

# GÉOMÉTRIE

---

*Cours de master à l'université Paris-Sud (2014–2015)*

**Antoine Chambert-Loir**

*Antoine Chambert-Loir*

Laboratoire de mathématiques d'Orsay, Bâtiment 425, Université Paris-Sud,  
F-91405 Orsay Cedex.

*E-mail*: `Antoine.Chambert-Loir@math.u-psud.fr`

*Url*: `http://www.math.u-psud.fr/~chambert`

*Version du 22 avril 2015*

*La version la plus à jour est disponible sur le Web à l'adresse <http://www.math.u-psud.fr/~chambert/enseignement/2014-15/geometrie/>*

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>1. Revêtements et groupe fondamental</b> .....	1
§ 1.1. <i>Revêtements</i> .....	1
§ 1.2. <i>Espaces simplement connexes</i> .....	6
§ 1.3. <i>Automorphismes d'un revêtement</i> .....	10
§ 1.4. <i>Chemins, groupoïde fondamental</i> .....	13
§ 1.5. <i>Fonctorialité et invariance par homotopie du groupoïde de Poincaré</i> .....	17
§ 1.6. <i>Homotopie et revêtements</i> .....	20
§ 1.7. <i>Revêtement universel</i> .....	26
§ 1.8. <i>Calcul du groupe fondamental</i> .....	31
<b>2. Variétés topologiques</b> .....	39
§ 2.1. <i>Applications différentiables</i> .....	39
§ 2.2. <i>Approximation</i> .....	43
§ 2.3. <i>Un théorème du changement de variables</i> .....	45
§ 2.4. <i>Deux théorèmes de Brouwer</i> .....	49
§ 2.5. <i>Variétés topologiques</i> .....	52
§ 2.6. <i>Variétés topologiques de dimension 1</i> .....	57
<b>3. Sous-variétés différentiables</b> .....	59
§ 3.1. <i>Théorème d'inversion locale et applications</i> .....	59
§ 3.2. <i>Sous-variétés</i> .....	64
§ 3.3. <i>Espaces et cônes tangents</i> .....	67
§ 3.4. <i>Sous-groupes fermés de <math>GL(n, \mathbf{R})</math></i> .....	71
§ 3.5. <i>Fonctions différentiables sur une sous-variété différentiable</i> .....	76
<b>4. Variétés différentiables</b> .....	83
§ 4.1. <i>Définition des variétés différentiables</i> .....	83
§ 4.2. <i>Partitions de l'unité</i> .....	86
§ 4.3. <i>Dérivations et fibré tangent</i> .....	89
§ 4.4. <i>Le théorème de Sard</i> .....	92
§ 4.5. <i>Le théorème de plongement de Whitney</i> .....	98
§ 4.6. <i>Le lemme de Morse</i> .....	101

<b>5. Champs de vecteurs, équations différentielles</b> .....	105
§ 5.1. <i>Le fibré tangent d'une variété différentiable</i> .....	105
<b>6. Formes différentielles</b> .....	107
§ 6.1. <i>L'algèbre des formes multilinéaires alternées</i> .....	107
<b>Bibliographie</b> .....	113

# CHAPITRE 1

## REVÊTEMENTS ET GROUPE FONDAMENTAL

---

### § 1.1. Revêtements

DÉFINITION 1.1.1 (Revêtement). — Soit  $E$  et  $B$  des espaces topologiques et soit  $p: E \rightarrow B$  une application continue. On dit que  $p$  est un revêtement, ou que  $E$  est un revêtement de  $B$ , ou que  $(E, p)$  est un revêtement, si pour tout point  $b$  de  $B$ , il existe un voisinage  $U$  de  $b$ , un espace discret  $F$  et un homéomorphisme  $f_U: U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$  tel que  $p(f_U(x, y)) = x$  pour tout  $x \in U$  et tout  $y \in F$ .

Pour faciliter la discussion, il est commode de séparer la définition d'un revêtement en deux.

DÉFINITION 1.1.2 ( $B$ -espace). — Soit  $B$  un espace topologique. Un  $B$ -espace est un espace topologique  $E$  muni d'une application continue  $p$  de  $E$  vers  $B$ .

On dit que  $B$  est la base du  $B$ -espace  $E$ . Une application continue  $s: B \rightarrow E$  telle que  $p \circ s = \text{id}_B$  est appelée une *section* de  $p$ .

Soit  $B$  un espace topologique et soit  $(E, p)$  un  $B$ -espace.

Soit  $U$  une partie de  $B$ , munie de la topologie induite, soit  $E_U = p^{-1}(U)$  et soit  $p_U: E_U \rightarrow U$  la restriction de  $p$  à  $E_U$ . Alors,  $(E_U, p_U)$  est un  $U$ -espace.

Soit  $(E', p')$  un  $B$ -espace, soit  $E''$  le sous-espace de  $E \times E'$  formé des couples  $(x, x')$  tels que  $p(x) = p'(x')$ , soit  $q: E'' \rightarrow B$  l'application donnée par  $(x, x') \mapsto p(x)$ . Alors,  $(E'', q)$  est un  $B$ -espace, qu'on note  $E \times_B E'$  (*produit fibré*).

Lorsque  $B'$  est un espace topologique et  $q: B' \rightarrow B$  est une application continue, on notera  $E_{B'}$  le sous-espace de  $B' \times E$  formé des couples  $(x, y)$  tels que  $q(x) = p(y)$  et muni de l'application continue  $p': (x, y) \mapsto x$  vers  $B'$ . C'est un  $B'$ -espace (*changement de base*). Lorsque  $q$  est l'injection d'une partie  $U$  de  $B$  dans  $B$ , la seconde projection  $(x, y) \mapsto y$  de  $E_{B'}$  dans  $E$  définit un homéomorphisme de  $E_{B'}$  sur  $q^{-1}(U)$ , de sorte que le  $B'$ -espace  $(E_{B'}, p')$  s'identifie au  $B'$ -espace  $(E_{B'}, p_{B'})$  introduit plus haut.

**DÉFINITION 1.1.3** (Morphisme de  $B$ -espaces). — Soit  $B$  un espace topologique, soit  $(E, p)$  et  $(E', p')$  des  $B$ -espaces. On dit qu'une application continue  $f: E \rightarrow E'$  est un morphisme de  $B$ -espaces si  $p' \circ f = p$ . On dit que c'est un isomorphisme de  $B$ -espaces si c'est en outre un homéomorphisme.

Lorsqu'on prend pour espace  $B'$  une partie  $U$  de  $B$  et pour application  $q$  l'injection de  $U$  dans  $B$ , le  $B$ -espace  $(E_{B'}, p')$  est isomorphe au  $B$ -espace  $(E_U, p_U)$ . En effet, les applications  $f: E_U \rightarrow E_{B'}$ ,  $x \mapsto (p(x), x)$ , et  $g: E_{B'} \rightarrow E_U$ ,  $(u, x) \mapsto x$ , sont continues, bijectives, réciproques l'une de l'autre et satisfont  $p' \circ f = p_U$  et  $p_U \circ g = p'$ .

Nous allons voir qu'il y a beaucoup d'exemples non triviaux, mais commençons d'abord par l'exemple le plus trivial qui soit.

**Exemple 1.1.4** (Revêtement trivial). — Soit  $F$  un espace discret, soit  $E = B \times F$  et soit  $p: B \times F \rightarrow B$  la première projection. Alors  $(E, p)$  est un revêtement (qu'on dit *trivial*) ; on dit que  $F$  est sa  *fibre-type*.

On peut ainsi reformuler la définition d'un revêtement en disant que c'est un  $B$ -espace  $(E, p)$  pour lequel il existe un recouvrement de  $B$  par des ouverts  $U$  tels que le  $U$ -espace  $(E_U, p_U)$  soit isomorphe à un revêtement trivial. Un homéomorphisme  $f: U \times F \rightarrow E_U$  comme dans la définition est appelé une *trivialisat*ion de  $E$  au-dessus de  $U$ .

Si  $(E, p)$  est un revêtement trivial de fibre-type  $F$ , alors pour tout  $b \in B$ ,  $p^{-1}(b)$  est en bijection avec  $F$ . Plus généralement, si  $E$  est un revêtement et qu'il existe une trivialisation de  $E$  au-dessus de  $U$ , alors les fibres  $p^{-1}(b)$ , pour  $b \in U$ , sont des espaces discrets, en bijection l'un à l'autre.

Cette remarque permet de construire facilement des revêtements non triviaux.

**Exemple 1.1.5** (Un revêtement non trivial, pas très intéressant)

Supposons que  $B$  soit réunion de deux parties ouvertes et disjointes,  $B_1$  et  $B_2$ . Soit  $F_1$  et  $F_2$  deux espaces discrets. Soit  $E$  la réunion disjointe des deux espaces  $B_1 \times F_1$  et  $B_2 \times F_2$ . C'est naturellement un  $B$ -espace. Le  $B_1$ -espace  $E_{B_1}$  s'identifie à  $B_1 \times F_1$ , donc est un revêtement trivial ; le  $B_2$ -espace  $E_{B_2}$  s'identifie à  $B_2 \times F_2$ , donc est aussi un revêtement trivial. Par suite,  $E$  est un revêtement de  $B$ .

Si  $F_1$  et  $F_2$  ne sont pas en bijection, par exemple si  $F_1 = \emptyset$  et  $F_2$  est réduit à un point, alors  $E$  n'est pas un revêtement trivial.

**Remarque 1.1.6.** — Soit  $p: E \rightarrow B$  un revêtement. Soit  $U$  un ouvert de  $B$  au-dessus duquel  $E$  est trivialisable. Par la formule  $x \mapsto f(b, x)$ , une trivialisation  $f: U \times F \rightarrow E_U$  induit des homéomorphismes  $F \simeq p^{-1}(b)$ , pour tout  $b \in U$ . En particulier, pour  $b \in U$ , les fibres  $p^{-1}(b)$  sont deux à deux en bijection. Cela prouve que l'application  $b \mapsto \text{card}(p^{-1}(b))$  est localement constante.

Si  $B$  n'est pas vide et que cette application est constante, on appelle degré de  $p$  la valeur commune des cardinaux des fibres  $p^{-1}(b)$ , pour  $b \in B$ .

Si  $B$  est connexe, toute application localement constante est constante, donc un revêtement d'un espace connexe non vide a un degré. En outre, si  $E$  est connexe et  $\deg(p) > 1$ , alors  $E$  n'est pas un revêtement trivial. (Sinon,  $E$  serait homéomorphe à  $B \times F$ , où  $F$  est un espace discret; comme  $\deg(p) > 1$ ,  $F$  a au moins deux points, donc  $B \times F$  n'est pas connexe, contradiction.)

Voici l'exemple le plus important de tous les revêtements, et, en quelque sorte, leur père à tous.

*Exemple 1.1.7 (Le cercle).* — Soit  $\mathbf{S}_1$  le cercle unité dans  $\mathbf{R}^2$ , soit  $p: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}_1$  l'application donnée par  $p(t) = (\cos(t), \sin(t))$ . Alors,  $(\mathbf{R}, p)$  est un revêtement.

Soit  $A$  l'ouvert  $\mathbf{S}_1 \setminus \{(-1, 0)\}$  de  $\mathbf{S}_1$ . Pour  $t \in \mathbf{R}$ ,  $p(t) \in A$  si et seulement si  $t \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$ ; de plus, un point de  $A$  possède un argument bien défini dans  $] -\pi, \pi[$ ; une formule pour cet argument est par exemple

$$\arg_A(x, y) = 2 \arctan \frac{y}{x+1}.$$

En effet, si  $x = \cos(t)$  et  $y = \sin(t)$ , avec  $|t| < \pi$ , alors

$$\frac{y}{x+1} = \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)} = \frac{2 \sin(t/2) \cos(t/2)}{2 \cos^2(t/2)} = \tan(t/2),$$

et comme  $t/2 \in ]-\pi/2, \pi/2[$ , on a  $t/2 = \arctan(y/(x+1))$ . Alors,

$$A \times \mathbf{Z} \rightarrow p^{-1}(A), \quad ((x, y), n) \mapsto \arg_A(x, y) + 2n\pi$$

est un isomorphisme de  $A$ -espaces, si bien que le  $A$ -espace  $(p^{-1}(A), p_A)$  est un revêtement trivial.

De même, soit  $B$  l'ouvert  $\mathbf{S}_1 \setminus \{(0, 1)\}$  de  $\mathbf{S}_1$ . Pour  $t \in \mathbf{R}$ ,  $p(t) \in B$  si et seulement si  $t \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ ; inversement, un point de  $B$  possède un argument bien défini dans  $]0, 2\pi[$ , donné par la formule

$$\arg_B(x, y) = \pi - 2 \arctan \frac{y}{1-x}.$$

Le  $B$ -espace  $(p^{-1}(B), p_B)$  est un revêtement trivial.

Comme  $A$  et  $B$  sont ouverts et recouvrent  $\mathbf{S}_1$ , cela prouve que  $(\mathbf{R}, p)$  est un revêtement.

Ce n'est pas un revêtement trivial. Supposons par l'absurde qu'il existe un espace discret  $F$  et un homéomorphisme  $f: \mathbf{S}_1 \times F \rightarrow \mathbf{R}$  telle  $p \circ f((x, y), z) = (x, y)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbf{S}_1$  et tout  $z \in F$ . Comme  $\mathbf{R}$  est connexe et non vide, il est nécessaire que  $F$  soit un singleton. Alors,  $\mathbf{R}$  est homéomorphe à  $\mathbf{S}_1 \times F$ , qui est homéomorphe à  $\mathbf{S}_1$ . Mais  $\mathbf{S}_1$  est compact alors que  $\mathbf{R}$  ne l'est pas; contradiction.

Il est peut-être plus facile de visualiser ce revêtement comme suit. Soit  $E$  l'ensemble des points de  $\mathbf{R}^3$  de la forme  $(\cos(t), \sin(t), t)$  et soit  $q: E \rightarrow \mathbf{S}_1$  l'application donnée

par  $q(x, y, z) = (x, y)$ . Alors  $(E, q)$  est un revêtement. En fait, l'application  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto z$ , est un isomorphisme de  $\mathbf{S}_1$ -espaces.

*Exemple 1.1.8.* — L'application exponentielle  $\exp: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^*$  fait de  $\mathbf{C}$  un revêtement (non trivial) de  $\mathbf{C}^*$ .

Par l'application  $z \mapsto z^n$ ,  $\mathbf{C}^*$  est un revêtement (non trivial) de degré  $n$  de lui-même.

*Exemple 1.1.9* (Produit de deux revêtements). — Soit  $B$  un espace topologique, soit  $E'$  et  $E''$  des revêtements de  $B$ . Alors  $E' \times_B E''$  est un revêtement de  $B$ .

On commence par traiter le cas où  $E'$  et  $E''$  sont triviaux de fibres-type  $F'$  et  $F''$  : si  $E' = B \times F'$  et  $E'' = B \times F''$ , alors  $E' \times_B E''$  s'identifie à  $B \times F' \times F''$ , donc est un revêtement trivial de fibre-type  $F' \times F''$ .

Traitons le cas général. Soit  $b$  un point de  $B$ , soit  $U'$  un voisinage de  $b$  au-dessus duquel  $E'$  est trivial, soit  $U''$  un voisinage de  $b$  au-dessus duquel  $E''$  est trivial et soit  $U = U' \cap U''$  ; c'est un voisinage de  $b$ . De plus,  $(E' \times_B E'')_U$  est égal à  $E'_U \times_U E''_U$ , donc est un revêtement trivial puisque  $E'_U$  et  $E''_U$  sont des revêtements triviaux.

*Exemple 1.1.10* (Image inverse d'un revêtement). — Soit  $B$  un espace topologique, soit  $(E, p)$  un revêtement de  $B$ . Soit  $B'$  un espace topologique, soit  $f: B' \rightarrow B$  une application continue. Alors  $E_{B'}$  est un revêtement de  $B'$ .

On commence par traiter le cas où  $E = B \times F$  est un revêtement trivial, de fibre-type  $F$ . Alors,  $E_{B'}$  est le sous-espace de  $B' \times B \times F$  formé des points  $(x', x, y)$  tels que  $f(x') = x$  ; il s'identifie à  $B' \times F$  par l'application  $(x', x, y) \mapsto (x', y)$ . En particulier, c'est un revêtement trivial.

Traitons maintenant le cas général. Soit  $b'$  un point de  $B'$ , soit  $U$  un voisinage de  $f(b')$  au-dessus duquel  $E_U$  est trivial et soit  $U' = f^{-1}(U)$  ; c'est un voisinage de  $b'$ . De plus,  $(E_{B'})_{U'}$  est le sous-espace de  $E_{B'}$  formé des points  $(x', y)$  de  $B' \times E$  tels que  $x' \in U'$ . Il s'identifie donc au sous-espace de  $B' \times E$  tels que  $f(x') \in U$ , où encore à  $U' \times_U E_U$ . Par suite, c'est un revêtement trivial.

*Exemple 1.1.11* (Quotient). — Soit  $E$  un espace topologique, soit  $G$  un groupe formé d'homéomorphismes de  $E$  dans lui-même. Soit  $B$  l'espace quotient  $E/G$  : c'est l'ensemble des orbites de  $G$  muni de la topologie la plus fine (celle qui a le plus d'ouverts possibles) pour laquelle l'application canonique  $p: E \rightarrow E/G$ ,  $x \mapsto \mathcal{O}_G(x)$  est continue. Remarquons que si  $V$  est une partie de  $E/G$  ouverte pour une topologie rendant  $p$  continue, alors  $p^{-1}(V)$  est ouvert dans  $E$ . Soit donc  $\mathcal{T}$  la famille d'ensembles de  $E/G$  formée des parties  $V$  de  $E/G$  tels que  $p^{-1}(V)$  est ouvert dans  $E$  : cela fait une topologie sur  $E/G$  ( $\emptyset$  et  $E/G$  appartiennent à  $\mathcal{T}$ , l'intersection de deux parties de  $\mathcal{T}$  appartient à  $\mathcal{T}$ , la réunion d'une famille de parties de  $\mathcal{T}$  appartient à  $\mathcal{T}$ ) et l'application  $p$  est continue pour la topologie  $\mathcal{T}$ . Cette topologie est ainsi la plus fine pour laquelle  $p$  est continue. La conséquence importante est la *propriété universelle* suivante : si  $F$  est



un espace topologique,  $A$  une partie de  $E/G$  et  $f: A \rightarrow F$  une application, alors  $f$  est continue si et seulement si  $f \circ p: f^{-1}(A) \rightarrow F$  est continue.

Supposons que l'action de  $G$  sur  $E$  vérifie en outre la propriété suivante (on dira qu'elle est *régulière*) :

Tout point  $x$  de  $E$  possède un voisinage ouvert  $U$  tel que la famille  $(g(U))_{g \in G}$  soit formée d'ouverts deux à deux disjoints.

Alors,  $p: E \rightarrow E/G$  est un revêtement.

