquels θ ne dépend pas de u, si bien que φ_{UV} est localement de la forme $(u,t) \mapsto (u, \theta(t))$, donc un difféomorphisme de variétés. Cela montre que les structures de variété sur $p^{-1}(U)$ et $p^{-1}(V)$ déduites de φ_U et φ_V coïncident sur $p^{-1}(U \cap V)$. Par recollement, on en déduit une unique structure de variété sur E.

Soit E et M des variétés et soit $p\colon E \to M$ un revêtement. Alors, la différentielle de p est inversible en tout point de E (p est un difféomorphisme local). Dans le cas d'un morphisme de groupe de Lie, il suffit même de vérifier cette condition en l'origine, ainsi que le montre la proposition suivante.

PROPOSITION 1.3. — *Un morphisme $f\colon G \to H$ de groupes de Lie est un revêtement si et seulement si sa différentielle $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.*

Proof. — La condition est nécessaire car un revêtement est un isomorphisme local. Réciproquement, si φ est un isomorphisme d'algèbres de Lie, le théorème des fonctions implicites affirme l'existence d'un voisinages ouvert U de l'élément neutre de G et d'un voisinage ouvert V de l'élément neutre de H tel que f induise un difféomorphisme de U sur V. En particulier, le noyau Γ de f ne rencontre U qu'en l'élément neutre e de G. C'est donc un sous-groupe discret de G. De plus, $f(G)$ est un sous-groupe ouvert de H, donc aussi fermé.

Soit $g \in G$ tel que $gU \cap U \neq \varnothing$. Il existe ainsi x et $y \in U$ tels que $y = gx$, d'où $f(y) = f(gx) = f(x)$ puis $x = y$ car f est injective sur U. Par suite, $g = e$. Cela montre que $gU \cap U = \varnothing$ pour $g \in \Gamma$ et l'on en déduit que les ouverts gU, pour $g \in \Gamma$, sont deux à deux disjoints.

Par suite, l'application $U \times \Gamma \to G$, $(x,g) \mapsto gx$, est un difféomorphisme de $U \times \Gamma$ sur $f^{-1}(V)$. Plus généralement, si $z \in f(G)$ et si $y \in G$ est tel que $f(y) = z$, l'application $U \times \Gamma \to G$ définie par $(x,g) \mapsto gxy$ est un difféomorphisme de $U \times \Gamma$ sur $f^{-1}(Vz)$. Cela montre que f est un revêtement. □

1.4. Soit $p\colon E \to M$ un revêtement d'un espace M. Soit U et U' deux parties, toutes deux ouvertes ou toutes deux fermées, de M au-dessus desquels p est trivialisable, et soit $\varphi\colon U\times F \to p^{-1}(U)$, $\varphi'\colon U'\times F' \to p^{-1}(U')$ des trivialisations. Supposons que $U\cap U'$ soit connexe et non vide. L'application $f\colon (U\cap U')\times F \to (U\cap U')\times F'$ telle que $\varphi'\circ f(u,t) = \varphi(u,t)$ est un homéomorphisme, de la forme $f(u,t) = (u, F(u,t))$. L'application $F\colon (U\cap U')\times F' \to F$ est continue; comme F est discret et qu'on a supposé $U\cap U'$ connexe, elle est de la forme $(u,t)\mapsto g(t)$, où g est une bijection de F sur F'. Posons $V = U\cup U'$; l'application $\psi\colon V\times F \to p^{-1}(V)$ définie par $\psi(u,t) = \varphi(u,t)$ si $u\in U$ et $\psi(u,t) = \varphi'(u, g(t))$ est alors une trivialisation de p au-dessus de V.

1.5. On dit qu'un espace est *simplement connexe* si tous ses revêtements sont trivialisables.

Supposons que M soit la réunion de deux parties ouvertes (resp. fermées) U et U', simplement connexes, dont l'intersection $U\cap U'$ est connexe et non vide. Il résulte du paragraphe précédent que M est simplement connexe.

Montrons qu'un intervalle de **R** est simplement connexe; par un petit raisonnement d'exhaustion, il suffit de considérer le cas d'un intervalle compact, disons de $[0,1]$. Soit ainsi $p\colon E\to[0,1]$ un revêtement. Pour $x\in[0,1]$, soit U_x un voisinage de x dans $[0,1]$, connexe, au-dessus duquel ce revêtement est trivialisable; fixons aussi $\varphi_x\colon U_x\times F_x \to p^{-1}(U_x)$ une trivialisation de p au-dessus de U_x. Comme $[0,1]$ est compact, il existe des réels $x_1 < \cdots < x_n$ tels que les U_{x_i} recouvrent $[0,1]$. À l'aide du raisonnement précédent, on voit par récurrence sur n que le revêtement $p\colon E\to[0,1]$ est trivialisable, ce qu'il fallait démontrer.

Un raisonnement analogue traite le cas d'un carré $[0,1]^2$, voire d'un cube $[0,1]^n$. Traitons le cas d'un carré: soit E un revêtement de $[0,1]^2$. Recouvrons $[0,1]^2$ par n^2 carrés de côté $1/n$, assez petit pour que le revêtement E soit trivialisable sur chacun d'entre eux. On recolle les trivialisations sur la première ligne pour en déduire une trivialisation de E sur $[0,1/n]\times[0,1]$, puis on continue, l'intersection de la partie en forme de rectangle ou de L déjà construite sur lequel le revêtement est trivialisable avec le carré suivant étant à chaque fois connexe et non vide.

1.6. Soit M un espace topologique, $p\colon E\to M$ un revêtement de M, T un espace simplement connexe et $f\colon T\to M$ une application continue. L'espace $f^*E = E\times_M T$ (formé des couples $(e,t)\in E\times T$ tels que $p(e) = f(t)$) est un revêtement de T. Comme T est simplement connexe, il est trivialisable. En particulier, pour tout point $(e_0,t_0)\in E\times_M T$, il existe une unique application $g\colon T\to E$ telle que $p(g(t)) = f(t)$ pour $t\in T$ et $g(t_0) = e_0$.

1.7. Soit M un espace topologique. Un *chemin* dans M est une application continue $\gamma\colon[0,1]\to M$; le point $\gamma(0)$ est l'origine de γ, le point $\gamma(1)$ son extrémité; un *lacet* est un chemin dont l'origine et l'extrémité coïncident. Une *homotopie* reliant un chemin γ_0 à un chemin γ_1 est une application continue $h\colon[0,1]\times[0,1]\to M$ telle que $h(0,t) = \gamma_0(t)$ et $h(1,t) = \gamma_1(t)$. On dit que cette homotopie est *stricte* si les applications $s\mapsto h(s,0)$ et $s\mapsto h(s,1)$ sont constantes. La relation "γ_0 est homotope à γ_1" est une relation d'équivalence.

Soit γ_1 et γ_2 des chemins tels que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$; Le chemin juxtaposé $\gamma_1*\gamma_2$ est le chemin γ défini par $\gamma(t) = \gamma_1(2t)$ si $t\in[0,1/2]$ et $\gamma(t) = \gamma_2(2t-1)$ si $t\in[1/2,1]$. On juxtapose de même les homotopies.

La relation d'homotopie, la relation d'homotopie stricte, sont compatibles à la juxtaposition des chemins.

1.8. Relèvement des chemins et des homotopies. — Soit $p\colon E\to M$ un revêtement. Pour tout chemin $\gamma\colon[0,1]\to M$ et tout point $x\in E$ tel que $p(x) = \gamma(0)$, il existe un unique chemin c dans E tel que $p\circ c = \gamma$ et $c(0) = x$. Cela résulte du fait que $[0,1]$ est simplement connexe.