Soit  $b$  un point de  $E/G$ , soit  $x$  un point de  $E$  tel que  $p(x) = b$  et soit  $U$  un voisinage de  $x$  tel que la famille  $(g(U))_{g \in G}$  soit formée d'ouverts deux à deux disjoints. Soit  $V = p(U)$ . Observons que  $p^{-1}(V)$  est la réunion des  $g(U)$ , pour  $g \in G$  : en effet, pour  $y \in E$ , on a  $y \in p^{-1}(V)$  si et seulement si  $p(y) \in V$ , c'est-à-dire si et seulement s'il existe  $y \in U$  tel que  $p(y) = p(x)$ , c'est-à-dire si et seulement s'il existe  $y \in U$  et  $g \in G$  tel que  $x = g(y)$ . En particulier,  $p^{-1}(V)$  est ouvert, donc  $V$  est ouvert dans  $B$ . De plus,  $p$  induit une bijection continue de  $U$  sur  $V$  ; notons  $q: V \rightarrow U$  sa bijection réciproque. Observons que la restriction à  $gU$  de la composée  $q \circ p$  est l'application  $x \mapsto g^{-1}x$ , donc est continue. Par suite,  $q \circ p$  est continue et  $p$  est un homéomorphisme.

Enfin, l'application de  $V \times G$  dans  $p^{-1}(V)$  donnée par  $x \mapsto g \cdot q(x)$  est continue et bijective. La restriction à  $gU$  de sa bijection réciproque est l'application  $x \mapsto (g, g^{-1}x)$ , donc est continue. Cela prouve que le  $B$ -espace  $(E, p)$  est trivialisable au-dessus de  $V$ .

*Exercice 1.1.12.* — Soit  $E$  un espace topologique et soit  $G$  un groupe d'homéomorphismes de  $E$  dans  $E$ .

a) L'action est régulière si et seulement tout point de  $E$  a un voisinage  $U$  tel que  $U \cap gU = \emptyset$  si  $g \neq 1$ .

b) Pour que l'action de  $G$  sur  $E$  soit régulière, il est nécessaire que pour tout  $x \in E$  et tout  $g \in G$ ,  $g \cdot x \neq x$  (on dit que l'action de  $G$  sur  $E$  est *libre*).

c) Si  $G$  est fini, l'action est régulière si et seulement si elle est libre.

d) Si l'action de  $G$  est libre, il faut et il suffit, pour qu'elle soit régulière, que tout point de  $E$  ait un voisinage  $U$  tel que l'ensemble des  $g \in G$  tels que  $U \cap gU \neq \emptyset$  soit fini (l'action du groupe discret  $G$  est *propre*).

*Exercice 1.1.13.* — Soit  $p: E \rightarrow B$  un revêtement.

a) Soit  $x$  un point de  $E$  et soit  $a = p(x)$  ; démontrer qu'il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $E$  et un voisinage  $V$  de  $a$  dans  $B$  tel que  $p$  induise un homéomorphisme de  $U$  sur  $V$ . (On dit que  $p$  est un *homéomorphisme local*. Trouver un exemple d'homéomorphisme local qui n'est pas un revêtement.)

b) Démontrer que pour tout ouvert  $U$  de  $E$ ,  $p(U)$  est ouvert dans  $B$ .

c) Démontrer que si  $E$  est séparé, alors  $B$  est séparé.

## § 1.2. Espaces simplement connexes

DÉFINITION 1.2.1. — *On dit qu'un espace topologique  $B$  est simplement connexe<sup>(1)</sup> si tout revêtement de  $B$  est trivial.*

Exercice 1.2.2. — Si  $B$  est simplement connexe ; démontrer que  $B$  est connexe.

Exemple 1.2.3. — Le cercle n'est pas simplement connexe.

LEMME 1.2.4. — *Soit  $B$  un espace topologique, soit  $p: E \rightarrow B$  un revêtement. Soit  $A_1$  et  $A_2$  des parties de  $B$  telles que  $E$  soit trivialisable au-dessus de  $A_1$ ,  $E$  soit trivialisable au-dessus de  $A_2$ , et  $A_1 \cap A_2$  soit connexe et non vide. On suppose aussi que  $A_1$  et  $A_2$  sont toutes deux fermées, ou toutes deux ouvertes. Alors,  $E$  est trivialisable au-dessus de  $A_1 \cup A_2$ .*

*Démonstration.* — Posons  $A = A_1 \cup A_2$  et  $C = A_1 \cap A_2$ . Soit  $f_1: A_1 \times F_1 \rightarrow E_{A_1}$  une trivialisatation de  $E$  au-dessus de  $A_1$ , soit  $f_2: A_2 \times F_2 \rightarrow E_{A_2}$  une trivialisatation de  $E$  au-dessus de  $A_2$ .

Soit  $z$  un point de  $C$ . Les trivialisations  $f_1$  et  $f_2$  identifient  $F = p^{-1}(z)$  à  $F_1$  et  $F_2$  respectivement. Notons ainsi  $g_1: F \rightarrow F_1$  l'application telle que  $f_1(z, g_1(y)) = y$  pour tout  $y \in p^{-1}(z)$ . Définissons  $g_2$  de façon analogue. Ce sont des bijections.

On veut définir une application  $f: A \times F \rightarrow E$  par la formule

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, g_1(y)) & \text{si } x \in A_1 \text{ et } y \in F, \\ f_2(x, g_2(y)) & \text{si } x \in A_2 \text{ et } y \in F; \end{cases}$$

pour cela, il suffit de vérifier que ces prescriptions sont compatibles pour  $x \in A_1 \cap A_2$ , c'est-à-dire que pour  $x \in C$  et  $y \in F$ ,  $f_1(x, g_1(y)) = f_2(x, g_2(y))$ . Fixons  $y \in F$ ; soit  $u_y$  l'application de  $C$  dans  $F$  donnée par  $f_1(x, g_1(y)) = f_2(x, u_y(x))$  pour  $x \in C$ ; elle est bien définie et continue. Comme  $C$  est connexe et  $F$  discret, elle est constante et  $u_y(x) = u_y(z)$  pour tout  $x \in C$ . Or  $f_2(z, u_y(z)) = f_1(z, g_1(y)) = y = f_2(z, g_2(y))$ . Par suite,  $g_2(y) = u_y(z)$ . Ainsi,  $u_y(x) = g_2(y)$  pour tout  $x \in C$ , et  $f_1(x, g_1(y)) = f_2(x, u_y(x)) = f_2(x, g_2(y))$ , ce qu'il fallait démontrer.

Les restrictions de  $f$  aux parties  $A_1 \times F$  et  $A_2 \times F$  sont continues. Comme  $A_1 \times F$  et  $A_2 \times F$  sont toutes deux fermées ou toutes deux ouvertes,  $f$  est continue. C'est un homéomorphisme de  $A$ -espaces de  $A \times F$  sur  $E_A$ . En particulier,  $E_A$  est un revêtement trivial. □

<sup>(1)</sup>Même si c'est regrettable, cette terminologie n'est pas absolument standard. La notion d'espace simplement connexe est souvent définie en termes de classes d'homotopie de lacets, ce que nous appellerons « simplement connexe par arc. » Nous verrons plus tard que les deux notions coïncident pour les bons espaces.

*Exercice 1.2.5.* — Soit  $X$  et  $Y$  des espaces topologiques, soit  $f: X \rightarrow Y$  une application. Soit  $A$  et  $B$  des parties de  $X$  telles que  $X = A \cup B$ ; on suppose que  $f|_A$  et  $f|_B$  sont continues.

- a) Si  $A$  et  $B$  sont toutes deux ouvertes, démontrer que  $f$  est continue.
- b) Si  $A$  et  $B$  sont toutes deux fermées, démontrer que  $f$  est continue.
- c) Trouver un exemple où  $f$  n'est pas continue.

PROPOSITION 1.2.6. — *Pour tout entier  $n \geq 0$ , le cube  $[0, 1]^n$  est simplement connexe.*

*Démonstration.* — Soit  $B = [0, 1]^n$  et soit  $p: E \rightarrow B$  un revêtement. Par définition, tout point de  $[0, 1]^n$  possède un voisinage au-dessus duquel  $E$  est trivialisable. D'après le lemme de Lebesgue (proposition 1.2.7), il existe un entier  $m \geq 1$  tel que  $E$  soit trivialisable au-dessus de chaque cube de la forme  $\prod_{i=1}^n [\frac{k_i-1}{m}, \frac{k_i}{m}]$ , où  $(k_1, \dots, k_n) \in \{1, \dots, m\}^n$ .

Cas  $n = 1$ . Par hypothèse,  $E$  est trivialisable sur les fermés  $[0, 1/m]$  et  $[1/m, 2/m]$ , dont l'intersection est connexe et non vide. Donc  $E$  est trivialisable sur  $[0, 2/m]$ . Puis, par récurrence sur  $k$ , on démontre de même que  $E$  est trivialisable sur  $[0, k/m]$  pour tout entier  $k \in \{1, m\}$ . En particulier,  $E$  est trivialisable.

Cas  $n = 2$ . Par hypothèse,  $E$  est trivialisable sur  $[0, 1/m] \times [0, 1/m]$  et sur  $[0, 1/m] \times [1/m, 2/m]$ , dont l'intersection  $[0, 1/m] \times \{1/m\}$  est connexe. Par suite,  $E$  est trivialisable sur  $[0, 1/m] \times [0, 2/m]$ . De proche en proche,  $E$  est trivialisable sur  $[0, 1/m] \times [0, 1]$ . Le même argument démontre que pour tout entier  $k \in \{1, \dots, m\}$ ,  $E$  est trivialisable sur  $[(k-1)/m, k/m] \times [0, 1]$ . Puisqu'il est trivialisable sur  $[0, 1/m] \times [0, 1]$  et  $[1/m, 2/m] \times [0, 1]$  dont l'intersection  $\{1/m\} \times [0, 1]$  est connexe, le revêtement  $E$  est trivialisable sur  $[0, 2/m] \times [0, 1]$ . Par récurrence,  $E$  est trivialisable sur  $[0, k/m] \times [0, 1]$  pour tout  $k \in \{0, \dots, m\}$ , donc sur  $[0, 1]^2$ .

Traisons maintenant le cas général. Soit  $d \in \{0, \dots, n\}$  et soit  $j = (j_1, \dots, j_{n-d})$  une suite d'entiers de  $\{1, \dots, m\}$ ; notons  $P_j$  le pavé  $\prod_{i=1}^{n-d} [\frac{j_i-1}{m}, \frac{j_i}{m}]$ . Démontrons alors par récurrence sur  $d$  que le revêtement  $E$  est trivialisable sur  $P \times [0, 1]^d$ .

L'assertion est vraie pour  $d = 0$ . Supposons-la vraie pour  $d - 1$ . Démontrons par récurrence sur  $k \in \{1, \dots, m\}$  que le revêtement  $E$  est trivialisable sur  $P \times [0, k/m] \times [0, 1]^d$ . D'après le cas  $d - 1$ , c'est vrai si  $k = 1$ ; plus précisément, le revêtement  $E$  est alors trivialisable sur chaque ensemble de la forme  $P \times [(k-1)/m, k/m] \times [0, 1]^{d-1}$ . S'il est trivialisable sur  $P \times [0, k/m] \times [0, 1]^{d-1}$ , il l'est alors sur  $P \times [0, (k+1)/m] \times [0, 1]^{d-1}$  car cet ensemble est la réunion des deux ensembles connexes  $P \times [0, k/m] \times [0, 1]^{d-1}$  et  $P \times [k/m, (k+1)/m] \times [0, 1]^{d-1}$  sur lesquels  $E$  est trivialisables et dont l'intersection, égale à  $P \times \{k/m\} \times [0, 1]^{d-1}$ , est connexe. Pour  $k = m$ , on obtient que  $E$  est trivialisable sur  $P \times [0, 1]^d$ . Cela démontre l'assertion voulue par récurrence sur  $d$ . Lorsque  $d = n$ , on obtient que  $E$  est trivialisable sur  $[0, 1]^n$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

PROPOSITION 1.2.7 (Lemme de Lebesgue). — Soit  $X$  un espace métrique compact, soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $X$  par des parties ouvertes. Il existe un nombre réel  $\delta > 0$  tel que tout ensemble  $A \subset X$  de diamètre  $< \delta$  soit contenu dans l'un des ouverts  $U_i$ .

*Démonstration.* — Pour tout  $x \in X$ , fixons un nombre réel  $r_x > 0$  et un élément  $i_x \in I$  tels que  $B(x, 4r_x) \subset U_{i_x}$ . Puisque  $X$  est compact, il est recouvert par un nombre fini des ensembles  $B(x, r_x)$ , correspondant à des points  $x_1, \dots, x_n$ . Soit  $\delta = \min(r_{x_1}, \dots, r_{x_n})$ . Considérons alors une partie  $A \subset X$  de diamètre  $< \delta$  et démontrons qu'elle est contenue dans l'un des  $U_i$ . C'est évident si  $A$  est vide; sinon, soit  $a \in A$ , soit  $m \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $a \in B(x_m, r_{x_m})$ . Puisque le diamètre de  $A$  est  $< \delta$ , on a  $A \subset B(x_m, r_{x_m})$ , donc  $A \subset U_{i_m}$ .  $\square$

Exemple 1.2.8. — Pour tout entier  $n \geq 1$ , la boule unité fermée  $\mathbf{B}_n$  de  $\mathbf{R}^n$  (pour n'importe quelle norme) est simplement connexe. En effet,  $\mathbf{B}_n$  est homéomorphe à  $[-1, 1]^n$ .

Notons  $\|\cdot\|$  la norme choisie sur  $\mathbf{R}^n$  et  $\|\cdot\|_\infty$  la norme donnée par  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$ . Soit  $f: [-1, 1]^n \rightarrow \mathbf{B}_n$  l'application telle que  $f(0) = 0$  et  $f(x) = (\|x\|_\infty / \|x\|)x$  si  $x \neq 0$ . Elle est continue; c'est évident en  $x \neq 0$ , ainsi qu'en 0. Elle est bijective, sa bijection réciproque est l'application  $g$  de  $\mathbf{B}_n$  sur  $[-1, 1]^n$  telle que  $g(0) = 0$  et  $g(y) = (\|y\| / \|y\|_\infty)y$  si  $y \neq 0$ .

Exemple 1.2.9. — Pour tout entier  $n \geq 2$ , la sphère  $\mathbf{S}_n$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$  est simplement connexe.

On note  $\mathbf{S}_n^+$  et  $\mathbf{S}_n^-$  les hémisphères positifs et négatifs de  $\mathbf{S}_n$ , les ensembles des points  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{S}_n$  tels que respectivement  $x_{n+1} \geq 0$  et  $x_{n+1} \leq 0$ . La projection de  $\mathbf{S}_n^+$  sur  $\mathbf{R}^n$  donnée par  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$  est un homéomorphisme de  $\mathbf{S}_n^+$  sur  $\mathbf{B}_{n-1}$ , sa bijection réciproque applique  $(x_1, \dots, x_n)$  sur  $(x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2})$ . Par suite,  $\mathbf{S}_n^+$  est simplement connexe. Par symétrie,  $\mathbf{S}_n^-$  est simplement connexe. Enfin, l'intersection  $\mathbf{S}_n^+ \cap \mathbf{S}_n^-$  est l'ensemble des points de  $\mathbf{R}^n \times \{0\}$  tels que  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ ; elle est donc homéomorphe à  $\mathbf{S}_{n-1}$ . Puisque  $n \geq 2$ ,  $\mathbf{S}_{n-1}$  est connexe. D'après le lemme 1.2.4,  $\mathbf{S}_n$  est simplement connexe.

Soit  $A, B, E$  des espaces topologiques, soit  $p: E \rightarrow B$  et  $f: A \rightarrow B$  des applications continues. Un relèvement continu de  $f$  à  $E$  est une application continue  $g: A \rightarrow E$  telle que  $p \circ g = f$ .

PROPOSITION 1.2.10. — Soit  $B$  un espace topologique, soit  $(E, p)$  un revêtement de  $B$ , soit  $A$  un espace topologique et soit  $f: A \rightarrow B$  une application continue. Soit  $g, g': A \rightarrow E$  deux relèvements continus de  $f$  à  $E$ .

- a) L'ensemble des points  $a \in A$  tels que  $g(a) = g'(a)$  est ouvert et fermé dans  $A$ .
- b) Si  $A$  est connexe et qu'il existe  $a \in A$  tel que  $g(a) = g'(a)$ , alors  $g = g'$ .

*Démonstration.* — Notons  $C$  l'ensemble des points  $a \in A$  tels que  $g(a) = g'(a)$ .

a) Traitons d'abord le cas où  $E$  est le revêtement trivial  $B \times F$ . Alors, il existe des applications continues  $\gamma, \gamma' : A \rightarrow F$  telles que  $g(a) = (f(a), \gamma(a))$  et  $g'(a) = (f(a), \gamma'(a))$  pour tout  $a \in A$ . Soit  $\delta : A \rightarrow F \times F$  l'application donnée par  $a \mapsto (\gamma(a), \gamma'(a))$ ; elle est continue. La diagonale  $\Delta$  de  $F \times F$  est une partie ouverte et fermée, et l'on a  $C = \delta^{-1}(\Delta)$ . Par suite,  $C$  est une partie ouverte et fermée dans  $A$ .

Traitons maintenant le cas général. Soit  $x$  un point de  $A$ , soit  $b = f(x)$ ; soit  $U$  un voisinage ouvert de  $b$  dans  $B$  tel que le revêtement  $E_U$  soit trivialisable. D'après le cas d'un revêtement trivial, l'ensemble  $C \cap f^{-1}(U)$  des points  $a$  de  $f^{-1}(U)$  tels que  $g(a) = g'(a)$  est ouvert et fermé dans  $f^{-1}(U)$ .

Supposons  $x \in C$ ; alors  $x \in C \cap f^{-1}(U)$ , donc  $C \cap f^{-1}(U)$  est voisinage de  $x$  dans  $f^{-1}(U)$ ; mais comme  $f^{-1}(U)$  est ouvert dans  $A$ , cela entraîne que  $C$  est voisinage de  $x$  dans  $A$ . Cela prouve que  $C$  est ouvert.

Inversement, supposons que  $x \notin C$ . Posons  $C' = A \setminus C$ . Alors,  $x \in C' \cap f^{-1}(U)$  et le même raisonnement prouve que  $C' \cap f^{-1}(U)$  est voisinage de  $x$  dans  $f^{-1}(U)$ , donc aussi dans  $A$ . Par suite,  $C'$  est ouvert, et  $C$  est fermé.

b) L'ensemble  $C$  est ouvert, fermé et non vide. Par définition d'un ensemble connexe,  $C = A$ . □

*Exercice 1.2.11.* — Soit  $p : E \rightarrow B$  un revêtement.

a) On suppose que  $E$  est un revêtement trivial et que  $B$  est connexe. Démontrer que pour tout point  $b \in B$  et tout point  $x \in E$  tel que  $p(x) = b$ , il existe une unique application continue  $s : B \rightarrow E$  telle que  $p \circ s = \text{id}_B$  et  $s(b) = x$ .

b) Soit  $s : B \rightarrow E$  une application continue telle que  $p \circ s = \text{id}_B$ . Démontrer que  $s(B)$  est ouvert et fermé dans  $E$ .

c) On suppose que  $B$  est connexe, localement connexe et que pour tout point  $x \in E$ , il existe une application continue  $s : B \rightarrow E$  telle que  $p \circ s = \text{id}_B$  et  $x \in s(B)$ . Démontrer que  $E$  est un revêtement trivial.

PROPOSITION 1.2.12 (Forme générale du théorème du relèvement)

Soit  $p : E \rightarrow B$  un revêtement, soit  $f : A \rightarrow B$  une application continue. Soit  $a \in A$ ,  $b \in B$  et  $x \in E$  tels que  $f(a) = b = p(x)$ . On suppose que  $A$  est simplement connexe. Alors, il existe un unique relèvement continu à  $E$  de l'application  $f$ ,  $g : A \rightarrow E$ , tel que  $g(a) = x$ .