De même, pour toute homotopie stricte h reliant deux chemins γ_0 et γ_1, et tout point $x\in E$ tel que $p(x) = \gamma_0(0)$, il existe une unique homotopie stricte η reliant les chemins c_0 et c_1 d'origine x dans E qui relèvent γ_0 et γ_1. L'existence d'une application continue $\eta\colon[0,1]^2\to E$ telle que $p\circ\eta = h$ et $\eta(0,0) = x$ résulte de ce que $[0,1]^2$ est simplement connexe. L'application continue $t\mapsto\eta(0,t)$ relève γ_0 donc est égale à c_0; l'application $s\mapsto\eta(s,0)$ relève l'application constante d'image $\gamma_0(0)$ donc est constante d'image x; l'application continue $t\mapsto\eta(1,t)$ relève γ_1 et vérifie $\eta(1,0) = x$, donc est égale à c_1. Enfin,

$s \mapsto \eta(s,1)$ relève une application constante, donc est constante. Cela montre que η est une homotopie stricte reliant c_0 à c_1.

1.9. Supposons que M soit une *variété connexe*; en particulier, tout point x de M possède un voisinage homéomorphe à une boule ouverte. Soit a un point de M et notons $\lambda_a(M)$ l'ensemble des classes d'homotopies strictes de chemins d'origine a, ces homotopies étant donc astreintes à préserver origine et extrémité des chemins. L'espace $\lambda_a(M)$, muni de l'application "extrémité du chemin", notée ε, est alors un revêtement de M (pour une unique topologie, en l'occurence la topologie quotient de la topologie de la convergence uniforme sur les chemins). Plus précisément, si U est un ouvert de M identifié à une boule, et si x est le centre de U, un chemin d'origine x et d'extrémité y dans U est strictement homotope au rayon joignant x à y. Il en résulte une bijection $\varepsilon^{-1}(U) \to U \times \varepsilon^{-1}(x)$, qui est un homéomorphisme. Autrement dit, $\varepsilon\colon \lambda_a(M) \to M$ est un revêtement.

Ce revêtement est même universel : pour tout revêtement $E \to M$ et tout point x de E au-dessus de a, il existe une unique application continue de $\lambda_a(M)$ dans E qui applique la classe du chemin constant d'origine a sur le point x. Elle est définie par le relèvement des chemins.

1.10. Groupe fondamental. — L'ensemble des classes d'homotopie de lacets en a est noté $\pi_1(M,a)$. C'est la fibre en a du revêtement $\lambda_a(M) \to M$. Muni de la composition des chemins, $\pi_1(M,a)$ est un groupe, appelé *groupe fondamental de l'espace M* en a.

Si l'espace M est simplement connexe, ce revêtement $\lambda_a(M) \to M$ est trivial; comme $\lambda_a(M)$ est connexe, sa fibre en a est un singleton et le groupe $\pi_1(M,a)$ est trivial. Inversement, supposons que $\pi_1(M,a)$ soit trivial; alors $\pi_1(M,x)$ est trivial pour tout $x \in M$, car M est connexe par arcs, de sorte que le revêtement $\lambda_a(M) \to M$ est un isomorphisme. Soit $E \to M$ un revêtement, montrons qu'il est trivial. Comme M est localement connexe, E l'est aussi, donc ses composantes connexes sont ouvertes dans E, sont des revêtements de M, si bien qu'on peut supposer E connexe et non vide. Comme M est localement connexe par arcs, il en est de même de E, donc E est aussi connexe par arcs.

Montrons que M est bijectif. Toutes les fibres de E ont même cardinal, il suffit de montrer que ce cardinal est 1. Supposons que le point a de M ait deux antécédents x et y dans E. Soit $c\colon [0,1] \to E$ un chemin tel que $c(0) = x$ et $c(1) = y$. Alors, $\gamma = p \circ c$ est un lacet en a dans M, dont le relèvement à E est égal à c. Toutefois, le lacet γ est strictement homotope au lacet trivial, donc a même relèvement que le lacet trivial, lequel est le lacet constant en x. Par suite, $x = y$ et $E \to M$ est bijectif.

Comme un revêtement est une application ouverte, c'est un isomorphisme, donc E est un revêtement trivial, et M est simplement connexe.

1.11. Par juxtaposition des chemins, le groupe $\pi_1(M,a)$ agit librement (à droite) sur $\lambda_a(M)$. Comme $\lambda_a(M)$ est connexe par arcs, cette action est transitive sur les fibres. De la sorte, les revêtements connexes de M sont de la forme $\lambda_a(M)/G$, où G est un sous-groupe de $\pi_1(M,a)$.

Soit M et N des variétés, soit a un point de M et b un point de N.

Si $f\colon M \to N$ applique a sur b, on en déduit un homomorphisme de groupes $f_*\colon \pi_1(M,a) \to \pi_1(N,b)$. Les applications continues $p_1\colon M \times N \to N$ et $p_2\colon M \times N \to N$ définissent des homomorphismes de groupes de $\pi_1(M \times N,(a,b))$ dans les groupes $\pi_1(M,a)$ et $\pi_1(N,b)$; l'homomorphisme $((p_1)_*,(p_2)_*)$ est un isomorphisme de groupes.

§2. Groupes de Lie simplement connexes

2.1. Revêtement universel d'un groupe de Lie. — Supposons que G soit un groupe de Lie connexe et soit e l'origine de G. Notons $\tilde G = \lambda_e(G)$. Si $c_1\colon [0,1] \to G$ et $c_2\colon [0,1] \to G$ sont deux chemins dans G d'origine e, $t \mapsto c_1(t)c_2(t)$ est un chemin d'origine e dans G. Si, pour $i = 1$ ou 2, F_i est une homotopie joignant le chemin c_i à un chemin c'_i, l'application $F\colon [0,1]\times[0,1] \to G$ définie par $F(t,s) = F_1(t,s)F_2(t,s)$ est une homotopie qui joint le chemin $t \mapsto c_1(t)c_2(t)$ au chemin $t \mapsto c'_1(t)c'_2(t)$. Cela munit l'espace $\tilde G$ d'une structure de groupe, pour laquelle l'élément neutre est la classe du lacet constant et telle que la projection $p\colon \tilde G \to G$ soit un homomorphisme de groupes. Cela munit $\tilde G$ d'une structure de groupe de

Lie. En outre, la différentielle de p en l'origine de $\tilde{G}$ induit un isomorphisme de l'algèbre de Lie de $\tilde{G}$ sur celle de G.

On note $\pi_1(G)$ le groupe fondamental de G en l'élément neutre. Il s'identifie à un sous-groupe distingué et discret de $\tilde{G}$, tel que $\tilde{G}/\pi_1(G) \simeq G$.

Soit $\gamma \in \pi_1(G,e)$. L'application de $\tilde{G}$ dans lui-même définie par $g \mapsto g\gamma g^{-1}$ est d'image contenue dans $\pi_1(G,e)$, donc constante, car $\tilde{G}$ est connexe. Comme elle applique l'élément neutre de $\tilde{G}$ sur γ, $g\gamma g^{-1} = \gamma$ pour tout $g \in \tilde{G}$. Par suite, $\pi_1(G,e)$ est contenu dans le centre de $\tilde{G}$. En particulier :

PROPOSITION. — *Le groupe fondamental d'un groupe de Lie est commutatif.*

Les revêtements de G sont tous de la forme $\tilde{G}/H$, où H est un sous-groupe de $\pi_1(G,e)$. Comme H est distingué, ils sont automatiquement munis d'une structure de groupe de Lie.

2.2. Soit $f\colon G \to H$ un morphisme de groupes de Lie. Si G est un revêtement de H, l'image de f est un sous-groupe ouvert et fermé de H et son noyau est discret.

Inversement, supposons que f soit surjective de noyau discret et que G soit connexe.(1) Soit $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ l'homomorphisme d'algèbres de Lie déduit de f. Montrons que φ est un isomorphisme. D'après la proposition 1.3, il en résultera que f est un revêtement.

Comme f est injective sur un voisinage de e, φ est injective. Soit V un voisinage compact de e dans G tels que $\varphi\colon V \to \varphi(V)$ soit un isomorphisme de V sur son image. Comme G est connexe, il est engendré par le voisinage V de e ; Les parties $V^n = V\cdots V$ sont des compacts de G dont G est la réunion. Cela entraîne que G est réunion d'une famille dénombrable de compacts. En particulier, on peut extraire de tout recouvrement ouvert de G un recouvrement dénombrable. Soit alors U un voisinage ouvert de e dans G tel que $\overline{U}\cdot\overline{U} \subset V$. Comme les parties gU de G recouvrent G, on peut trouver une suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de G tels que $G = \bigcup_n g_n U$. Les images $f(g_n)\overline{f(U)} = \overline{f(g_nU)}$ forment un recouvrement fermé dénombrable de H. Comme H est localement compact, H vérifie le théorème de Baire et l'un des $f(g_n)\overline{f(U)}$ n'est pas d'intérieur vide. Par suite, $\overline{f(U)}$ n'est pas d'intérieur vide dans H.