*Démonstration.* — Considérons le revêtement  $f^*(E) = E_A$  de  $A$ ; c'est le produit fibré  $A \times_B E$  muni de la projection vers  $A$ . Par hypothèse, ce revêtement est trivial, donc il existe un espace discret  $F$  et un isomorphisme de  $A$ -espaces  $t : A \times F \rightarrow E_A$ . Rappelons aussi que  $A$  est connexe.

Tout élément  $z$  de  $F$  fournit une application continue  $g_z : A \rightarrow E$  telle que  $p \circ g = f$ , par la formule  $g(y) = \text{pr}_2(t(y, z))$ , où  $\text{pr}_2 : A \times_B E \rightarrow E$  est la seconde projection. Inversement, si  $g : A \rightarrow E$  vérifie  $p \circ g = f$ , posons  $\varphi(y) = q_2(t^{-1}(y, \varphi(y)))$ , où  $q_2 : A \times F \rightarrow F$

est la seconde projection. C'est une application continue de  $A$  dans  $F$ . Comme  $A$  est connexe et  $F$  discret,  $\varphi$  est constante, donc de la forme  $g_z$ , où  $z = \varphi(a)$ .

L'application  $z \mapsto g_z$  est une bijection de  $F$  sur l'ensemble des relèvements de  $f$  à  $E$ . Si  $z$  est l'unique point de  $F$  tel que  $t(a, z) = x$ , l'application  $g$  cherchée est l'application  $g_z$ .  $\square$

**COROLLAIRE 1.2.13.** — *Soit  $A$  un espace simplement connexe, soit  $a$  un point de  $A$ , soit  $f: A \rightarrow \mathbf{C}^*$  une application continue et soit  $u \in \mathbf{C}$  tel que  $\exp(u) = f(a)$ . Il existe une unique application continue  $g: A \rightarrow \mathbf{C}$  telle que  $\exp(g(x)) = f(x)$  pour tout  $x \in A$  et  $g(a) = u$ .*

### § 1.3. Automorphismes d'un revêtement

Soit  $p: E \rightarrow B$  et  $p': E' \rightarrow B$  deux revêtements. Un morphisme de revêtements de  $E$  dans  $E'$  est une application continue  $f: E \rightarrow E'$  telle que  $p' \circ f = p$ .

**LEMME 1.3.1.** — *Si  $B$  est localement connexe, un morphisme entre revêtements de  $B$  est une application ouverte. En particulier, un morphisme de revêtements est un isomorphisme si et seulement s'il est bijectif.*

*Démonstration.* — Soit  $p: E \rightarrow B$  et  $p': E' \rightarrow B$  des revêtements et soit  $f: E \rightarrow E'$  un morphisme de revêtements. Soit  $U$  un ouvert de  $E$  et soit  $x \in U$ . Soit  $a = p(x)$ , soit  $V$  un voisinage de  $a$  au-dessus duquel les revêtements  $E$  et  $E'$  sont trivialisables. Soit  $F$  un espace topologique discret, soit  $t: V \times F \rightarrow E_V$  une trivialisations, soit  $z \in F$  tel que  $t(a, z) = x$ . Soit  $F'$  un espace topologique discret, soit  $t': V \times F' \rightarrow E'_V$  une trivialisations, soit  $z' \in F'$  tel que  $t'(a, z') = f(x)$ . Soit  $V'$  l'ensemble des  $b \in V$  tels que  $t(a, z) \in U$ ; c'est un voisinage de  $a$  dans  $B$  et il existe une unique application continue  $\varphi: V' \rightarrow F'$  telle que  $f(t(x, z)) = t'(x, \varphi(x))$  pour tout  $x \in V'$ . Comme  $B$  est localement connexe, il existe un voisinage connexe  $W$  de  $a$  dans  $B$ , contenu dans  $V$ . Alors,  $\varphi$  est constante sur  $W$ , de valeur  $z'$  puisque  $f(t(a, z)) = f(x) = t'(a, z')$ . Il en résulte que  $f(U)$  contient  $t'(W \times \{z'\})$ , donc est un voisinage de  $f(x)$ .

La deuxième assertion résulte de ce que si une application continue bijective est ouverte, sa bijection réciproque est continue.  $\square$

**LEMME 1.3.2.** — a) *Si  $E$  est connexe, deux morphismes de revêtements de  $E$  dans  $E'$  qui coïncident en un point sont égaux.*

b) *Si  $B$  est connexe et localement connexe, deux morphismes de revêtements de  $E$  dans  $E'$  qui coïncident sur une fibre  $E_b$  sont égaux.*

*Démonstration.* — Observons qu'un morphisme de revêtements de  $(E, p)$  dans  $(E', p')$  est un relèvement continu à  $E'$  de l'application  $p$ . L'assertion a) résulte de ce que si  $E$  est connexe, deux relèvements qui coïncident en un point coïncident en tout point.

Soit  $f, g: E \rightarrow E'$  des morphismes de revêtements. Soit  $A$  l'ensemble des points  $a \in B$  tels que  $f_a = g_a$ ; démontrons que  $A$  est ouvert et fermé dans  $E$ . Soit  $a \in B$ , soit  $V$  un voisinage connexe de  $a$  dans  $B$  sur lequel les revêtements  $E$  et  $E'$  sont trivialisables. Soit  $F$  un espace discret et soit  $\varphi: V \times F \rightarrow E$  une trivialisations de  $E$  sur  $V$ ; alors  $\varphi$  induit un homéomorphisme de  $F$  sur  $E_a$ , ce qui permet de supposer que  $F = E_a$  et que  $\varphi(a, y) = y$  pour  $y \in E_a$ . De même, soit  $\varphi': V \times E'_a \rightarrow E'$  une trivialisations de  $E'$  sur  $V$  telle que  $\varphi'(a, y) = y$  pour  $y \in E'_a$ . Pour tout  $y \in F$ , l'application  $x \mapsto \text{pr}_2((\varphi')^{-1}(f(\varphi(x, y))))$  de  $V$  dans  $E'_a$  est continue; elle est donc constante, de valeur  $f_a(y)$ . Cela prouve la relation

$$\varphi'(x, f_a(y)) = f(\varphi(x, y))$$

pour tout  $x \in V$  et tout  $y \in E_a$ . Par suite, si  $a \in A$ , alors  $V \subset A$ , tandis que si  $a \notin A$ , alors  $V \cap A = \emptyset$ . Autrement dit,  $A$  est ouvert ainsi que son complémentaire dans  $B$ . L'assertion *b*) en résulte, par définition d'un espace connexe.  $\square$

Si  $p: E \rightarrow B$  est un revêtement, on note  $\text{Aut}_B(E)$  l'ensemble des automorphismes du revêtement  $E$ , c'est-à-dire l'ensemble des homéomorphismes  $f$  de  $E$  dans  $E$  tels que  $p \circ f = p$ . C'est un *groupe* pour la composition des applications. Par restriction, le groupe  $\text{Aut}_B(E)$  agit sur chaque fibre  $E_b$  de  $p$ , où  $b \in B$ .

**DÉFINITION 1.3.3.** — *On dit qu'un revêtement  $E$  d'un espace topologique connexe et non vide  $B$  est galoisien s'il est connexe et si pour tout point  $b \in B$ , le groupe  $\text{Aut}_B(E)$  agit transitivement sur la fibre  $E_b$ . (Par convention, l'action d'un groupe sur l'ensemble vide n'est pas transitive, de sorte qu'un revêtement galoisien n'est pas vide.)*

**Exemple 1.3.4.** — Soit  $X$  un espace topologique connexe et non vide, soit  $G$  un groupe d'homéomorphismes de  $X$  agissant de façon régulière et soit  $B = X/G$ . Alors,  $X$  est un revêtement galoisien de  $B$  et l'inclusion naturelle de  $G$  dans  $\text{Aut}_B(X)$  est un isomorphisme.

On a déjà expliqué que  $X$  est un revêtement de  $B$ . En outre, il résulte de la définition du quotient d'un espace topologique que  $G$  agit transitivement sur chaque fibre de  $X \rightarrow B$ .

Chaque élément de  $G$  est un élément de  $\text{Aut}_B(X)$ , de sorte que  $G$  est un sous-groupe de  $\text{Aut}_B(X)$ ; démontrons que  $G = \text{Aut}_B(X)$ . Soit  $g \in \text{Aut}_B(X)$ . Soit  $x$  un point de  $X$ , et soit  $h \in G$  tel que  $g(x) = h(x)$ . Alors,  $g$  et  $h$  sont deux éléments de  $\text{Aut}_B(X)$  qui coïncident en  $x$ . Comme  $X$  est connexe, on a  $g = h$ .

**LEMME 1.3.5.** — *Soit  $B$  un espace topologique non vide, connexe et localement connexe. Soit  $(E, p)$  un revêtement connexe de  $B$ . Soit  $G$  un sous-groupe de  $\text{Aut}_B(E)$ . Alors l'action de  $\text{Aut}_B(E)$  sur  $E$  est régulière et l'espace quotient  $E/G$  est un revêtement de  $B$ .*

**Démonstration.** — Soit  $x$  un point de  $E$  et soit  $a = p(x)$ . Soit  $U$  un voisinage de  $a$  dans  $B$ , soit  $F$  un espace discret et soit  $f_U: U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$  une trivialisations. Soit

$y \in F$  tel que  $f_U(a, y) = x$ ; posons  $V = f_U(U \times \{y\})$ . Pour  $g \in \text{Aut}_B(E)$ , observons que  $g(V) = f_U(U \times \{g(y)\})$ . En outre, si  $g \neq 1$ ,  $g(y) \neq y$ . Par suite, la famille  $(g(V))_{g \in \text{Aut}_B(E)}$  est formée d'ouverts deux à deux disjoints, ce qu'il fallait démontrer.

La trivialisaton  $f_U$  identifie l'espace discret  $F$  à la fibre  $E_a$ . Alors,  $\text{Aut}_B(E)$  agit naturellement sur  $F$ . Soit  $q: E/G \rightarrow B$  la projection canonique. La description précédente montre que  $q^{-1}(U)$  est homéomorphe  $U \times F/G$ . Par suite,  $E/G$  est un revêtement de  $B$ .  $\square$

PROPOSITION 1.3.6. — *Soit  $B$  un espace connexe et localement connexe. Soit  $E$  un revêtement connexe et non vide de  $B$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le revêtement  $E$  est galoisien.*
- (ii) *Il existe  $b \in B$  tel que le groupe  $\text{Aut}_B(E)$  agisse transitivement sur la fibre  $E_b$ .*
- (iii) *L'application canonique de  $E/\text{Aut}_B(E)$  sur  $B$  est un homéomorphisme.*
- (iv) *Le revêtement  $\text{pr}_1: E \times_B E$  de  $E$  est trivialisable.*

*Démonstration.* — L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est évidente, car  $B$  n'est pas vide.

Supposons (ii). Alors,  $E/\text{Aut}_B(E)$  est un revêtement de  $B$ , et sa fibre en  $b$  est réduite à un point. Comme  $B$  est connexe, ce revêtement est de degré 1. C'est donc un isomorphisme, d'où (iii).

Supposons (iii). Soit  $f: E \times \text{Aut}_B(E) \rightarrow E \times_B E$  l'application donnée par  $(x, g) \mapsto (x, g(x))$ . C'est un morphisme de revêtements. Il est injectif car si  $(x, g(x)) = (x', g'(x'))$ , on a  $x = x'$  et  $g(x) = g'(x)$ ; par suite,  $g'g^{-1}$  fixe  $x$  et,  $E$  étant connexe,  $g'g^{-1} = 1$ , d'où  $g' = g$ . Il est surjectif : en effet, soit  $(x, y) \in E \times_B E$ ; alors  $x$  et  $y$  ont même image dans  $B$ , donc il existe  $g \in \text{Aut}_B(E)$  tel que  $y = g(x)$ , de sorte que  $(x, y) = f(x, g)$ . Par conséquent,  $f$  est un isomorphisme de revêtements, d'où (iv).

Si (iv) est vérifié, soit  $F$  un espace discret et  $f: E \times F \rightarrow E \times_B E$  une trivialisaton du revêtement  $(E \times_B E, \text{pr}_1)$ . Soit  $x, x'$  deux points de  $E$  tels que  $p(x) = p(x')$ . Il existe  $y \in F$  tel que  $f(x, y) = (x, x')$ . Alors, l'application  $\varphi: E \rightarrow E, u \mapsto \text{pr}_2(f(u, y))$ , est un morphisme de  $B$ -espaces tel que  $\varphi(x) = x'$ . Il existe aussi  $y' \in F$  tel que  $f(x', y') = (x', x)$ , de sorte que  $\varphi': E \rightarrow E, u \mapsto \text{pr}_2(f(u, y'))$  est un morphisme de  $B$ -espaces tel que  $\varphi(x') = x$ . Alors,  $\varphi' \circ \varphi$  est un morphisme de revêtements qui fixe  $x$ , donc est l'identité de  $E$ , car  $E$  est connexe. De même,  $\varphi \circ \varphi' = \text{id}_E$ . Par suite,  $\varphi \in \text{Aut}_B(E)$ . Nous avons donc prouvé que  $\text{Aut}_B(E)$  agit transitivement sur toute fibre de  $p$ , donc  $E$  est galoisien.  $\square$

PROPOSITION 1.3.7. — *Soit  $B$  un espace topologique non vide, connexe et localement connexe. Soit  $E$  un revêtement galoisien de  $B$  et soit  $G$  un sous-groupe de  $\text{Aut}_B(E)$ .*

*Alors,  $\text{Aut}_B(E/G) = N(G)/G$ , où  $N(G)$  est le normalisateur de  $G$  dans  $\text{Aut}_B(E)$ . En particulier,  $E/G$  est un revêtement galoisien de  $B$  si et seulement si  $G$  est distingué dans  $\text{Aut}_B(E)$ .*

*Démonstration.* — On note  $q: E \rightarrow E/G$  et  $r: E/G \rightarrow B$  les projections canoniques.



Si  $g \in N(G)$ , alors  $g$  agit par passage au quotient sur  $E/G$ , donc définit un élément  $[g]$  de  $\text{Aut}_B(E/G)$ . Si  $g \in G$ , on a  $[g] = \text{id}$ , d'où un homomorphisme de groupes  $N(G)/G \rightarrow \text{Aut}_B(E/G)$ . Démontrons que cet homomorphisme est injectif. Soit  $x \in E$  et supposons que  $[g](q(x)) = q(x)$ . Alors, il existe  $h \in G$  tel que  $g(x) = h(x)$ ; comme  $E$  est connexe,  $h = g$ . Démontrons que cet homomorphisme est surjectif. Soit  $\varphi \in \text{Aut}_B(E/G)$ , soit  $x$  un point de  $E$  et soit  $h \in \text{Aut}_B(E)$  tel que  $\varphi(q(x)) = q(h(x))$ . Alors, les deux applications de  $E$  dans  $E/G$  données par  $y \mapsto \varphi(q(y))$  et  $y \mapsto q(h(y))$  sont des morphismes de revêtements qui coïncident en  $x$ ; comme  $E$  est connexe, ils coïncident en tout point. Autrement dit,  $\varphi(q(y)) = q(h(y))$  pour tout  $y \in E$ . En particulier, si  $g \in G$ ,  $\varphi(g(x)) = \varphi(x) = q(h(x)) = q(h(g(x)))$ , donc il existe  $g' \in G$  tel que  $g'(h(x)) = h(g(x))$ . Par suite,  $g'h = hg$  et  $ghg^{-1} \in G$ . Cela prouve que  $h \in N(G)$  et  $\varphi = [h]$ .

Pour que  $E/G$  soit galoisien, il faut et il suffit que pour tout  $g \in \text{Aut}_B(E)$ , il existe  $h \in N(G)$  tel que  $h(q(x)) = q(g(x))$ , ce qui, par le même argument, entraîne  $g \in N(G)$ .  $\square$

### § 1.4. Chemins, groupoïde fondamental

DÉFINITION 1.4.1. — *Soit  $X$  un espace topologique. Un chemin dans  $X$  est une application continue  $c$  de l'intervalle  $[0, 1]$  dans  $X$ . On dit que  $c(0)$  est son origine et  $c(1)$  son terme. On dit que  $c$  est un lacet si  $c(0) = c(1)$ , c'est-à-dire si son origine et son terme coïncident.*

DÉFINITION 1.4.2. — *Soit  $X$  un espace topologique. On dit que des chemins  $c$  et  $d$  dans  $X$  sont juxtaposables si le terme de  $c$  égale l'origine de  $d$ . Dans ce cas, le chemin juxtaposé  $c * d$  est défini par la formule*

$$(c * d)(t) = \begin{cases} c(2t) & \text{pour } 0 \leq t \leq 1/2, \\ d(2t - 1) & \text{pour } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

*L'origine du chemin  $c * d$  est celle de  $c$ ; son terme est celui de  $d$ .*

DÉFINITION 1.4.3. — *Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $c$  un chemin dans  $X$ . Le chemin  $\bar{c}$  défini par  $\bar{c}(t) = c(1 - t)$  est appelé chemin opposé à  $c$ ; son origine est le terme de  $c$ , son terme est l'origine de  $c$ .*

On a  $\bar{\bar{c}} = c$  pour tout chemin  $c$  dans  $X$ . Si  $c$  et  $d$  sont juxtaposables,  $\bar{d}$  et  $\bar{c}$  le sont et  $\overline{c * d} = \bar{d} * \bar{c}$ .

DÉFINITION 1.4.4. — *Soit  $X$  un espace topologique. On dit que des chemins  $c_0$  et  $c_1$  sont librement homotopes s'il existe une application continue  $c: [0, 1]^2 \rightarrow X$  telle que  $c_0(t) = c(0, t)$  et  $c_1(t) = c(1, t)$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . On dit qu'ils sont strictement homotopes si l'on a de plus  $c(s, 0) = c_0(0)$  et  $c(s, 1) = c_0(1)$  pour tout  $s \in [0, 1]$ .*

Deux chemins strictement homotopes ont même origine et même terme. Une application  $c$  comme dans la définition est appelée homotopie libre (resp. homotopie stricte) d'origine  $c_0$  et de terme  $c_1$ .

LEMME 1.4.5. — *Les relations «  $c_0$  et  $c_1$  sont librement (resp. strictement) homotopes » sont des relations d'équivalence dans l'ensemble des chemins dans  $X$ .*

*Démonstration.* — Pour tout chemin  $c$  dans  $X$ , l'application  $(s, t) \mapsto c(t)$  est une homotopie stricte (donc libre) d'origine  $c$  et de terme  $c$ ; cela prouve que les relations sont réflexives.

Soit  $c: [0, 1]^2 \rightarrow X$  est une homotopie libre, resp. stricte, d'origine  $c_0$  et de terme  $c_1$ . Alors  $(s, t) \mapsto c(1-s, t)$  est une homotopie libre, resp. stricte, d'origine  $c_1$  et de terme  $c_0$ . Ces relations sont donc symétriques.