Or, $\overline{f(U)} = f(\overline{U})$ car $\overline{U} \subset V$, et l'hypothèse que f induit un isomorphisme de variétés de V sur une sous-variété d'un voisinage de e dans H montre que $f(V)$ est d'intérieur vide dans H, à moins que φ ne soit surjective. En définitive, nous avons montré que l'homomorphisme φ est un isomorphisme d'algèbres de Lie, donc que f est un revêtement.

2.3. Exemples. — Le groupe SU_2 est homéomorphe à l'ensemble des couples (a,b) de nombres complexes tels que $|a|^2+|b|^2=1$, donc à la sphère $\mathbf{S}_3$ dans $\mathbf{R}^4$. C'est donc un groupe simplement connexe.

Le groupe $\mathrm{SO}(2)$ est homéomorphe au cercle. Son revêtement universel n'est autre que le groupe $\mathbf{R}$, la projection étant donnée par $\varphi \mapsto \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$.

Soit B l'ensemble des matrices de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ de la forme $\begin{pmatrix} t & z \\ 0 & 1/t\end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbf{R}_+^*$ et $z \in \mathbf{C}$. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt montre que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) = \mathrm{SU}_2\cdot B$; plus précisément, l'application de $\mathrm{SU}_2\times B$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ donnée par $(g,b)\mapsto gb$ est un homéomorphisme. Elle est en effet continue, surjective (Gram-Schmidt) et injective car $\mathrm{SU}_2\cap B$ est réduit à l'élément neutre. Montrons que sa bijection réciproque est continue. Considérons donc une suite (g_n,b_n) d'éléments de $\mathrm{SU}_2\times B$ telle que g_nb_n tend vers gb, avec $(g,b)\in\mathrm{SU}_2\times B$. Comme SU_2 est compact, on peut supposer que la suite (g_n) converge vers $g'\in\mathrm{SU}_2$, quitte à en extraire une sous-suite. Alors, $b_n = g_n^{-1}gb$ converge vers $b' = (g')^{-1}gb$. On a $b'\in B$ par B est fermé dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ et l'égalité $gb = g'b'$ entraîne $g=g'$ et $b=b'$.

Comme $\mathbf{R}_+^*\times\mathbf{C}$ est contractile, il est simplement connexe. Il en résulte que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, homéomorphe au produit de deux espaces simplement connexes, est simplement connexe.

Appliquons le même argument à $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$. De la décomposition de Gram-Schmidt, on déduit un homéomorphisme de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ avec $\mathrm{O}_2\times B$, où B est le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ formé des matrices $\begin{pmatrix} t & x\\ 0 & 1/t\end{pmatrix}$, avec $t>0$ et $x\in\mathbf{R}$. Il en résulte que le groupe fondamental du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$.

(1) Il suffirait de supposer que l'ensemble des composantes connexes de G est au plus dénombrable.

PROPOSITION 2.4. — *Soit $\tilde{G}$ le revêtement universel du groupe* $SL_2(\mathbf{R})$. *Tout homomorphisme continu de $\tilde{G}$ dans un groupe linéaire se factorise par* $SL_2(\mathbf{R})$.

En particulier, aucun revêtement non trivial de $SL_2(\mathbf{R})$ n'est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe linéaire.

Proof. — Notons p la projection de $\tilde{G}$ sur $SL_2(\mathbf{R})$ et rappelons que $p_* : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$ est un isomorphisme. Soit $\rho\colon \tilde{G} \to GL_n(\mathbf{R})$ un homomorphisme de groupes de Lie. Sa différentielle $d\rho$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie. Notons $\varphi = d\rho \circ (p_*)^{-1}$ l'homomorphisme de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$ dans $M_n(\mathbf{R})$ qui en résulte.

L'homomorphisme $\varphi_{\mathbf{C}}\colon \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}) \to M_n(\mathbf{C})$ obtenu par complexification de φ est un homomorphisme d'algèbres de Lie. D'après les résultats du chapitre 2, § 6.9, c'est la différentielle d'une représentation (holomorphe) $\pi_{\mathbf{C}}$ de $SL_2(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}^n$. Si $X \in M_n(\mathbf{C})$, on a $\exp(\overline{X}) = \overline{\exp(X)}$. Par suite, la restriction π à $SL_2(\mathbf{R})$ de l'homomorphisme $\pi_{\mathbf{C}}\colon SL_2(\mathbf{C}) \to GL_n(\mathbf{C})$ qui en résulte est d'image contenue dans $GL_n\mathbf{R})$. Les homomorphismes $\pi \circ p$ et ρ de $\tilde{G}$ dans $GL_n(\mathbf{R})$ ont même différentielle en l'origine. Comme $\tilde{G}$ est connexe, ils sont donc égaux, d'où la proposition. □

§3. Le théorème de Frobenius

3.1. Distributions. — Soit M une variété différentielle de dimension n. Une distribution D sur M est la donnée en tout point x de M d'un sous-espace D_x de T_xM. On ne considérera dans la suite que des distributions, dites lisses de dimension r, pour lesquelles il existe, au voisinage de tout point x de M, r champs de vecteurs $X_1, \dots, X_r$, sur M tels que $X_1(x), \dots, X_r(x)$ forment une base de D_x. Un champ de vecteurs X sur M sera dit tangent à D si l'on a $X(x) \in D_x$ pour tout $x \in M$. Nous dirons qu'une distribution D est *involutive* si le crochet $[X, Y]$ de tout couple de champ de vecteurs X et Y tangents à D est encore tangent à D.

Une sous-variété N de M sera dite variété intégrale de la distribution D si l'on a $T_xN = D_x$ pour tout $x \in N$. Une distribution sera dite *intégrable* s'il passe par tout point de N une sous-variété intégrale, et *localement intégrable* si pour tout point x de M, il existe un voisinage U de x et une sous-variété intégrale N de la distribution restreinte à U.

3.2. Condition nécessaire d'intégrabilité. — Soit x un point de M et supposons qu'il existe un voisinage U de x et une sous-variété intégrale N de U passant par x ; notons alors $i\colon N \to M$ l'immersion canonique. Soit X_1 et X_2 des champs de vecteurs sur M tangents à D. Leur restriction à N définit des champs de vecteurs sur N, qu'on notera Y_1 et Y_2. Par définition, Y_1 et X_1 sont i-associés, de même pour Y_2 et X_2. Il en résulte que leurs crochets $[Y_1, Y_2]$ et $[X_1, X_2]$ sont aussi i-associés. Cela signifie que $[X_1, X_2](y)$ appartient à D_y pour tout point y de U; cela vaut en particulier pour $y = x$.

Par suite, si la distribution D est localement intégrable, les crochets $[X_1, X_2]$ appartient à D_y en tout point de M : la distribution D est involutive.

3.3. Considérons inversement une distribution (lisse de dimension r) sur M qui soit involutive. Soit U un ouvert de carte sur lequel il existe r champs de vecteurs $X_1, \dots, X_r$ qui forment une base de D en tout point. Fixons un point x_0 de U. Quitte à restreindre U et à renuméroter les coordonnées locales, on peut supposer que la projection $\pi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^r$ fournie par les r premières coordonnées, induit, pour tout point x de U, un isomorphisme de D_x sur son image. Quitte à remplacer les champs X_i par l'image réciproque par π^{-1} des champs $\partial/\partial x_i$ sur $\mathbf{R}^r$, on peut alors écrire, pour $1 \leqslant i \leqslant r$,

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=r+1}^{n} a_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Si $1 \leqslant i, j \leqslant r$, le crochet $[X_i, X_j]$ est π-associé au crochet des champs $\partial/\partial x_i$ et $\partial/\partial x_j$; comme ils sommutent, $[X_i, X_j]$ se projette sur 0 par π. Comme la distribution D est involutive, cela entraîne que les champs X_i et X_j commutent.