Soit  $c: [0, 1]^2 \rightarrow X$  une homotopie libre, resp. stricte, d'origine  $c_0$  et de terme  $c_1$ ; soit  $c': [0, 1]^2 \rightarrow X$  une homotopie libre, resp. stricte, d'origine  $c_1$  et de terme  $c_2$ . Soit  $c'': [0, 1]^2 \rightarrow X$  l'application donnée par  $c''(s, t) = c(2s, t)$  si  $0 \leq s \leq 1/2$  et  $t \in [0, 1]$ , et par  $c''(s, t) = c(2s-1, t)$  si  $1/2 \leq s \leq 1$  et  $t \in [0, 1]$ . Elle est continue. C'est une homotopie libre, resp. stricte, d'origine  $c_0$  et de terme  $c_2$ . Ces relations sont donc transitives.  $\square$

LEMME 1.4.6. — *Soit  $c$  un chemin dans  $X$ . Soit  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une application continue croissante telle que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ . Alors le chemin  $c \circ f$  est strictement homotope à  $c$ .*

*Démonstration.* — Soit  $h: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  l'application donnée par  $h(s, t) = c((1-s)t + sf(t))$ . C'est une homotopie stricte d'origine  $c$  et de terme  $c \circ f$ .  $\square$

PROPOSITION 1.4.7. — a) *Soit  $c_0, c_1, d_0, d_1$  des chemins dans  $X$ . Supposons que  $c_0$  et  $c_1$  sont strictement homotopes, que  $d_0$  et  $d_1$  sont strictement homotopes, et que  $c_0$  et  $d_0$  sont juxtaposables. Alors  $c_1$  et  $d_1$  sont juxtaposables et  $c_1 * d_1$  est strictement homotope à  $c_0 * d_0$ .*

b) *Soit  $c_0, c_1, c_2$  des chemins dans  $X$ . On suppose que  $c_0$  et  $c_1$  sont juxtaposables, et que  $c_1$  et  $c_2$  sont juxtaposables. Alors,  $c_0 * c_1$  et  $c_2$  d'une part,  $c_0$  et  $c_1 * c_2$  d'autre part sont juxtaposables et les chemins  $(c_0 * c_1) * c_2$  et  $c_0 * (c_1 * c_2)$  sont strictement homotopes.*

c) *Soit  $c$  un chemin dans  $X$ , soit  $x = c(0)$  et soit  $y = c(1)$ . Notons  $e_x$  le chemin constant d'image  $x$  et  $e_y$  le chemin constant d'image  $y$ . Alors, les chemins  $c$ ,  $e_x * c$  et  $c * e_y$  sont strictement homotopes.*

d) *Soit  $c_0, c_1$  des chemins dans  $X$ . Si  $c_0$  et  $c_1$  sont strictement homotopes, alors  $\overline{c_0}$  et  $\overline{c_1}$  sont strictement homotopes.*

*Démonstration.* — a) Soit  $c: [0, 1]^2 \rightarrow X$ ,  $d: [0, 1]^2 \rightarrow X$  des homotopies strictes respectivement d'origine  $c_0$  et de terme  $c_1$ , d'origine  $d_0$  et de terme  $d_1$ . Soit  $h: [0, 1]^2 \rightarrow X$  l'application donnée par  $h(s, t) = c(s, 2t)$  pour  $s \in [0, 1]$  et  $0 \leq t \leq 1/2$  et  $h(s, t) =$

$d(s, 2t - 1)$  pour  $s \in [0, 1]$  et  $1/2 \leq t \leq 1$ . C'est une homotopie stricte d'origine  $c_0 * d_0$  et de terme  $c_1 * d_1$ .

b) Les deux chemins  $c = (c_0 * c_1) * c_2$  et  $c' = c_0 * (c_1 * c_2)$  diffèrent juste d'un paramétrage. Dans le premier cas,  $c_0$  est parcouru à vitesse 4 sur  $[0, 1/4]$ ,  $c_1$  à vitesse 4 sur  $[1/4, 1/2]$  et  $c_2$  à vitesse 2 sur  $[1/2, 1]$ ; dans le second,  $c_0$  est parcouru à vitesse 2 sur  $[0, 1/2]$ ,  $c_1$  et  $c_2$  à vitesse 4 sur  $[1/2, 3/4]$  et  $[3/4, 1]$  respectivement. Soit  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  l'application affine par morceaux telle que

$$f(t) = \begin{cases} t/2 & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ t - 1/4 & \text{si } t \in [1/2, 3/4], \\ 2t - 1 & \text{si } t \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

On a  $c'(t) = c(f(t))$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Comme  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ ,  $c'$  et  $c$  sont strictement homotopes.

c) On a  $c * e_y(t) = c(f(t))$ , où  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est définie par  $f(t) = 2t$  si  $t \in [0, 1/2]$  et  $f(t) = 1$  sinon. Par suite,  $c$  et  $c * e_y$  sont strictement homotopes. On prouve de même que  $e_x * c$  et  $c$  sont strictement homotopes.

d) Si  $c: [0, 1]^2 \rightarrow X$  est une homotopie stricte d'origine  $c_0$  et de terme  $c_1$ , alors  $c': [0, 1]^2 \rightarrow X$  définie par  $c'(s, t) = c(s, 1 - t)$  est une homotopie stricte d'origine  $\bar{c}_0$  et de terme  $\bar{c}_1$ .  $\square$

On note  $\omega(X)$  l'ensemble des classes d'homotopie stricte de chemins dans  $X$ . Par passage au quotient, on définit deux applications,  $o: \omega(X) \rightarrow X$  et  $t: \omega(X) \rightarrow X$ , où  $o(\gamma)$  et  $t(\gamma)$  sont l'origine et le terme d'un chemin quelconque de la classe  $\gamma$ ; on dit que  $o(\gamma)$  et  $t(\gamma)$  sont l'origine et le terme de  $\gamma$ . Si  $x, y \in X$ , on note aussi  $\omega_{x,y}(X)$  l'ensemble des classes d'homotopie stricte  $\gamma$  telles que  $o(\gamma) = x$  et  $t(\gamma) = y$ .

On dit que des classes d'homotopies strictes  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont composables si  $t(\gamma) = o(\gamma')$ . Soit alors  $c$  un chemin quelconque de la classe  $\gamma$  et  $c'$  un chemin quelconque de la classe  $\gamma'$ . Les chemins  $c$  et  $c'$  sont juxtaposables, et on note  $\gamma\gamma'$  la classe d'homotopie stricte du chemin  $c * c'$ ; cela ne dépend pas du choix de  $c$  et  $c'$ . On a  $o(\gamma\gamma') = o(\gamma)$  et  $t(\gamma\gamma') = t(\gamma')$ .

On notera  $\gamma^{-1}$  la classe d'homotopie stricte du chemin  $\bar{c}$ , où  $c$  est un chemin quelconque de la classe  $\gamma$ . On a  $o(\gamma^{-1}) = t(\gamma)$  et  $t(\gamma^{-1}) = o(\gamma)$ . De plus,  $(\gamma^{-1})^{-1} = \gamma$ .

Pour  $x \in X$ , on note  $\varepsilon_x$  la classe du chemin constant en  $x$ .

**THÉORÈME 1.4.8.** — *L'ensemble  $\omega(X)$  muni des deux applications  $o$  et  $t$  et des lois de compositions*

$$\omega_{x,y}(X) \times \omega_{y,z}(X) \rightarrow \omega_{x,z}(X)$$

*vérifient les propriétés suivantes :*

- *associativité* :  $(\gamma\gamma')\gamma'' = \gamma(\gamma'\gamma'')$  ;
- *éléments neutres* : pour  $\gamma \in \omega_{x,y}(X)$ ,  $\varepsilon_x\gamma = \gamma\varepsilon_y = \gamma$  ;

– inverses : pour  $\gamma \in \mathcal{O}_{x,y}(X)$ ,  $\gamma\gamma^{-1} = \varepsilon_x$  et  $\gamma^{-1}\gamma = \varepsilon_y$ .

Ces propriétés constituent ce qu'on appelle une structure de *groupoïde*; on dit que  $\mathcal{O}(X)$  est le *groupoïde fondamental* de  $X$ .

DÉFINITION 1.4.9 (groupoïde). — *Un groupoïde est la donnée d'un ensemble  $X$  (« points »), d'ensembles  $G_{x,y}$  pour tout  $(x,y) \in G$  (« flèches »), de lois de composition  $G_{x,y} \times G_{y,z} \rightarrow G_{x,z}$  notée  $(g,h) \mapsto gh$ , vérifiant les propriétés suivantes :*

- pour  $x, y, z, t \in X$ ,  $g \in G_{x,y}$ ,  $h \in G_{y,z}$ ,  $k \in G_{z,t}$ ,  $g(hk) = (gh)k$  (associativité);
- pour tout  $x \in X$ , il existe  $e_x \in G_{x,x}$  tel que  $e_x g = g$  pour tout  $y \in X$  et tout  $g \in G_{x,y}$ , et  $g e_x = g$  pour tout  $y \in X$  et tout  $g \in G_{y,x}$  (éléments neutres);
- pour tous  $x, y \in X$  et tout  $g \in G_{x,y}$ , il existe  $h \in G_{y,x}$  tel que  $gh = e_x$  et  $hg = e_y$  (inverse).

Comme pour un groupe, il existe au plus un élément  $e_x$  tel que  $e_x g = g$  pour tout  $g \in G_{x,y}$  et  $g e_x = g$  pour tout  $g \in G_{y,x}$ ; en effet, si  $e_x$  et  $e'_x$  vérifient cette propriété, alors  $e_x = e_x e'_x = e'_x$ .

Si  $G$  est un groupoïde d'ensemble de points  $X$ , alors pour tout  $x \in X$ ,  $G_{x,x}$  est un groupe muni de la loi du groupoïde  $G$ , d'élément neutre  $e_x$ .

COROLLAIRE 1.4.10. — *Pour tout  $x \in X$ , la loi de groupoïde de  $X$  munit l'ensemble  $\pi_1(X, x) = \mathcal{O}_{x,x}(X)$  d'une structure de groupe.*

On dit que  $\pi_1(X, x)$  est le *groupe fondamental* de  $X$  en  $x$ .

PROPOSITION 1.4.11. — *Soit  $X$  un espace topologique, soit  $x$  et  $y$  des points de  $X$ , soit  $\delta$  la classe d'homotopie stricte d'un chemin d'origine  $x$  et de terme  $y$ . L'application  $\gamma \mapsto \delta^{-1}\gamma\delta$  de  $\pi_1(X, x)$  dans  $\pi_1(Y, y)$  est un isomorphisme de groupes.*

Remarque 1.4.12. — Si l'on enlève la dernière condition de la définition d'un groupoïde, on obtient celle d'une (petite) *catégorie*. Un groupoïde est donc une catégorie dont toute flèche est inversible, formulation qui est parfois prise comme définition.

On peut aussi se donner un ensemble  $G$ , une partie  $C$  de  $G \times G$  et une application  $m: C \rightarrow G$  vérifiant les propriétés suivantes :

- Les applications de  $C$  dans  $G \times G$  données par  $(f, g) \mapsto (f, m(f, g))$  et  $(f, g) \mapsto (m(f, g), g)$  sont injectives.
- Si  $g, h, k \in C$  sont tels que  $(g, h) \in C$  et  $(h, k) \in C$ , alors  $(m(g, h), k)$  et  $(g, m(h, k))$  appartiennent à  $C$  et  $m(m(g, h), k) = m(g, m(h, k))$ .
- Pour tout  $g \in G$ , il existe  $o(g)$ ,  $t(g)$  et  $g' \in G$  tels que les couples  $(g, t(g))$ ,  $(o(g), g)$ ,  $(g, g')$  et  $(g', g)$  appartiennent à  $C$  et que l'on ait  $m(g, t(g)) = g = m(o(g), g)$  et  $m(g, g') = o(g)$ .

Cela fournit un groupoïde; on définit par exemple  $X$  comme l'ensemble des  $g \in G$  tels que  $(g, g) \in C$  et  $m(g, g) = g$ .

### § 1.5. Functorialité et invariance par homotopie du groupoïde de Poincaré

LEMME 1.5.1. — Soit  $f: X \rightarrow Y$  une application continue entre espaces topologiques. Si  $c_0$  et  $c_1$  sont des chemins strictement homotopes dans  $X$ , les chemins  $f \circ c_0$  et  $f \circ c_1$  dans  $Y$  sont strictement homotopes.

*Démonstration.* — C'est presque évident : si  $h: [0, 1]^2 \rightarrow X$  est une homotopie stricte d'origine  $c_0$  et de terme  $c_1$ ,  $f \circ h$  est une homotopie stricte d'origine  $f \circ c_0$  et de terme  $f \circ c_1$ .  $\square$

Il existe donc une application  $f_*: \omega(X) \rightarrow \omega(Y)$  qui associe à la classe d'homotopie stricte  $\gamma$  d'un chemin  $c$  la classe  $f_*(\gamma)$  du chemin  $f \circ c$ .

Si  $f: X \rightarrow Y$  et  $g: Y \rightarrow Z$  sont des applications continues,  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .

LEMME 1.5.2. — L'application  $f_*: \omega(X) \rightarrow \omega(Y)$  est un morphisme de groupoïdes : pour tous  $x, y, z \in X$ , tout  $\gamma \in \omega_{x,y}(X)$  et tout  $\delta \in \omega_{y,z}(X)$ ,  $f_*(\gamma\delta) = f_*(\gamma)f_*(\delta)$ .

Pour tout  $x \in X$ ,  $f_*$  induit un homomorphisme de groupes de  $\pi_1(X, x)$  dans  $\pi_1(Y, f(x))$ .

*Démonstration.* — Là encore, cela résulte directement des définitions. Si  $c$  et  $d$  sont des chemins dans  $X$  de classes  $\gamma$  et  $\delta$ ,  $\gamma\delta$  est la classe de  $c * d$  ;  $f_*(\gamma\delta)$  est la classe de  $f \circ (c * d)$ . La définition de la juxtaposition des chemins entraîne que  $f \circ (c * d) = (f \circ c) * (f \circ d)$ . Alors,

$$f_*(\gamma\delta) = [f \circ (c * d)] = [(f \circ c) * (f \circ d)] = [f \circ c][f \circ d] = f_*(\gamma)f_*(\delta). \quad \square$$

DÉFINITION 1.5.3. — Soit  $f, g: X \rightarrow Y$  des espaces topologiques. On dit que  $f$  et  $g$  sont homotopes s'il existe une application continue  $h: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  telle que  $h(x, 0) = f(x)$  et  $h(x, 1) = g(x)$  pour tout  $x \in X$ .

Une telle application  $h$  est appelée homotopie d'origine  $f$  et terme  $g$ . La relation «  $f$  est homotope à  $g$  » est une relation d'équivalence.

Si  $f$  et  $g$  sont homotopes, alors  $k \circ f$  et  $k \circ g$  sont homotopes, pour toute application continue  $k: Y \rightarrow Z$ , de même que  $f \circ p$  et  $g \circ p$ , pour toute application continue  $p: Z \rightarrow X$ .

PROPOSITION 1.5.4. — Soit  $f, g: X \rightarrow Y$  des applications continues et soit  $h$  une homotopie d'origine  $f$  et de terme  $g$ . Soit  $x$  un point de  $X$ .

a) Soit  $c$  un lacet dans  $X$  en  $x$  et soit  $\gamma \in \pi_1(X, x)$  sa classe d'homotopie stricte. Soit  $d: [0, 1] \rightarrow Y$  le chemin d'origine  $f(x)$  et de terme  $g(x)$  dans  $Y$  donné par  $d(t) = h(x, t)$ . Dans le groupe  $\pi_1(Y, g(x))$ , on a  $g_*(\gamma) = [d]^{-1}f_*(\gamma)[d]$ .

b) En particulier, si  $h(x, t) = f(x)$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , alors  $f_* = g_*$ .

*Démonstration.* — Pour  $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$ , posons  $\varphi(t, s) = h(c(t), s)$ . Pour  $t \in [0, 1]$ , on a donc  $d(t) = h(x, t) = \varphi(0, t) = \varphi(1, t)$ ,  $g \circ c(t) = h(c(t), 1) = \varphi(t, 1)$  et  $f \circ c(t) = h(c(t), 0) = \varphi(t, 0)$ . Ainsi,  $d * g \circ c = h \circ u$ , où  $u: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  est la juxtaposition du

chemin  $t \mapsto (0, t)$  et du chemin  $t \mapsto (t, 1)$ , tandis que  $f \circ c * d = h \circ v$ , où  $v: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  est la juxtaposition du chemin  $t \mapsto (t, 0)$  et du chemin  $t \mapsto (1, t)$ . Les chemins  $u$  et  $v$  dans le carré  $[0, 1]^2$  ont tout deux pour origine  $(0, 0)$  et pour terme  $(1, 1)$ ; l'application  $w$  donnée par  $w(s, t) = (1-t)u(s) + tv(s)$  est une homotopie stricte d'origine  $u$  et terme  $v$ . Par suite,  $d * g \circ c$  et  $f \circ c * d$  sont strictement homotopes, ce qu'il fallait démontrer.

La seconde assertion en découle.  $\square$

On dit qu'une application continue  $f: X \rightarrow Y$  est une homéotopie s'il existe une application continue  $g: Y \rightarrow X$  telle que  $f \circ g$  soit homotope à  $\text{id}_Y$  et  $g \circ f$  soit homotope à  $\text{id}_X$ . On dit que  $g$  est inverse de  $f$  à homotopie près.

**COROLLAIRE 1.5.5.** — *Si  $f$  est une homéotopie, alors  $f_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — Soit  $g$  un inverse de  $f$  à homotopie près. Comme  $g \circ f$  est homotope à  $\text{id}_X$ , il existe un chemin  $d$  dans  $X$ , d'origine  $x$  et de terme  $g(f(x))$ , tel que  $(g \circ f)_*(\gamma) = [d]^{-1}(\text{id}_X)_*(\gamma)[d] = [d]^{-1}\gamma[d]$ . Par suite, l'homomorphisme

$$\pi_1(g \circ f, x): \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, g(f(x)))$$

est un isomorphisme. Puisque  $\pi_1(g \circ f, x) = \pi_1(g, f(x)) \circ \pi_1(f, x)$ , l'homomorphisme  $\pi_1(f, x)$  est injectif et l'homomorphisme  $\pi_1(g, f(x))$  est surjectif. L'application  $g$  étant aussi une homéotopie, l'homomorphisme  $\pi_1(g, f(x))$  est injectif; c'est ainsi un isomorphisme. Par conséquent,  $\pi_1(f, x)$  est un isomorphisme.  $\square$

*Exemple 1.5.6.* — Si  $X$  est homéotope à un point, on a  $\pi_1(X, a) = \{1\}$  pour tout  $a \in X$ . Cela se produit si  $X$  est une partie convexe et non vide d'un espace vectoriel normé, ou plus généralement une partie étoilée en un de ses points  $a$ . En effet, soit  $f$  l'injection de  $\{a\}$  dans  $X$ , soit  $g$  l'application de  $X$  dans  $\{a\}$  donnée par  $g(x) = a$  pour tout  $x$ ; soit  $h$  l'application de  $X \times [0, 1]$  dans  $X$  donnée par  $h(x, t) = (1-t)a + tx$ . L'application  $h$  est une homotopie. On a  $f \circ g = \text{id}$ , et  $f \circ g = h_0$  est homotope à  $h_1 = \text{id}_X$ .