Soit φ l'application donnée par $(t_1,\dots,t_r) \mapsto \Phi_{t_1}^{X_1} \circ\cdots\circ \Phi_{t_r}^{X_r}(x_0)$. Elle est bien définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^r$. On a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t_1,\dots,t_r) = X_1(\varphi(t_1,\dots,t_r)).$$

Comme les champs de vecteurs X_i commutent, il en est de même de leurs flots, et on peut écrire

$$\varphi(t_1,\dots,t_r) = \Phi_{t_i}^{X_i} \circ \Phi_{t_1}^{X_1} \circ\cdots\circ \Phi_{t_r}^{X_i}$$

et l'on a en dérivant

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t_1,\dots,t_r) = X_i(\varphi(t_1,\dots,t_r)).$$

La différentielle de φ en l'origine est l'application de $\mathbf{R}^r$ dans $T_{x_0}M$ donnée par $(t_1,\dots,t_r) \mapsto \sum t_i X_i(x_0)$. Elle est donc injective. Cela montre que φ est une immersion et $(t_1,\dots,t_r)$ est le début d'un système de coordonnées locales autour de x_0. En définitive, cela permet de supposer que l'on a $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, si $1 \leqslant i \leqslant r$.

Nous avons ainsi construit un voisinage U de 0 dans $\mathbf{R}^r$, un voisinage V de x_0 dans M, une immersion $\varphi\colon U \to V$ telle que $\varphi(U)$ soit une sous-variété intégrale de la distribution D. Cela montre qu'*une distribution involutive est localement intégrable;* c'est le théorème de Frobenius.

3.4. L'image de l'immersion locale φ peut aussi être décrite indépendamment de ces coordonnées locales. En effet, la description ci-dessus entraîne que toute courbe locale γ qui est tangente à la distribution D et telle que $\gamma(0) = x_0$ est contenue dans l'image de φ. En fait, $\varphi(U)$ est l'ensemble des extrémités des chemins d'origine x_0 qui sont contenus dans V, $\mathscr{C}^1$ par morceaux et tangents à D.

Fixons encore $x_0 \in M$ et soit F la réunion des images des chemins ($\mathscr{C}^1$ par morceaux) d'origine x_0 dans M qui sont tangents à D et notons $i\colon F \to M$ l'injection canonique. Soit x un point de F ; alors x possède un voisinage U dans M tel que les points de M qui sont joignables à x par une chemin contenue dans U forment une sous-variété V_x de de dimension r de U. Mettant bout à bout un chemin joignant x_0 à x et un chemin d'origine x, on voit que $V_x \subset F \cap U$.

Munissons F de la topologie la plus fine pour laquelle ces V_x soient des voisinages de x. Pour cette topologie, les voisinages de x dans F sont exactement les voisinages de x dans V_x. En effet, notant V_y une sous-variété intégrale passant par y, si l'on a $x \in V_y$, la description locale de l'image de l'immersion φ montre que V_y et V_x coïncident au voisinage de x.

Pour cette topologie, F est connexe par arcs, donc est connexe. De plus, les voisinages V_x munissent F, muni de cette topologie, d'une structure de variété différentielle de dimension r, telle que $i\colon F \to M$ soit une immersion. On dira que F est la *sous-variété immergée maximale tangente à D passant par x_0.*

§4. Correspondance groupes et algèbres de Lie

4.1. Soit G un groupe de Lie et soit H un sous-groupe de Lie. Alors, l'algèbre de Lie de H s'identifie à une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Inversement, il n'est pas vrai que toute sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ soit l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Lie. Nous allons voir que c'est cependant l'algèbre de Lie d'un germe de sous-groupe de Lie, objet appelé parfois *groupuscule de Lie.*

4.2. Soit donc $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Soit $X_1,\dots,X_r$ une base de $\mathfrak{h}$. Considérant les X_i comme des champs de vecteurs invariants à gauche. On lui associe une distribution $D(\mathfrak{h})$ sur G. Comme $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie, cette distribution est involutive, donc localement intégrable, d'après le théorème de Frobenius.