Soit  $X$  un espace topologique et soit  $A$  une partie fermée de  $X$ . Une *contraction* de  $X$  sur  $A$  est une homotopie  $h: [0, 1] \times X \rightarrow X$  telle que  $h(0, x) = x$  et  $h(1, x) \in A$  pour tout  $x \in X$ , et  $h(t, a) = a$  pour tout  $t \in [0, 1]$  et tout  $a \in A$ . L'application  $x \mapsto h(1, x)$  est une *rétraction* de  $X$  sur  $A$ ; on dit parfois que c'est une rétraction par déformation. On dit aussi que  $X$  se contracte sur  $A$ . Alors, l'injection de  $A$  dans  $X$  et la rétraction de  $X$  sur  $A$  sont des homéotopies inverses l'une de l'autre. Si  $A$  est réduit à un unique élément  $x$ , on dit aussi que  $X$  est contractile en  $x$ .

*Exemple 1.5.7.* — a) Soit  $X$  une partie d'un espace vectoriel normé qui est étoilée en un de ses points  $a$ ; l'homotopie décrite dans l'exemple précédent est une contraction de  $X$  sur  $\{a\}$ ; cela prouve que  $X$  est contractile en  $a$ .

On prendra garde qu'il existe des espaces qui sont homéotopes à un point mais ne sont contractiles en aucun point, et des espaces qui sont contractiles en un point, mais pas en tout point.

b) L'application  $(t, x) \mapsto (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}$  est une contraction de  $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  sur  $\mathbf{S}_{n-1}$ . Géométriquement, c'est une contraction radiale vers la sphère.

c) Soit  $a$  et  $b$  deux points distincts de  $\mathbf{R}^n$ . On pose  $r = \|a-b\|/2$  et on note  $Y = S(a, r) \cup S(b, r)$  la réunion des deux sphères de centres  $a$  et  $b$  et de rayon  $r$ ; elles sont tangentes en  $c = (a+b)/2$ . Alors il existe une contraction de  $\mathbf{R}^n \setminus \{a, b\}$  sur  $A$ . Voici une construction possible. Dans les deux boules, ainsi que dans les deux demi-espaces définis par les équations  $\langle x, b-a \rangle \leq \langle a, b-a \rangle$  et  $\langle b, b-a \rangle \leq \langle x, b-a \rangle$ . on considère la contraction « radiale » construite précédemment. On pose donc

$$h(t, x) = \begin{cases} (1-t)x + t(a + r\frac{x-a}{\|x-a\|}) & \text{si } 0 < \|x-a\| \leq r \text{ ou } \langle x, b-a \rangle \leq \langle a, b-a \rangle, \\ (1-t)x + t(b + r\frac{x-b}{\|x-b\|}) & \text{si } 0 < \|x-b\| \leq r \text{ ou } \langle x, b-a \rangle \geq \langle b, b-a \rangle. \end{cases}$$

Dans la zone intermédiaire, définie par  $\|x-a\| \geq r$ ,  $\|x-b\| \geq r$  et  $\langle a, b-a \rangle \leq \langle x, b-a \rangle \leq \langle b, b-a \rangle$ , on va effectuer une contraction « verticale », c'est-à-dire dans le plan  $(xab)$  et perpendiculairement à  $(ab)$ . La projection orthogonale de  $x$  sur  $(ab)$  dans ce plan est le point  $p(x) = a + \frac{1}{2r}\langle x-a, b-a \rangle$ . L'image  $y$  de  $x$  par la rétraction sera un point de la sphère  $S(a, r)$  si  $\langle x, b-a \rangle \leq \langle c, b-a \rangle$  et un point de la sphère  $S(b, r)$  sinon. On écrit  $y$  sous la forme  $y = p(x) + u(x)(x - p(x))$ , où  $u(x) \in [0, 1]$ , il s'agit de déterminer  $u(x)$  et de vérifier que l'application  $u$  est continue.

Supposons d'abord  $\langle x, b-a \rangle \leq \langle c, b-a \rangle$ , c'est-à-dire  $\langle x-a, b-a \rangle \leq 2r^2$ . Le théorème de Pythagore entraîne

$$\|x-a\|^2 = \|p(x)-a\|^2 + \|x-p(x)\|^2 \quad \text{et} \quad r^2 = \|p(x)-a\|^2 + u(x)^2 \|x-p(x)\|^2,$$

d'où

$$u(x) = \left( \frac{4r^4 - \langle x-a, b-a \rangle^2}{4r^2 \|x-a\|^2 - \langle x-a, b-a \rangle^2} \right)^{1/2}.$$

Dans le cas où  $\langle x, b-a \rangle \geq \langle c, b-a \rangle$ , on pose

$$u(x) = \left( \frac{4r^4 - \langle x-b, b-a \rangle^2}{4r^2 \|x-b\|^2 - \langle x-b, b-a \rangle^2} \right)^{1/2}.$$

Finalement, si  $\langle a, b-a \rangle \leq \langle x, b-a \rangle \leq \langle b, b-a \rangle$  et si  $\|x-a\| \geq r$  et  $\|x-b\| \geq r$ , on pose

$$h(t, x) = (1-t)x + t(p(x) + u(x)(x - p(x))).$$

Pour finir, on vérifie que les formules données coïncident lorsqu'elles sont simultanément définies. On a ainsi construit une application  $h: \mathbf{R}^n \setminus \{a, b\} \rightarrow S(a, r) \cup S(b, r)$ . Les 6 parties de  $\mathbf{R}^n \setminus \{a, b\}$  définies par  $0 < \|x-a\| \leq r$ ,  $0 < \|x-b\| \leq r$ ,  $\langle x, b-a \rangle \leq \langle a, b-a \rangle$ ,  $\langle a, b-a \rangle \leq \langle x, b-a \rangle \leq \langle c, b-a \rangle$  et  $\min(\|x-a\|, \|x-b\|) \geq r$ ,  $\langle c, b-a \rangle \leq \langle x, b-a \rangle \leq \langle b, b-a \rangle$  et  $\min(\|x-a\|, \|x-b\|) \geq r$ , et  $\langle x, b-a \rangle \geq \langle b, b-a \rangle$ , forment un recouvrement de  $\mathbf{R}^n \setminus \{a, b\}$ . Par construction, pour chacune de ces parties, disons  $P$ , la restriction de  $h$

à  $[0, 1] \times P$  est continue. Par suite,  $h$  est continue. C'est une contraction de  $\mathbf{R}^n \setminus \{a, b\}$  sur  $S(a, r) \cup S(b, r)$ .

d) Une construction analogue démontre que si  $x_1, \dots, x_m$  sont  $m$  points de  $\mathbf{R}^n$ , alignés et dans cet ordre, et si  $S_1, \dots, S_m$  sont des sphères de  $\mathbf{R}^n$  telles que l'intérieur de  $S_i$  contienne  $x_i$  mais aucun des autres points, et telles que  $S_1$  et  $S_2$ , resp.  $S_2$  et  $S_3$ , etc., soient tangentes, alors  $\mathbf{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$  possède une contraction sur  $S_1 \cup \dots \cup S_m$ .

e) Lorsque les points  $x_1, \dots, x_m$  ne sont pas alignés, il faut s'y ramener en construisant un homéomorphisme de  $\mathbf{R}^n$  dans lui-même qui applique ces points sur des points alignés. Voici comment faire lorsque  $n = 2$  (le cas général se prouve de façon similaire, par récurrence). On choisit une direction de droite telle qu'aucun des vecteurs  $x_j - x_i$  ne soit parallèle; c'est bien sûr possible car il n'y a qu'un nombre fini de mauvaises directions. On considère alors la projection de  $\mathbf{R}^2$  sur  $\mathbf{R}$  parallèlement à la direction fixée; les points  $x_1, \dots, x_m$  ont des images distinctes. Quitte à changer de base et renuméroter les points, on suppose donc que les coordonnées  $(a_i, b_i)$  des  $x_i$  sont telles que  $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ . Soit  $P: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une application  $\mathcal{C}^\infty$ , par exemple un polynôme, telle que  $P(a_i) = b_i$  pour tout  $i$ . Alors l'application  $h: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  donnée par  $h(a, b) = (a, b - P(a))$  est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^\infty$  du plan dans lui-même qui applique les points  $x_i$  sur les points  $(a_1, 0), \dots, (a_m, 0)$ .

Observons aussi que l'application  $H: [0, 1] \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  donnée par  $H(t, (a, b)) = (a, b - tP(a))$  est une homotopie dont l'origine est l'identité, le terme est le difféomorphisme  $h$ , et telle que pour tout  $t$ , l'application  $H_t: (a, b) \mapsto H(t, (a, b))$  est un difféomorphisme de  $\mathbf{R}^2$  dans lui-même. On dit ainsi que  $H$  est une *isotopie* et que  $h$  est *isotope* à l'identité.

## § 1.6. Homotopie et revêtements

PROPOSITION 1.6.1. — Soit  $p: E \rightarrow B$  un revêtement; soit  $b$  un point de  $B$  et soit  $x \in p^{-1}(b)$ .

a) Pour tout chemin  $c$  dans  $B$  d'origine  $b$ , il existe un unique chemin  $\tilde{c}$  dans  $E$  d'origine  $x$  tel que  $p \circ \tilde{c} = c$ .

b) Soit  $c$  et  $d$  des chemins dans  $B$  d'origine  $b$  qui sont strictement homotopes. Les chemins  $\tilde{c}$  et  $\tilde{d}$  d'origine  $x$  dans  $E$  tels que  $p \circ \tilde{c} = c$  et  $p \circ \tilde{d} = d$  sont strictement homotopes. En particulier, ils ont même terme.

Avec les notations de la proposition, observons que le chemin  $\tilde{c}$  est un relèvement à  $E$  du chemin  $c$ .

*Démonstration.* — a) Compte tenu du théorème du relèvement (proposition 1.2.12), cela découle de ce que l'intervalle  $[0, 1]$  est simplement connexe (proposition 1.2.6).

b) Soit  $h$  une homotopie stricte d'origine  $c$  et de terme  $d$ . Comme le carré  $[0, 1]^2$  est simplement connexe, il existe une unique application continue  $\tilde{h}: [0, 1]^2 \rightarrow E$  telle que



$\tilde{h}(a) = x$  et  $p \circ \tilde{h} = h$ . Démontrons que  $\tilde{h}$  est une homotopie stricte d'origine  $\tilde{c}$  et de terme  $\tilde{d}$ .

Alors, l'origine  $\tilde{h}_0: t \mapsto \tilde{h}(0, t)$  de l'homotopie  $\tilde{h}$  est un chemin dans  $E$  tel que  $p \circ \tilde{h}_0 = c$  et  $\tilde{h}_0(0) = x$ ; on a donc  $\tilde{h}_0 = \tilde{c}$ , c'est-à-dire  $\tilde{h}(0, t) = \tilde{c}(t)$  pour tout  $t$ .

Le chemin  $s \mapsto \tilde{h}(s, 0)$  est un chemin dans  $E$  dont le composé avec  $p$  est le chemin  $s \mapsto h(s, 0) = b$ ; de plus,  $\tilde{h}(0, 0) = x$ ; par suite,  $\tilde{h}(s, 0) = x$  pour tout  $s \in [0, 1]$  car le chemin constant vérifie ces conditions et qu'il n'y en a qu'un. En particulier,  $\tilde{h}(1, 0) = x$ .

Le terme  $\tilde{h}_1$  de l'homotopie  $\tilde{h}$  est un chemin dans  $E$  tel que  $p \circ \tilde{h}_1 = d$  et  $\tilde{h}_1(0) = x$ . Par suite,  $\tilde{h}_1 = \tilde{d}$ .

Enfin, le chemin  $s \mapsto \tilde{h}(s, 1)$  est un chemin dans  $E$  dont le composé avec  $p$  est l'application constante  $s \mapsto h(s, 1)$ , car  $h$  est une homotopie stricte. Nécessairement, ce chemin est constant et l'on a  $\tilde{h}(s, 1) = \tilde{h}(0, 1)$  pour tout  $s \in [0, 1]$ . Cela démontre que  $\tilde{h}$  est une homotopie stricte; son origine est  $\tilde{c}$ , son terme est  $\tilde{d}$ .  $\square$

**COROLLAIRE 1.6.2.** — Soit  $p: E \rightarrow B$  un revêtement, soit  $x, y, z$  des points de  $E$ .

- a) Si  $\gamma \in \omega_{x,y}(E)$  et  $\delta \in \omega_{x,z}(E)$  vérifie  $p_*(\gamma) = p_*(\delta)$ , alors  $y = z$  et  $\gamma = \delta$ .
- b) L'application  $p_*: \omega_{x,y}(E) \rightarrow \omega_{p(x),p(y)}(B)$  est injective.
- c) Le morphisme de groupes  $p_*: \pi_1(E, x) \rightarrow \pi_1(B, p(x))$  est injectif.

*Démonstration.* — a) Soit  $\tilde{c}$  et  $\tilde{d}$  des chemins dans les classes  $\gamma$  et  $\delta$ . Si  $p_*(\gamma) = p_*(\delta)$ , les chemins  $c = p \circ \tilde{c}$  et  $d = p \circ \tilde{d}$  sont strictement homotopes. Comme  $\tilde{c}$  et  $\tilde{d}$  ont même origine, ils sont strictement homotopes et ont même terme, d'où  $\gamma = \delta$ .

b) C'est le cas particulier du a) où  $y = z$ .

c) C'est le cas particulier du a) où  $x = y = z$ .  $\square$

Cela permet de définir une *action* (à droite) du groupoïde  $\omega(B)$  sur un revêtement  $p: E \rightarrow B$ , relativement à sa projection  $p$ . Soit  $\gamma \in \omega_{b,b'}(B)$  et soit  $x \in p^{-1}(b)$ . D'après la proposition, le terme  $\tilde{c}(1)$  d'un chemin  $\tilde{c}$  d'origine dans  $E$  tel que  $\tilde{c}(0) = x$  et  $p \circ \tilde{c}$  appartienne à la classe  $\gamma$  ne dépend que de  $\gamma$  et de  $x$ ; on le note  $x \cdot \gamma$ ; c'est un point de  $p^{-1}(b')$ .

Observons que  $x \cdot \varepsilon_x = x$ .

Si  $\gamma \in \omega_{b,b'}(B)$  et  $\delta \in \omega_{b',b''}(B)$ , alors  $x \cdot (\gamma\delta) = (x \cdot \gamma) \cdot \delta$ . Soit en effet  $c$  un chemin dans la classe  $\gamma$ , soit  $\tilde{c}$  un chemin dans  $E$  tel que  $\tilde{c}(0) = x$  et  $p \circ \tilde{c} = c$ . En particulier,  $x \cdot \gamma = \tilde{c}(1)$ . On a  $p(\tilde{c}(1)) = b'$ ; soit  $d$  un chemin dans la classe  $\delta$  et soit  $\tilde{d}$  un chemin dans  $E$  tel que  $\tilde{d}(0) = \tilde{c}(1)$ ; on a donc  $\tilde{d}(1) = \tilde{c}(1) \cdot \delta = (x \cdot \gamma) \cdot \delta$ . De plus,  $\tilde{c}$  et  $\tilde{d}$  sont juxtaposables et  $\tilde{c} * \tilde{d}$  est un chemin dans  $E$  d'origine  $x$  tel que  $p \circ (\tilde{c} * \tilde{d}) = c * d$ ; on a donc  $x \cdot (\gamma\delta) = \tilde{d}(1) = (x \cdot \gamma) \cdot \delta$ .

Ainsi, les applications  $(x, \gamma) \mapsto x \cdot \gamma$  de  $p^{-1}(b) \times \omega_{b,b'}(B)$  dans  $p^{-1}(b')$  vérifient des relations similaires à celles d'une action à droite d'un groupe sur un ensemble. On dit que l'on a défini une *opération à droite du groupoïde fondamental*  $\omega(B)$  sur  $E$ , relativement à  $p$ .

En particulier, pour tout  $b \in B$ , le groupe  $\pi_1(B, b)$  agit à droite dans  $p^{-1}(b)$ .

PROPOSITION 1.6.3. — Soit  $p: E \rightarrow B$  un revêtement, soit  $a$  un point de  $B$  et soit  $x \in p^{-1}(a)$ .

a) L'orbite de  $x$  pour l'opération de  $\pi_1(E, a)$  sur  $p^{-1}(a)$  est l'intersection de  $E_a$  et de la composante connexe par arcs de  $x$  dans  $E$ .

b) Supposons que  $B$  soit connexe par arcs. Pour que  $E$  soit connexe par arcs, il faut et il suffit que l'opération de  $\pi_1(E, a)$  sur  $p^{-1}(a)$  soit transitive.

c) Le fixateur de  $x$  est le sous-groupe  $p_*(\pi_1(E, x))$  de  $\pi_1(B, a)$ .

*Démonstration.* — a) Pour qu'un point  $y \in E_a$  appartienne à l'orbite de  $x$  pour l'opération de  $\pi_1(E, a)$ , il faut et il suffit que ce soit le terme d'un chemin d'origine  $x$  dans  $E$ , c'est-à-dire qu'il appartienne à la composante connexe par arcs de  $x$  dans  $E$ .

b) Si  $E$  est connexe par arcs, l'assertion précédente montre que l'opération de  $\pi_1(E, a)$  sur  $E_a$  est transitive. Inversement, supposons cette opération transitive et démontrons que  $E$  est connexe par arcs. Soit  $y$  un point de  $E$ , soit  $b = p(y)$  et soit  $c$  un chemin dans  $B$  d'origine  $a$  et de terme  $b$ ; il en existe car  $B$  est connexe par arcs. Soit  $\gamma$  sa classe d'homotopie stricte et soit  $z = y \cdot \gamma$ ; par construction, le point  $z$  appartient à  $E_a$  et est dans la même composante connexe par arcs de  $E$  que  $y$ . Par hypothèse, le point  $z$  appartient à la même composante connexe par arcs de  $E$  que le point  $x$ . Par suite,  $y$  et  $x$  sont dans la même composante connexe par arcs de  $E$ , donc  $E$  est connexe par arcs.

c) Soit  $\gamma \in \pi_1(B, a)$ . Pour que  $\gamma$  fixe  $x$ , il faut et il suffit que le terme de l'unique classe de lacets  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{O}(E)$  d'origine  $x$  qui relève  $\gamma$  soit égal à  $x$ , c'est-à-dire que  $\tilde{\gamma} \in \pi_1(E, x)$ . □

On dit qu'un espace topologique est *localement connexe par arcs* si tout point possède une base de voisinages connexes par arcs.

Par exemple,  $\mathbf{R}^n$  est localement connexe par arcs car les boules  $B(a, r)$  sont connexes par arcs et forment une base de voisinages de la topologie de  $\mathbf{R}^n$ .

Remarque 1.6.4. — Soit  $B$  un espace topologique localement connexe par arcs.

a) Tout ouvert de  $B$  est localement connexe par arcs.

b) Soit  $A$  une partie de  $B$ , soit  $a$  un point de  $A$  et soit  $A_0$  la composante connexe par arcs de  $a$  dans  $A$ . Si  $a$  est intérieur à  $A$ , alors  $a$  est intérieur à  $A_0$ . En effet, soit  $V$  un voisinage de  $a$  connexe par arcs et contenu dans  $A$  (il en existe, par définition d'un espace localement connexe par arcs). Alors,  $V \cup A_0$  est connexe par arcs (deux points de  $V$ , ou deux points de  $A_0$  sont reliés par un chemin, car  $V$  et  $A_0$  sont connexes par arcs; un point de  $V$  est relié à un point de  $A_0$  en passant par le point  $a$ ). Par définition d'une composante connexe par arcs, on a donc  $V \cup A_0 \subset A_0$ , c'est-à-dire  $V \subset A_0$ .

c) Les composantes connexes par arcs de  $B$  sont ouvertes dans  $B$ .

d) Si  $B$  est connexe, alors  $B$  est connexe par arcs.