Soit (H, i) la sous-variété immergée maximale passant par e et tangente à la distribution $D(\mathfrak{h})$. Ainsi, H est une variété différentielle connexe de dimension r et $i\colon H \to G$ est une immersion injective telle que $T_x i$ soit un isomorphisme de $T_x H$ sur $(\lambda_{i(x)})_*\mathfrak{h}$.

4.3. Montrons que H est un sous-groupe de G. Si $\gamma\colon t \mapsto \gamma(t)$ est un chemin tangent à $D(\mathfrak{h})$ joignant e à g, le chemin $t \mapsto g^{-1}\gamma(t)$ est tangent à $D(\mathfrak{h})$ et joint g^{-1} à e. Par suite, $g^{-1} \in G$. De même, le chemin $t \mapsto g'\gamma(t)$ est tangent à $D(\mathfrak{h})$ et joint g' à $g'g$; si on le concatène à un chemin joignant e à g', on obtient un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux, tangent à $D(\mathfrak{h})$, qui joint e à $g'g$.

En outre, si $g \in H$ et si V est une sous-variété intégrale locale au voisinage de $e \in H$, gV est une sous-variété intégrale locale au voisinage de g. Pour tout $g \in V$, il existe en particulier un voisinage U de e contenu dans V tel que $gU \subset V$. Cela montre que V est stable par la multiplication de G au voisinage de e, donc que cette multiplication est différentiable au voisinage de l'origine. Par suite, H est un groupe de Lie.

4.4. Tout homomorphisme de groupes de Lie $f: G \to H$ a une différentielle, qui est un homomorphisme $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ entre leurs algèbres de Lie. Inversement, tout homomorphisme $\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ de l'algèbre de Lie de G vers celle de H n'est pas nécessairement de cette forme.

Considérons, dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$, le graphe de φ ; c'en est une sous-algèbre de Lie. Soit (Γ, i) le groupe de Lie immergé dans $G \times H$ qui l'intègre. L'application $\mathrm{pr}_1: \Gamma \to G$ déduite de la première projection $G \times H \to G$ a pour différentielle l'identité. Par suite, c'est un revêtement de G.

PROPOSITION 4.5. — *Soit G et H des groupes de Lie et soit $\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un homomorphisme de leurs algèbres de Lie. Si G est simplement connexe, il existe un unique homomorphisme de groupes de Lie $f: G \to H$ dont φ soit la différentielle.*

En d'autres termes : le foncteur qui, à un groupe de Lie simplement connexe, associe son algèbre de Lie est pleinement fidèle. C'est en fait une *équivalence de catégories* : on peut construire, pour toute algèbre de Lie de dimension finie un groupe de Lie connexe et simplement connexe dont ce soit l'algèbre de Lie (troisième théorème de Lie). Ce groupe de Lie est unique à isomorphisme unique près, mais, en général, on n'en connaît pas de construction “naturelle”.

Il y a deux cas cependant où une telle construction est aisée, à savoir celui d'une algèbre de Lie commutative ou d'une algèbre de Lie dont le centre est trivial. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie commutative, on peut prendre pour groupe de Lie l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$, muni de l'addition. À l'inverse, rappelons que l'on dispose, pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, de la *représentation adjointe* $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$. Son noyau est formé des $X \in \mathfrak{g}$ tels que $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y] = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$. On l'appelle le *centre* de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Lorsqu'il est trivial, $\mathfrak{g}$ est isomorphe à une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ qui est l'algèbre de Lie du groupe $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. Il en résulte que $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie.

Le cas général provient du théorème suivant, que nous admettrons.

THÉORÈME 4.6 (Ado). — *Toute algèbre de Lie de dimension finie possède une représentation linéaire fidèle.*

En d'autres termes, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbf{R}$, il existe un homomorphisme injectif d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie. Comme précédemment, on associe à la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathrm{End}(V)$ image de $\mathfrak{g}$ un groupe de Lie connexe H, d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, et canoniquement immergé dans $\mathrm{GL}(V)$. Le revêtement universel G de H est un groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{g}$.

INDEX