En effet, les composantes connexes par arcs de  $B$  forment une partition de  $B$  en sous-espaces ouverts. Si  $A$  est une composante connexe par arcs de  $B$ , son complémentaire est aussi ouvert puisque c'est la réunion des autres composantes connexes par arcs. Par suite,  $A$  est fermé. Comme  $B$  est connexe (et  $A$  non vide), on a  $A = B$ .

PROPOSITION 1.6.5. — Soit  $p: E \rightarrow B$  un revêtement, soit  $f: A \rightarrow B$  une application continue, soit  $a \in A$ ,  $b \in B$  et  $x \in E$  tels que  $f(a) = b = p(x)$ . On suppose que  $A$  est connexe et localement connexe par arcs. Pour qu'il existe un relèvement continu à  $E$  de,  $g: A \rightarrow E$ , de l'application  $f$  tel que  $g(a) = x$ , il faut et il suffit que  $f_*(\pi_1(A, a)) \subset p_*(\pi_1(E, x))$ .

*Démonstration.* — Si  $g$  est une telle application,  $f_* = p_* \circ g_*$ , donc  $\text{im}(f_*) \subset \text{im}(p_*)$ . Il s'agit de prouver la réciproque. Supposons donc que  $f_*(\pi_1(A, a)) \subset p_*(\pi_1(E, x))$ .

On commence par définir une application  $g$  qui vérifie les conditions  $p \circ g = f$  et  $g(a) = x$ , puis on va prouver sa continuité. Soit  $a'$  un point de  $A$ . Soit  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{O}_{a, a'}(A)$  des classes de chemins  $c_1, c_2$  dans  $A$  d'origine  $a$  et de terme  $a'$ ; il en existe car  $A$  est connexe par arcs. Soit  $\gamma = \gamma_1 \gamma_2^{-1}$ ; c'est la classe du lacet  $c_1 * \overline{c_2}$  en  $a$ . Puisque  $f_*(\gamma)$  appartient à  $p_*(\pi_1(E, x))$ ,  $x \cdot f_*(\gamma) = x$ . Par suite,

$$x \cdot f_*(\gamma_1) = x \cdot f_*(\gamma_1 \gamma_2^{-1}) \cdot f_*(\gamma_2) = x \cdot f_*(\gamma_2).$$

Il est donc licite de poser  $g(a') = x \cdot f_*(\gamma_1)$ ; c'est un point de  $E$  tel que  $p(g(a')) = f(a')$ . Autrement dit,  $p \circ g = f$  et, par construction,  $g(a) = x \cdot f_*(\varepsilon_a) = x \cdot \varepsilon_b = x$ .

Remarquons aussi que pour tout  $a', a'' \in A$  et tout  $\gamma \in \mathcal{O}_{a', a''}(B')$ , on a  $g(a') \cdot f_*(\gamma) = g(a'')$ .

Prouvons maintenant que  $g$  est continue. Soit  $a'$  un point de  $A$ , soit  $x' = g(a')$ . Soit  $V$  un voisinage ouvert de  $x'$  dans  $E$  tel que  $p$  induise un homéomorphisme de  $V$  sur un ouvert  $p(V)$  de  $B$ ; soit  $q: p(V) \rightarrow V$  l'homéomorphisme réciproque. Alors,  $f^{-1}(p(V))$  est un voisinage ouvert de  $a'$  dans  $A$ . Comme  $A$  est supposé localement connexe par arcs, il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $a'$  contenu dans  $f^{-1}(p(V))$  qui est connexe par arcs. Démontrons que  $g(U) \subset V$ . Soit  $a''$  un point de  $U$ , soit  $c$  un chemin dans  $V$  d'origine  $a'$  et de terme  $a''$ , soit  $\gamma$  sa classe dans  $\mathcal{O}_{a', a''}(A)$ . Alors,  $f \circ c$  est un chemin dans  $U$  d'origine  $f(a')$  et de terme  $f(a'')$ ; de même,  $d = q \circ f \circ c$  est un chemin dans  $V$ , donc dans  $E$ , d'origine  $q(f(a')) = x'$  tel que  $p \circ d = f \circ c$ . Si  $\delta$  est sa classe d'homotopie, on a donc  $x' \cdot \delta = d(1)$ . En particulier,  $x' \cdot \delta \in V$ . Comme  $g(a'') = g(a') \cdot d_*(\gamma)$ , cela prouve  $g(a'') \in V$ .

Ainsi,  $g$  est continue. □

Soit  $B$  un espace topologique connexe et localement connexe par arcs. Soit  $a$  un point de  $B$ .

Un revêtement  $p: E \rightarrow B$  de  $B$  fournit un ensemble  $E_a = p^{-1}(a)$  muni d'une action du groupe  $\pi_1(B, a)$ . On a déjà observé que  $E$  est connexe et non vide si et seulement si l'action de  $\pi_1(B, a)$  est transitive. Plus généralement, le lemme suivant affirme que les

composantes connexes de  $E$  sont ouvertes et fermées dans  $E$  et sont des revêtements de  $B$ ; elles correspondent aux orbites de  $\pi_1(B, a)$  dans  $E$ .

LEMME 1.6.6. — *Soit  $B$  un espace topologique localement connexe, soit  $p: E \rightarrow B$  un revêtement. Soit  $E_0$  un sous-espace ouvert et fermé de  $E$  et soit  $p_0 = p|_{E_0}$ . Alors  $p_0(E_0)$  est une partie ouverte et fermée de  $B$  et  $p_0: E_0 \rightarrow B$  est un revêtement de  $B$ .*

*Démonstration.* — Soit  $a$  un point de  $B$ , soit  $U$  un voisinage de  $a$  au-dessus duquel  $E$  est un revêtement trivial, et soit  $V$  un voisinage connexe de  $a$  qui est contenu dans  $U$ . Ainsi, il existe un espace topologique discret et un homéomorphisme  $f$  de  $V \times F$  sur  $p^{-1}(V)$  tel que  $p(f(x, y)) = x$  pour tout  $x \in V$  et tout  $y \in F$ . L'espace  $f^{-1}(E_0)$  est ouvert et fermé dans  $V \times F$ , donc est de la forme  $V \times F_0$ , où  $F_0$  est une partie de  $F$ . Alors,  $f_0 = f|_{V \times F_0}$  est une trivialisatation du  $V$ -espace  $E_0$ . Cela prouve que  $E_0$  est un revêtement de  $B$ . En particulier,  $p_0(E_0)$  est ouvert dans  $B$ . Inversement, si  $a \notin p_0(E_0)$ , l'argument précédent prouve que  $p_0(E_0)$  est disjoint de  $V$  si bien que le complémentaire de  $p_0(E_0)$  est ouvert dans  $B$ .  $\square$

PROPOSITION 1.6.7. — *Soit  $B$  un espace topologique connexe et localement connexe par arcs. Soit  $a$  un point de  $B$ . Soit  $E$  et  $E'$  des revêtements de  $B$ . Un morphisme de revêtements  $f: E \rightarrow E'$  induit une application  $f_a: E_a \rightarrow E'_a$  qui commute aux actions de  $\pi_1(B, a)$ .*

*L'application  $f \mapsto f_a$  est une bijection entre morphismes de revêtements et morphismes de  $\pi_1(B, a)$ -ensembles.*

*Démonstration.* — Soit  $x \in E_a$ . Pour tout chemin  $c: [0, 1] \rightarrow B$  d'origine  $a$  et tout relèvement  $\tilde{c}: [0, 1] \rightarrow E$  à  $E$  d'origine  $x$  de  $c$ ,  $f \circ \tilde{c}$  est un relèvement de  $c$  à  $E'$ , d'origine  $f(x)$ . On a donc  $f(x \cdot [c]) = f(\tilde{c}(1)) = (f \circ \tilde{c})(1) = f(x) \cdot [c]$ .

Soit  $f, g: E \rightarrow E'$  des morphismes de revêtements tels que  $f_a = g_a$ . L'ensemble  $E_0$  des points de  $E$  tels que  $f(x) = g(x)$  est ouvert dans  $E$ , car  $E$  est localement connexe; il est aussi fermé car  $E'$  est un revêtement de  $B$ . Soit  $E_1$  l'ensemble complémentaire; c'est un revêtement de  $B$  dont la fibre en  $a$  est vide, et  $p(E_1)$ , ouvert et fermé dans  $B$ , est donc vide. On a donc  $f = g$ .

Soit  $\varphi: E_a \rightarrow E'_a$  un morphisme de  $\pi_1(B, a)$ -ensembles. Pour construire  $f: E \rightarrow E'$  tel que  $f_a = \varphi$ , on peut supposer que  $E$  est connexe, quitte à construire sa restriction séparément sur chaque composante connexe.

Soit alors  $x$  un point de  $E_a$ , soit  $y = \varphi(x) \in E'_a$ . Soit  $\tilde{c}$  un lacet en  $x$  dans  $E$ , soit  $c = p \circ \tilde{c}$ ; on a donc  $x = \tilde{c}(1) = x \cdot [c]$ . Par suite,  $y = \varphi(x) = \varphi(x \cdot [c]) = \varphi(x) \cdot [c] = y \cdot [c]$ . Autrement dit, l'unique chemin d'origine  $y$  dans  $E'$  qui relève  $c$  est un lacet et  $p_*([\tilde{c}]) = [c] \in p'_*(\pi_1(E', y))$ . Cela prouve que  $p_*(\pi_1(E, x)) \subset p'_*(\pi_1(E', y))$ . Par conséquent, il existe une application continue  $f: E \rightarrow E'$  telle que  $p' \circ f = p$  et  $f(x) = y$ .

Soit  $x'$  un point de  $E_a$ ; comme  $E$  est connexe par arcs, il existe un chemin  $\tilde{c}$  d'origine  $x$  et de terme  $x'$  dans  $E$ . Son image  $c = p \circ \tilde{c}$  est un lacet en  $a$  dans  $B$ . De plus,  $f \circ \tilde{c}$

est un relèvement à  $E'$  de  $c$ , d'origine  $y$ . Par suite,  $x' = x \cdot [c]$ , donc

$$\varphi(x') = \varphi(x) \cdot [c] = y \cdot [c] = f \circ \tilde{c}(1) = f(x'),$$

ce qui prouve que  $f_a = \varphi$ . □

**COROLLAIRE 1.6.8.** — *Un morphisme de revêtements  $f$  est un isomorphisme si et seulement si  $f_a$  est bijectif.*

**DÉFINITION 1.6.9.** — *On dit qu'un espace topologique  $B$  est simplement connexe par arcs s'il est connexe par arcs et si  $\pi_1(B, a) = \{\varepsilon_a\}$  pour tout point  $a$  de  $B$ .*

Il suffit qu'il en soit ainsi pour *un* point de  $B$ ; en effet,  $B$  étant connexe par arcs, on a  $\pi_1(B, a) \simeq \pi_1(B, b)$  pour tous points  $a, b \in B$ .

Un espace topologique réduit à un point est simplement connexe par arcs. Un espace topologique homéotope à un tel espace est simplement connexe par arcs.

**COROLLAIRE 1.6.10.** — *Soit  $B$  un espace topologique connexe et localement connexe par arcs. Si  $B$  est simplement connexe par arcs, alors  $B$  est simplement connexe.*

*Démonstration.* — L'assertion est vraie si  $B = \emptyset$ . Supposons donc que  $B$  n'est pas vide et soit  $a$  un point de  $B$ . Soit  $E$  un revêtement de  $B$ ; sa fibre  $E_a$  en  $a$  est munie de l'action du groupe  $\pi_1(B, a) = \{\varepsilon_a\}$ . Au revêtement trivial  $B \times E_a$  est associée l'ensemble  $\{a\} \times E_a$  muni de l'action triviale du groupe  $\pi_1(B, a)$ . L'application  $x \mapsto (a, x)$  de  $E_a$  dans  $\{a\} \times E_a$  est bijective et commute à l'action du groupe triviale. Les deux revêtements  $E$  et  $B \times E_a$  sont donc isomorphes; en particulier,  $E$  est un revêtement trivial. □

*Exercice 1.6.11.* — Soit  $X$  un espace topologique connexe mais non connexe par arcs. Soit  $Y$  l'espace topologique quotient de l'espace  $[0, 1] \times X$  par la relation d'équivalence qui identifie entre eux d'une part tous les points de la forme  $(0, x)$  (pour  $x \in X$ ), et d'autre part tous les points de la forme  $(1, x)$  (pour  $x \in X$ ). On note  $[t, x]$  la classe dans  $Y$  d'un couple  $(t, x) \in [0, 1] \times X$ . Soit  $U$  et  $V$  les images dans  $Y$  de  $[0, 1[ \times X$  et  $]0, 1] \times X$  respectivement.

a) Démontrer que  $U$  et  $V$  sont ouverts, connexes, et que  $U \cap V$  est connexe et non vide.

b) Démontrer que  $U$  et  $V$  sont simplement connexes et simplement connexes par arcs.

c) Démontrer que  $X$  est simplement connexe.

d) Démontrer que  $X$  n'est pas simplement connexe par arcs. (Soit  $a$  et  $b$  des points de  $X$  qui n'appartiennent pas à la même composante connexe par arcs de  $X$ ; soit  $\gamma, \delta: [0, 1] \rightarrow Y$  les chemins  $t \mapsto [t, a]$  et  $t \mapsto [t, b]$ . Prouver que  $\gamma$  et  $\delta$  ne sont pas strictement homotopes.)

*Exercice 1.6.12.* — Soit  $S$  l'ensemble des points de  $\mathbf{R}^2$  de la forme  $(x, \sin(\pi/x))$  pour  $0 < x \leq 1$ , soit  $A = \{0\} \times [-1; 1]$ , et soit  $B$  la réunion des segments  $[-1; 0] \times \{0\}$ ,  $\{-1\} \times [-2; 0]$ ,  $[0; 1] \times \{-2\}$  et  $1 \times [-2; 0]$ . On pose  $X = S \cup A \cup B$ .

- a) Démontrer que  $\bar{S} = S \cup A$  et que  $\bar{S}$  est connexe.
- b) Démontrer que  $\bar{S}$  n'est pas connexe par arcs mais que  $X$  est connexe par arcs.
- c) Démontrer que  $X$  est simplement connexe par arcs.
- d) Démontrer que  $X$  n'est pas simplement connexe. (Démontrer que la réunion des parties de  $\mathbf{R}^2$  de la forme  $(S \cup A \cup [1, 5] \times \{0\}) + n(5, 0)$  est un revêtement connexe et non trivial de  $X$ .)

### § 1.7. Revêtement universel

**DÉFINITION 1.7.1** (Revêtement universel). — Soit  $B$  un espace topologique, soit  $b$  un point de  $B$ . Soit  $(E, p)$  un revêtement de  $B$  et soit  $x$  un point de  $p^{-1}(b)$ . On dit que  $(E, x)$  est un revêtement universel de  $(B, b)$  si pour tout revêtement  $(E', p')$  de  $B$  et tout point  $x' \in p'^{-1}(b')$ , il existe un unique morphisme de revêtements  $f: E \rightarrow E'$  tel que  $f(x) = x'$ .

*Remarque 1.7.2.* — Soit  $B$  un espace topologique connexe et soit  $(E, p)$  un revêtement de  $B$  qui est simplement connexe. Alors, pour tout point  $x \in E$ ,  $(E, x)$  est un revêtement universel de  $(B, p(x))$ .

Cela découle en effet de la forme générale du théorème du relèvement (proposition 1.2.12).

**PROPOSITION 1.7.3.** — Soit  $B$  un espace topologique connexe et localement connexe, soit  $b \in B$  et soit  $(E, x)$  un revêtement universel de  $(B, b)$ .

- a) Le revêtement  $E$  est galoisien.
- b) Pour tout  $c \in B$  et tout  $y \in E_c$ , alors  $(E, y)$  est un revêtement universel de  $(B, c)$ .

*Démonstration.* — a) Démontrons d'abord que  $E$  est connexe. Soit  $E_0$  la composante connexe de  $x$  dans  $E$ ; comme  $B$  est localement connexe,  $E$  est également localement connexe de sorte que  $E_0$  est ouvert et fermé. D'après le lemme 1.6.6, l'espace  $E_0$  est un revêtement de  $B$ . Soit  $f: E \rightarrow E_0$  l'unique morphisme de revêtements qui applique  $x$  sur lui-même, soit  $i: E_0 \rightarrow E$  l'injection de  $E_0$  dans  $E$ . Alors,  $i \circ f: E \rightarrow E$  est l'unique morphisme de revêtements qui applique  $x$  sur lui-même; on a donc  $i \circ f = \text{id}_E$ , ce qui entraîne que  $E_0 = E$ . Ainsi,  $E$  est connexe.

Pour conclure que  $E$  est un revêtement galoisien, on utilise le critère (iv) de la proposition 1.3.6. Pour tout point  $y$  de  $E_b$ , soit  $f_y: E \rightarrow E$  l'unique morphisme de revêtements tel que  $f_y(x) = y$ . Soit  $f: E \times E_b \rightarrow E \times_B E$  l'application  $(z, y) \mapsto f_y(z)$ ; c'est un morphisme de revêtements de  $E$ . Soit  $(z, y)$  et  $(z', y')$  des points de  $E \times E_b$  tels que  $f(z, y) = f(z', y')$ , c'est-à-dire  $f_y(z) = f_{y'}(z')$ ; on a donc  $z = z'$ , d'où  $f_y = f_{y'}$ , car  $B$  est

connexe ; par suite,  $y = y'$ . Cela démontre que  $f$  est injectif. Comme  $B$  est localement connexe, l'image de  $f$  est ouverte et fermée ; par construction, cette image contient la fibre en  $x$  de  $E \times_B E$  ; comme  $E$  est connexe, il s'ensuit que  $f$  est surjective. Cela démontre que  $f$  est un isomorphisme ; ainsi,  $E \times_B E$  est un revêtement trivial de  $E$ , donc  $E$  est un revêtement galoisien de  $B$ .

b) Soit  $E'$  un revêtement de  $E$  et soit  $y' \in E_c$ . Comme  $E$  est connexe, il existe au plus un morphisme de revêtements de  $E$  dans  $E'$  qui applique  $y$  sur  $y'$  ; il s'agit d'établir l'existence d'un tel morphisme. Soit  $E'_0$  la composante connexe de  $y'$  dans  $E'$  ; alors  $E'_0$  est un revêtement de  $B$  (lemme 1.6.6). Comme  $B$  est connexe et que  $E'_0$  n'est pas vide, sa fibre en  $b$  n'est pas vide ; choisissons-en un point  $x' \in E_b$  et soit  $f : E \rightarrow E'_0$  un morphisme de revêtements tel que  $f(x) = x'$ . L'image  $f(E)$  est une partie ouverte et fermée de  $E'_0$  ; par suite,  $E'_0 = f(E)$  et  $f$  est surjective ; en particulier, il existe un point  $z \in E_c$  tel que  $f(z) = y'$ . Soit  $g \in \text{Aut}_B(E)$  tel que  $g(y) = z$ . Alors,  $f \circ g : E \rightarrow E'$  est un morphisme de revêtements qui applique  $y$  sur  $y'$ .  $\square$

**1.7.4. Condition nécessaire d'existence d'un revêtement non vide, simplement connexe par arcs et localement connexe par arcs.** — Soit  $B$  un espace connexe, soit  $b$  un point de  $B$ . Nous cherchons à construire un revêtement universel  $(E, x)$  de  $B$ , où  $x \in E_b$ . Au vu de la remarque précédente, on cherche à prendre pour  $E$  un espace simplement connexe. Compte tenu du corollaire 1.6.10, on suppose  $B$  localement connexe par arcs et on cherche  $E$  qui soit simplement connexe par arcs.

Observons alors une condition nécessaire pour que cette démarche aboutisse. Soit en effet  $(E, x)$  un revêtement universel de  $(B, b)$  tel que  $E$  est simplement connexe par arcs. Soit  $U$  un voisinage ouvert de  $b$  au-dessus duquel  $E$  est trivialisable ; soit  $s : U \rightarrow E$  une section de  $p$  telle que  $s(b) = x$ . Considérons alors le diagramme d'espaces topologiques et le diagramme de groupes qui lui correspond :

$$\begin{array}{ccc} (E_U, x) & \xrightarrow{j} & (E, x) \\ s \uparrow \downarrow p & & \downarrow p \\ (U, b) & \xrightarrow{i} & (B, b) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \pi_1(E_U, x) & \xrightarrow{j_*} & \pi_1(E, x) \\ s_* \uparrow \downarrow p_* & & \downarrow p_* \\ \pi_1(U, b) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(B, b) \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales sont données par les injections  $j : E_U \rightarrow E$  et  $i : U \rightarrow B$ , et les flèches verticales descendantes proviennent du morphisme  $p$  et de sa restriction à  $E_U$ .

Soit  $\gamma \in \pi_1(U, b)$  ; son image  $s_*(\gamma)$  dans  $\pi_1(E_U, x)$  vérifie  $p_*(s_*(\gamma)) = \gamma$ . Puisque  $\pi_1(E, x) = 1$ , on a  $j_*(s_*(\gamma)) = 1$ , puis  $p_*(j_*(s_*(\gamma))) = 1$ . Mais  $p \circ j \circ s = i$ , si bien que  $i_*(\gamma) = 1$ . Par suite, le morphisme  $i_* : \pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$  est trivial.

Plus généralement, cet argument démontre que si  $b'$  est un point de  $B$  et  $U'$  un voisinage de  $b'$  sur lequel le revêtement  $E$  est trivialisable, le morphisme  $i'_* : \pi_1(U', b') \rightarrow \pi_1(B, b')$  déduit de l'injection  $i'$  de  $U'$  dans  $B$  est trivial.

DÉFINITION 1.7.5. — On dit qu'un espace topologique  $B$  est délaçable<sup>(2)</sup> s'il est localement connexe par arcs et si tout point  $b$  de  $B$  possède un voisinage  $U$  tel que tout élément de  $\pi_1(U, b)$  s'envoie sur l'élément neutre par l'homomorphisme de groupes  $\pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$  induit par l'injection de  $U$  dans  $B$ .

Exemples 1.7.6. — a) Supposons que tout point  $b$  de  $B$  possède un voisinage  $U$  qui est contractile en ce point. Cela signifie qu'il existe une homotopie qui relie l'application identique de  $U$  à l'application constante d'image  $b$  en laissant fixe le point  $b$ . En particulier,  $U$  est homotope à un point, donc  $\pi_1(U, b) = 1$ . Il reste à vérifier que  $B$  est localement connexe par arcs. Soit  $\sigma$  une homotopie comme ci-dessus. Soit  $W$  un voisinage ouvert de  $b$  contenu dans  $U$ , soit  $W' = \sigma^{-1}(W)$  son image réciproque dans  $U \times [0; 1]$ ; c'est un ouvert qui contient  $\{b\} \times [0; 1]$ . Son complémentaire  $F'$  est donc fermé. Comme  $[0; 1]$  est compact, la projection  $F$  de  $F'$  sur  $U$  est fermée et ne contient pas  $b$ ; son complémentaire  $V = U \setminus F$  est donc un voisinage de  $b$  dans  $U$ .

Posons alors  $V' = \sigma(V \times [0; 1])$ ; l'ensemble  $V'$  contient  $\sigma(V \times \{0\}) = V$ , donc est un voisinage de  $b$ . Il est contenu dans  $W$  par construction : en effet, si  $x \in V'$ , il existe  $a \in V$  et  $s \in [0; 1]$  tels que  $x = \sigma(a, s)$ ; alors,  $a \notin F$ , donc  $(a, s) \notin F'$ , d'où  $(a, s) \in \sigma^{-1}(W)$  et  $x \in W$ . Démontrons enfin que  $V'$  est connexe par arcs : cela résulte de ce que pour tout  $(a, s) \in V \times [0; 1]$ , les points  $\sigma(a, s)$  et  $b = \sigma(a, 1)$  sont reliés par le chemin  $t \mapsto \sigma(a, s + (1 - s)t)$  de  $[0; 1]$  dans  $V'$ .

Cela prouve que  $B$  est délaçable.

b) En particulier, si tout point de  $B$  possède un voisinage homéomorphe à une partie convexe de  $\mathbf{R}^n$ , alors  $B$  est délaçable. C'est notamment le cas lorsque  $B$  est une variété topologique à bord.

**1.7.7. Construction d'un revêtement universel d'un espace pointé délaçable et connexe.** — Soit  $B$  un espace topologique délaçable et connexe, soit  $a \in B$ . Nous allons maintenant construire un revêtement universel pour  $(B, a)$ .

Soit  $E$  l'ensemble des classes d'homotopie stricte de chemins d'origine  $a$ . Pour  $x \in E$ , on note  $p(x)$  le terme d'un chemin quelconque de la classe  $x$ .

Soit  $b \in B$  et soit  $\gamma \in \mathcal{O}_{a,b}(B)$ . Soit  $U$  un voisinage connexe par arcs de  $b$  tel que l'homomorphisme  $\pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$  déduit de l'injection de  $U$  dans  $B$  soit trivial. Quitte à remplacer  $U$  par la composante connexe par arcs de  $b$  dans l'intérieur de  $U$ , on peut supposer que  $U$  est ouvert.

Observons alors que la classe dans  $\mathcal{O}(B)$  d'un chemin dans  $U$  ne dépend que de son origine et de son terme. En effet, soit  $x \in U$ , soit  $\delta, \delta' \in \mathcal{O}_{b,x}(U)$  des classes de chemins dans  $U$  d'origine  $a$  et de terme  $x$ . Alors,  $\delta'\delta^{-1}$  est la classe d'un lacet en  $b$  dans  $U$ , donc son image dans  $\pi_1(B, b)$  est triviale, ce qui prouve que les images de  $\delta$  et  $\delta'$  dans  $\mathcal{O}_{b,x}(B)$

<sup>(2)</sup>La terminologie usuelle est « semi-localement simplement connexe », sans que je puisse dire si cela inclut l'hypothèse de locale connexité par arcs ou non.



sont égales ; on les notera  $\gamma_{b,x}^U$ . Plus généralement, l'image dans  $\omega_{x,y}(B)$  d'une classe  $\delta \in \omega_{x,y}(U)$  est égale à  $(\gamma_{b,x}^U)^{-1}\gamma_{b,y}^U$ , car  $\gamma_{b,x}^U \delta \gamma_{b,y}^U$  est la classe d'un lacet en  $b$  dans  $U$ , dont l'image dans  $\pi_1(B, b)$  est la classe triviale. En particulier, si  $x, y, z$  sont des points de  $U$ , on a  $\gamma_{x,y}^U \gamma_{y,z}^U = \gamma_{x,z}^U$ .

On a alors une bijection  $f_{U,b}: U \times E_b \rightarrow E_U$  donnée de la façon suivante. Soit  $u \in U$ , on pose  $f_{U,b}(x, \delta) = \delta \gamma_{b,x}^U$ . On munit alors  $E_U$  de la topologie pour laquelle  $f_{U,b}$  est un homéomorphisme, faisant de la projection  $p_U: E_U \rightarrow U$  un revêtement trivial.

Il faut comparer ce que donnent les différentes trivialisations et vérifier leurs compatibilités. Soit  $U$  et  $V$  des ouverts connexes par arcs de  $B$ , soit  $b \in U$  et  $c \in V$  ; soit  $W = U \cap V$ .

Soit  $\theta: W \times E_b \rightarrow W \times E_c$  l'application donnée par  $(x, \delta) \mapsto (x, \delta \gamma_{b,x}^U (\gamma_{c,x}^V)^{-1})$ . Pour  $(x, \delta) \in W \times E_b$ , on a

$$f_{U,b}(x, \delta) = \delta \gamma_{b,x}^U = \delta \gamma_{b,x}^U (\gamma_{c,x}^V)^{-1} \gamma_{c,x}^V = f_{V,c} \circ \theta(x, \delta).$$

Observons que l'application  $x \mapsto \gamma_{b,x}^U (\gamma_{c,x}^V)^{-1}$  de  $W$  dans  $\omega_{b,c}(B)$  est localement constante. En effet soit  $x \in W$  et soit  $O$  la composante connexe par arcs de  $x$  dans  $W$  ; c'est un voisinage ouvert de  $x$  et l'image de l'homomorphisme de  $\pi_1(O, x)$  dans  $\pi_1(B, x)$  déduit de l'injection de  $O$  dans  $B$  est réduite à l'élément neutre. Pour  $y \in O$ , les classes  $\gamma_{x,y}^U$  et  $\gamma_{x,y}^O$  sont égales dans  $\omega_{x,y}(B)$ , de même que les classes  $\gamma_{x,y}^V$  et  $\gamma_{x,y}^O$  ; on a donc  $\gamma_{x,y}^U = \gamma_{x,y}^V$ . Alors, pour tout  $y \in O$ , on a

$$\gamma_{b,y}^U (\gamma_{c,y}^V)^{-1} = \gamma_{b,x}^U \gamma_{x,y}^U (\gamma_{c,x}^V \gamma_{x,y}^V)^{-1} = \gamma_{b,x}^U (\gamma_{c,x}^V)^{-1},$$

d'où l'assertion.

Il s'ensuit que l'application  $\theta$  est continue, de même que son inverse. C'est donc un homéomorphisme de  $W \times E_b$  sur  $W \times E_c$ .

Il existe alors une unique topologie sur  $E$  pour laquelle les applications  $f_{U,b}$  soient des homéomorphismes sur une partie ouverte. La projection  $p: E \rightarrow B$  est continue et  $E$  est un revêtement de  $B$ .

Cela conclut la construction du revêtement pointé  $(E, \varepsilon_a)$ . Nous allons maintenant démontrer que c'est un revêtement universel.

**THÉORÈME 1.7.8.** — *Soit  $B$  un espace topologique connexe délaçable, soit  $a$  un point de  $B$ . Soit  $E$  le revêtement de  $B$  que nous venons de construire.*

a) *Si  $\delta \in E_b = \omega_{a,b}(B)$  et  $\gamma \in \omega_{b,c}(B)$ , on a  $\delta \cdot \gamma = \delta \gamma \in E_c = \omega_{a,c}(B)$ . En particulier, la fibre  $E_a$  du revêtement  $E$  est l'ensemble  $\pi_1(B, a)$  sur lequel le groupe  $\pi_1(B, a)$  agit à droite via sa loi de groupe.*

b) *L'espace  $E$  est simplement connexe par arcs : il est connexe par arcs et  $\pi_1(E, \varepsilon_a)$  est réduit à l'élément neutre.*

c) *Le revêtement  $(E, \varepsilon_a)$  est un revêtement universel de  $(B, a)$ .*

d) *Le revêtement  $E$  est galoisien et le groupe  $\text{Aut}(E/B)$  des automorphismes de revêtements de  $E$  est isomorphe à  $\pi_1(B, b)$ .*

*Démonstration.* — a) Soit  $c: [0, 1] \rightarrow B$  un chemin dans  $B$  de classe  $\gamma$ ; soit  $\delta \in E_b = \omega_{a,b}(B)$ . Pour  $u \in [0, 1]$ , soit  $c_u$  le chemin  $t \mapsto c(tu)$ ; notons  $\gamma_u$  sa classe. J'affirme que l'application  $\tilde{c}: u \mapsto \delta\gamma_u$  est un chemin dans  $E$  d'origine  $\delta$  qui relève le chemin  $c$ . Soit  $u \in [0, 1]$  et soit  $U$  un ouvert connexe par arcs de  $B$  contenant  $c(u)$  et tel que l'image de l'homomorphisme de  $\pi_1(U, c(u))$  dans  $\pi_1(B, c(u))$  déduite de l'injection de  $U$  dans  $B$  soit réduite à l'élément neutre. Soit  $J$  un intervalle ouvert contenant  $u$  et tel que  $c(J) \subset U$ . Pour  $t \in J$ , la classe  $\gamma_u^{-1}\gamma_t$  est celle d'un chemin dans  $U$  d'origine  $c(u)$  et de terme  $c(t)$ . On a donc  $\gamma_t = \gamma_u\gamma_{c(u),c(t)}^U$ . Il en résulte que  $\tilde{c}(t) = \delta\gamma_t = \delta\gamma_u\gamma_{c(u),c(t)}^U = f_{U,c(u)}(c(t), \delta\gamma_u)$ . Cela prouve que l'application  $\tilde{c}$  est continue dans  $J$ .

Pour tout  $u \in [0, 1]$ , on a alors  $p(\tilde{c}(u)) = t(\delta\gamma_u) = t(\gamma_u) = c_u(1) = c(u)$ . Ainsi,  $\tilde{c}$  est un chemin dans  $E$  d'origine  $\delta$  qui relève le chemin  $c$ .

Par définition de l'opération à droite de  $\pi_1(B, a)$  sur  $E_a$ , on a donc  $\delta \cdot [c] = t(\tilde{c}) = \tilde{c}(1) = \delta\gamma_1 = \delta\gamma$ .

b) Si  $\gamma \in E_a = \omega(B, a)$ , on a  $\gamma = \varepsilon_a \cdot \gamma$ . Ainsi, cette opération agit transitivement sur  $E_a$  et le fixateur de  $\varepsilon_a$  est trivial. Cela entraîne que  $E$  est connexe et que le groupe  $\pi_1(E, \varepsilon_a)$  est réduit à l'élément neutre (proposition 1.6.3).

c) Les deux dernières assertions ont déjà été expliquées. mais on peut aussi les démontrer directement. Considérons en effet un revêtement  $E'$  de  $B$  et soit  $x' \in E'_a$ . Si  $f: E \rightarrow E'$  est un morphisme de revêtements, on a  $f(y \cdot \gamma) = f(y) \cdot \gamma$  pour tout  $y \in E$  et toute classe de chemins  $\gamma$  d'origine  $p(y)$ . En particulier, si  $y = x$  et  $\gamma$  est un chemin d'origine  $a$ , on a donc  $x \cdot \gamma = \gamma$ , donc  $f(\gamma) = f(x \cdot \gamma) = f(x) \cdot \gamma$ . Cela donne une formule pour l'unique morphisme de revêtements  $f: E \rightarrow E'$  tel que  $f(x) = x'$ .

d) Explicitons aussi un isomorphisme  $\pi_1(B, a) \rightarrow \text{Aut}_B(E)$ . Soit  $\gamma \in \pi_1(B, a)$ . Soit  $U$  un ouvert connexe par arcs de  $B$  et soit  $b \in U$  tel que l'image de l'homomorphisme  $\pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$  déduit de l'injection de  $U$  dans  $B$  soit réduite à l'élément neutre. L'application  $(\delta, x) \mapsto (\gamma\delta, x)$  de  $E_b \times U$  dans lui-même est un isomorphisme de revêtements triviaux. Il existe un unique automorphisme  $u(\gamma)$  de  $E$  tel que  $u(\gamma)(f_{U,b}(\delta, x)) = f_{U,b}(\gamma\delta, x)$  pour tout couple  $(U, b)$ , tout  $\delta \in E_b$  et tout  $x \in U$ . L'application  $\gamma \mapsto u(\gamma)$  est un morphisme de groupes. Pour  $\gamma \in \pi_1(B, a)$ , on a  $u(\gamma)(\varepsilon_a) = \gamma$ . Cela prouve que  $u$  est injectif. Par ailleurs, comme  $E$  est galoisien, pour tout  $\gamma \in \pi_1(B, a)$ ,  $g = u(\gamma)$  est l'unique automorphisme  $g \in \text{Aut}_B(E)$  tel que  $g(\varepsilon_a) = \gamma$ . Cela prouve que  $u$  est surjectif.  $\square$

**1.7.9. Conclusion-résumé.** — Du théorème précédent, on déduit une bijection entre ensemble des (classes d'isomorphisme de) revêtements  $p: E' \rightarrow B$  et ensembles munis d'une action à droite de  $\pi_1(B, a)$ . Cette bijection associe à un revêtement  $E'$  la fibre  $E'_a$  munie de l'action de  $\pi_1(B, a)$ . La bijection réciproque associe à un ensemble  $F$  muni

d'une action à droite de  $\pi_1(B, a)$  le quotient du revêtement universel  $E$  par l'action du fixateur d'un point  $x$  (arbitraire) de  $E'_a$ .

On en déduit aussi une bijection entre ensemble des (classes d'isomorphismes) de revêtements connexes de  $B$  munis d'un point  $x \in E'_a$  et ensemble des sous-groupes de  $\pi_1(B, a)$ . Cette bijection associe à  $(E', x)$  le sous-groupe  $p_*(\pi_1(E', x))$  de  $\pi_1(B, a)$ . La bijection réciproque associe au sous-groupe  $G$  de  $\pi_1(B, a)$  le revêtement quotient du revêtement universel  $(E, \varepsilon_a)$  de  $B$  par l'action de  $G$ , pointé par l'image de la classe du lacet constant en  $a$ .

Si  $x$  et  $x'$  sont deux points de  $E_a$  et  $\gamma$  est l'unique classe de chemin dans  $E$  d'origine  $x$  et de terme  $x'$ , on a  $p_*(\pi_1(E, x)) = p_*(\gamma)p_*(\pi_1(E, x'))p_*(\gamma)^{-1}$ . Donc changer de point-base  $x$  correspond à changer le sous-groupe de  $\pi_1(B, b)$  en un groupe conjugué.

Enfin, les revêtements galoisiens de  $B$  correspondent aux sous-groupes distingués de  $\pi_1(B, a)$ .

### § 1.8. Calcul du groupe fondamental

PROPOSITION 1.8.1. — *Le groupe fondamental du cercle  $\mathbf{S}_1$  en 1 est cyclique, engendré par la classe du lacet  $t \mapsto e^{2\pi i t}$ .*

*Démonstration.* — Observons que l'espace  $\mathbf{S}_1$  est délaçable (c'est une variété topologique). On sait aussi que l'application  $f: t \mapsto e^{2\pi i t}$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{S}_1$  est un revêtement, et l'espace  $\mathbf{R}$  est contractile en tout point. Par suite,  $(\mathbf{R}, 0)$  est un revêtement universel de  $(\mathbf{S}_1, 1)$ . De plus, un automorphisme de ce revêtement est une translation  $t \mapsto t+n$ , où  $n \in \mathbf{Z}$ . (Si  $u \in \text{Aut}(\mathbf{R}/\mathbf{S}_1)$ , on a  $u(0) \in f^{-1}(0)$ , donc  $n = u(0) \in \mathbf{Z}$ ; alors  $t \mapsto t$  et  $t \mapsto u(t) - n$  sont deux relèvements à  $\mathbf{R}$  de l'application  $f$  qui coïncident en 0; ils sont donc égaux.) Ainsi,  $\text{Aut}(\mathbf{R}/\mathbf{S}_1) \simeq \mathbf{Z}$ ; Puisque ce groupe est engendré par la translation  $t \mapsto t+1$ , on en déduit que  $\pi_1(\mathbf{S}_1, 1)$  est engendré par l'image dans  $\mathbf{S}_1$  de l'unique classe de chemin qui applique 0 sur 1, c'est-à-dire par la classe du chemin  $t \mapsto e^{2\pi i t}$ .  $\square$

PROPOSITION 1.8.2. — *Si  $X$  et  $Y$  sont deux espaces topologiques,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ , les projections  $p: X \times Y \rightarrow X$  et  $q: X \times Y \rightarrow Y$  induisent des homomorphismes de groupes  $p_*: \pi_1(X \times Y, (x, y)) \rightarrow \pi_1(X, x)$  et  $q_*: \pi_1(X \times Y, (x, y)) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ . L'homomorphisme*

$$(p_*, q_*): \pi_1(X \times Y, (x, y)) \rightarrow \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$$

*est un isomorphisme.*

COROLLAIRE 1.8.3. — *Le groupe fondamental de  $\mathbf{C}^*$  en 1, ou d'une couronne  $\{r < |z| < R\}$ , est isomorphe à  $\mathbf{Z}$ .*

*Remarque 1.8.4.* — On peut aussi raisonner comme dans la proposition 1.8.1 et expliciter le revêtement universel de  $\mathbf{C}^*$  ou d'une couronne. Pour  $\mathbf{C}^*$ , il s'agit du revêtement donné par l'application exponentielle de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}^*$ ; le cas d'une couronne s'en déduit

par restriction. Dans les deux cas, on a un revêtement pointé simplement connexe par arcs et il suffit de reprendre l'argument donné dans la preuve de la proposition 1.8.1.

Étant donné un recouvrement ouvert d'un espace topologique, le « théorème de van Kampen » en calcule le groupe fondamental à partir des groupes fondamentaux des ouverts. Avant d'en énoncer un cas simple, faisons quelques rappels sur les groupes libres et les produits amalgamés de groupes.

**PROPOSITION 1.8.5.** — *Soit  $(G_i)_{i \in I}$  une famille de groupes. Il existe un groupe  $G$  et une famille  $(j_i)$ , où pour tout  $i$ ,  $j_i: G_i \rightarrow G$  est un homomorphisme de groupes, vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout groupe  $H$  et toute famille  $(f_i)$ , où  $f_i: G_i \rightarrow H$  est un homomorphisme de groupes, il existe un unique homomorphisme  $\varphi: G \rightarrow H$  tel que  $f_i = \varphi \circ j_i$ .*

Cette propriété universelle caractérise ce groupe  $G$  muni des homomorphismes  $j_i$ . En effet, si  $G'$  est un groupe et  $(j'_i)$  une famille d'homomorphismes vérifiant cette propriété universelle, où  $j'_i: G_i \rightarrow G'$ , il existe un unique morphisme  $f: G \rightarrow G'$  tel que  $j'_i = f \circ j_i$ , et un unique morphisme  $g: G' \rightarrow G$  tel que  $j_i = g \circ j'_i$  pour tout  $i$ . Alors,  $f \circ g \circ j'_i = j'_i$  pour tout  $i$ , de sorte que  $f \circ g = \text{id}_{G'}$ ; de même,  $g \circ f = \text{id}_G$ . Un tel groupe (muni des homomorphismes  $j_i$ ) est appelé le *produit libre*<sup>(3)</sup> de la famille  $(G_i)$ .

*Démonstration.* — Soit  $M$  l'ensemble des suites finies de la forme  $((i_m, g_m))_{1 \leq m \leq n}$  où  $i_m \in I$  et  $g_m \in G_{i_m}$  pour tout  $m$ . On munit  $M$  d'une loi de composition donnée par la concaténation des suites ; cette loi est associative et la suite vide est un élément neutre. En revanche, ce n'est pas une loi de groupe puisque seul la suite vide possède un inverse (la longueur des suites augmente par composition).

Soit  $R$  la relation d'équivalence dans  $M$  la moins fine pour laquelle les suites  $((i, g), (i, h))$  et  $(i, gh)$  soient équivalentes, pour  $i \in I$  et  $g, h \in G_i$ , et qui soit compatible avec la loi de composition de  $M$ . Soit  $G = M/R$  l'ensemble des classes d'équivalence, muni de la loi de composition déduite ; la projection canonique  $p: M \rightarrow G$  est un morphisme de monoïdes, de sorte que  $G$  est engendré par les éléments de la forme  $p((i, g))$ , pour  $i \in I$  et  $g \in G_i$ . Notons  $[(i_1, g_1), \dots, (i_n, g_n)]$  la classe d'une suite  $((i_1, g_1), \dots, (i_n, g_n))$  et  $e$  la classe de la suite vide. Pour  $i \in I$ , notons  $j_i: G_i \rightarrow G$  l'application donnée par  $j_i(g) = [(i, g)]$ . La loi de composition dans  $G$  est encore associative et possède un élément neutre. Pour  $i \in I$  et  $g \in G_i$ , la formule  $[(i, g), (i, g^{-1})] = [(i, e)]$  prouve que  $[(i, g)]$  possède un inverse. Puisque  $G$  est engendré par ces éléments, c'est un groupe. De plus, l'application  $j_i$  est un morphisme de groupes.

Il reste à vérifier que  $(G, (j_i))$  vérifie la propriété universelle indiquée. Soit donc  $H$  un groupe et  $(f_i)$  une famille, où  $f_i: G_i \rightarrow H$  est un morphismes de groupes. Il existe

<sup>(3)</sup>Une variante de cette propriété universelle pour les groupes abéliens conduirait à la somme directe de la famille  $(G_i)$  ; ainsi, il conviendrait de nommer *somme libre* ce groupe  $G$ .

un unique morphisme de monoïdes  $f: M \rightarrow H$  tel que  $f((i, g)) = f_i(g)$  pour  $i \in I$  et  $g \in G_i$ ; ce morphisme applique une suite  $((i_m, g_m))$  sur le produit  $f_{i_1}(g_1) \dots f_{i_n}(g_n)$ . La relation d'équivalence  $R_f$  dans  $M$  définie par  $f(m) = f(m')$  est compatible avec la loi de composition de  $M$ . De plus, pour  $i \in I$  et  $g, h \in G_i$ ,  $f(((i, g), (i, h))) = f_i(g)f_i(h) = f_i(gh) = f((i, gh))$ ; de sorte que les éléments  $((i, g), (i, h))$  et  $(i, gh)$  sont équivalents. Il en résulte que deux éléments de  $M$  qui sont équivalents par  $R$  ont même image par  $f$ ; soit  $\varphi: G \rightarrow H$  l'application déduite de  $f$  par passage aux classes d'équivalence. C'est un morphisme de groupes tel que  $\varphi \circ j_i(g) = \varphi([(i, g)]) = f((i, g)) = f_i(g)$  pour tout  $i \in I$  et tout  $g \in G_i$ , et c'est le seul morphisme qui a cette propriété car les images des  $j_i$  engendrent  $G$ .  $\square$

*Exemple 1.8.6.* — a) Supposons que  $G_i = \mathbf{Z}$  pour tout  $i \in I$ . Le produit libre de la famille  $(G_i)$  est appelé *groupe libre* sur  $I$  et noté  $F(I)$ . Lorsque  $I = \{1, \dots, n\}$ , on le note plutôt  $F_n$ .

Soit  $W$  l'ensemble des suites finies (« mots ») sur un ensemble  $S$  dont les éléments sont notés  $x_i$  et  $\bar{x}_i$ , pour  $i \in I$ , ces éléments étant supposés deux à deux distincts. C'est un monoïde pour la concaténation des mots. Il existe un unique morphisme de monoïdes  $j: W \rightarrow F(I)$  qui applique  $x_i$  sur  $j_i(1)$  et  $\bar{x}_i$  sur  $j_i(-1)$  si  $i \in I$ . Cet homomorphisme est surjectif. On dit qu'un mot  $w \in W$  est réduit s'il n'y a pas dans la suite  $w$  deux termes successifs de la forme  $x_i, \bar{x}_i$ , ou  $\bar{x}_i, x_i$ . Notons  $W_0$  l'ensemble des mots réduits. on a  $j(W_0) = F(I)$ . Démontrons alors que l'application  $j|_{W_0}$  est injective : *tout élément de  $F(I)$  est représenté par un unique mot réduit*. Pour cela, on construit son inverse en faisant agir le groupe  $F(I)$  sur l'ensemble  $W_0$ . Si  $w \in W_0$  ne commence pas par  $\bar{x}_i$ , on pose  $\lambda_i(w) = (x_i, w)$ ; sinon, on écrit  $w = (\bar{x}_i, w')$  et l'on pose  $\lambda_i(w) = w'$ . Dans les deux cas,  $\lambda_i(w)$  est un mot réduit. L'application  $\lambda_i: W_0 \rightarrow W_0$  est bijective; il existe donc un unique morphisme de groupes de  $\mathbf{Z}$  dans  $\mathfrak{S}(W_0)$  qui applique 1 sur  $\lambda_i$ . Il existe alors un unique morphisme de groupes  $\lambda: F(I) \rightarrow \mathfrak{S}(W_0)$  qui applique  $[(i, 1)]$  sur  $\lambda_i$ . Par récurrence sur la longueur de  $w$ , on a alors  $\lambda(j(w)(\varepsilon)) = w$  pour tout  $w \in W_0$ ; cela prouve que  $j$  est injective.

b) Soit  $(G_i)$  une famille de groupes, soit  $K$  un groupe et soit  $(k_i)$  une famille, où  $k_i: K \rightarrow G_i$  est un homomorphisme de groupes. Il existe un groupe  $H$  et une famille  $(f_i)$ , où  $f_i: G_i \rightarrow H$  est un homomorphisme de groupes tel que les homomorphismes  $f_i \circ k_i: K \rightarrow H$  soient égaux, et universel pour cette propriété.

Il suffit en effet de définir dans le produit libre  $G$  de la famille  $(G_i)$  un sous-groupe  $H$  comme le plus petit sous-groupe distingué qui contient les éléments  $j_i(k_i(a)) / j_{i'}(k_{i'}(a))$ , pour  $a \in K$  et  $i, i' \in I$ .

Ce groupe est appelé somme amalgamée de la famille  $(G_i)$  le long des homomorphismes  $k_i$ . Lorsque  $I = \{1, 2\}$ , on le note plutôt  $G_1 *_K G_2$ .

**THÉORÈME 1.8.7.** — *Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $U$  et  $V$  des ouverts de  $X$ , soit  $W = U \cap V$ . On suppose que  $U, V$  et  $W$  sont connexes par arcs. Alors, pour tout point*

$a \in W$ , l'homomorphisme canonique

$$\lambda: \pi_1(U, a) *_{\pi_1(W, a)} \pi_1(V, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$$

est un isomorphisme.

*Démonstration.* — L'injection  $i_U$  de  $U$  dans  $X$  induit un homomorphisme de groupes  $(i_U)_*$  de  $\pi_1(U, a)$  dans  $\pi_1(X, a)$ ; l'injection  $i_V$  de  $V$  dans  $X$  induit un homomorphisme de groupes de  $\pi_1(V, a)$  dans  $\pi_1(X, a)$ . Les injections  $i_{WU}$  de  $W$  dans  $U$  et  $i_{WV}$  dans  $V$  induisent deux homomorphismes de groupes  $(i_{WU})_*$  et  $(i_{WV})_*$  de  $\pi_1(W, a)$  dans  $\pi_1(U, a)$  et  $\pi_1(V, a)$  respectivement; les deux homomorphismes composés  $(i_U)_* \circ (i_{WU})_*$  et  $(i_V)_* \circ (i_{WV})_*$  de  $\pi_1(W, a)$  dans  $\pi_1(X, a)$  coïncident avec l'homomorphisme  $(i_W)_*$  déduit de l'injection de  $W$  dans  $X$ . Par suite, il existe un unique homomorphisme de groupes  $\lambda$  du produit amalgamé  $\pi_1(U, a) *_{\pi_1(W, a)} \pi_1(V, a)$  dans  $\pi_1(X, a)$  qui est induit par  $(i_U)_*$  sur le facteur  $\pi_1(U, a)$  et par  $(i_V)_*$  sur le facteur  $\pi_1(V, a)$ .

Démontrons que le morphisme  $\lambda$  est surjectif. Soit  $c: [0; 1] \rightarrow X$  un lacet en  $a$ . Comme  $[0; 1]$  est compact, il existe un entier  $n$  tel que l'image de tout intervalle  $[(k-1)/n, k/n]$  soit contenue dans  $U$  ou dans  $V$  (prop. 1.2.7 appliquée au recouvrement  $(c^{-1}(U), c^{-1}(V))$  de  $[0; 1]$ ). Pour tout  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ , on choisit un chemin  $u_k$  reliant  $a$  à  $c(k/n)$  dont l'image est contenue dans  $W$  si  $c(k/n) \in W$ , dans  $U$  si  $c(k/n) \in U$  et dans  $V$  si  $c(k/n) \in V$ . C'est possible car  $U$ ,  $V$  et  $W$  sont connexes par arcs. On pose aussi  $u_0 = u_n = e_a$ , le lacet constant en  $a$ .

Pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $c_k$  le chemin  $t \mapsto c((k-1+t)/n)$ . On a  $c \sim c_1 * \dots * c_n$ , de sorte que le chemin  $c$  est strictement homotope à la juxtaposition des chemins  $u_k * c_k * \overline{u_k}$ , pour  $1 \leq k \leq n$ . Si l'image de  $c_k$  est contenue dans  $U$ , alors  $c((k-1)/n)$  et  $c(k/n)$  appartiennent à  $U$ , donc les chemins  $u_{k-1}$  et  $u_k$  sont tracés sur  $U$ ; de même, si l'image de  $c_k$  est contenue dans  $V$ , les chemins  $u_{k-1}$  et  $u_k$  sont tracés sur  $V$ . la classe du lacet  $c$  est donc égale à une composition de classes de lacets appartenant à l'image dans  $\pi_1(X, a)$  de  $\pi_1(U, a)$  ou de  $\pi_1(V, a)$ . Cela prouve la surjectivité du morphisme  $\lambda$ .

Pour démontrer qu'il est bijectif, il y a deux méthodes. La première consiste à démontrer que l'élément  $\theta(c) = \prod_{k=1}^n [u_k * c_k * \overline{u_k}]$  du produit amalgamé  $\pi_1(U, a) *_{\pi_1(W, a)} \pi_1(V, a)$  ne dépend d'aucun choix et que l'application  $c \mapsto \theta(c)$  fournit la bijection réciproque de  $\lambda$ . La seconde consiste à utiliser la théorie des revêtements pour démontrer que  $\pi_1(X, a)$  possède la propriété universelle du produit amalgamé; elle ne vaut que si  $U$  et  $V$  sont délaçables.

1) *Preuve de la bijectivité par les lacets.*

On veut démontrer que l'élément  $\theta(c)$  du produit amalgamé que l'on a indiqué ne dépend d'aucun choix. On indique entre crochets la classe dans le produit amalgamé d'un chemin dans  $U$  ou dans  $V$ ; si ce chemin est tracé dans  $W$ , les deux interprétations

coïncident, par définition du produit amalgamé. On peut aussi raffiner le découpage et remplacer  $n$  par un multiple.

Soit  $\sigma: [0;1]^2 \rightarrow X$  une homotopie stricte reliant deux lacets  $c$  et  $c'$  en  $a$ . Comme l'intervalle  $[0;1]^2$  est compact, il existe un entier  $n$  tel que l'image de tout carré de côté  $1/n$  soit contenue dans  $U$  ou dans  $V$  (prop. 1.2.7, appliquée au recouvrement  $(\sigma^{-1}(U), \sigma^{-1}(V))$  de  $[0;1]^2$ ). On introduit comme précédemment des chemins  $v_{k,\ell}$  reliant  $a$  à  $\sigma(k/n, \ell/n)$  dont l'image est contenue dans  $W$  si  $\sigma(k/n, \ell/n) \in W$ , dans  $U$  si  $\sigma(k/n, \ell/n) \in U$  et dans  $V$  si  $\sigma(k/n, \ell/n) \in W$ . Si  $k = 0$ ,  $k = n$ ,  $\ell = 0$  ou  $\ell = n$ , on a  $\sigma(k/n, \ell/n) = a$  et on impose en outre que  $v_{k,\ell}$  soit le chemin constant en  $a$ . Soit  $c_{k,\ell}$  le chemin  $t \mapsto \sigma((k-1+t)/n, \ell/n)$  et  $d_{k,\ell}$  le chemin  $t \mapsto \sigma(k/n, (\ell-1+t)/n)$ .

Pour  $\ell \in \{0, \dots, n\}$ , on pose  $\theta_\ell = \prod_{k=1}^n [v_{k-1,\ell} c_{k,\ell} \bar{v}_{k,\ell}]$ , et on démontre par récurrence que  $\theta_0 = \theta_n$ .

Pour tout couple  $(k, \ell)$  d'entiers tels que  $1 \leq k \leq n$  et  $0 \leq \ell \leq n-1$ , le chemin  $c_{k,\ell}$  est strictement homotope au chemin  $d_{k-1,\ell} * c_{k,\ell+1} * \bar{d}_{k,\ell}$ , dans l'ouvert  $U_{k,\ell} \in \{U, V\}$  qui contient  $\sigma([(k-1)/n, k/n] \times [\ell/n, (\ell+1)/n])$ . Par suite, on a donc l'égalité suivante dans  $\pi_1(U_{k,\ell})$ :

$$\begin{aligned} [v_{k-1,\ell} c_{k,\ell} \bar{v}_{k,\ell}] &= [v_{k-1,\ell} d_{k-1,\ell} c_{k,\ell+1} \bar{d}_{k,\ell} \bar{v}_{k,\ell}] \\ &= [v_{k-1,\ell} d_{k-1,\ell} \bar{v}_{k-1,\ell+1}] [v_{k-1,\ell+1} c_{k,\ell+1} \bar{v}_{k,\ell+1}] [v_{k,\ell+1} \bar{d}_{k,\ell} \bar{v}_{k,\ell}]. \end{aligned}$$

Le facteur du milieu est celui qui apparaît dans la définition  $\theta_{\ell+1}$ ; pour comprendre le produit de ces expressions lorsque  $k$  varie, il faut donc étudier comment le troisième facteur pour  $k$  se compose avec le premier pour  $k+1$ . Si  $U_{k,\ell} = U_{k,\ell+1}$ , on a l'égalité dans  $\pi_1(U_{k,\ell}, a)$ :

$$\begin{aligned} [v_{k,\ell+1} \bar{d}_{k,\ell} \bar{v}_{k,\ell}] [v_{k,\ell} d_{k,\ell} \bar{v}_{k,\ell+1}] &= [v_{k,\ell+1} d_{k,\ell} \bar{v}_{k,\ell} v_{k,\ell} d_{k,\ell} \bar{v}_{k,\ell+1}] \\ &= e. \end{aligned}$$

Si, au contraire, les deux ouverts  $U_{k,\ell}$  et  $U_{k,\ell+1}$  sont différents, l'image du chemin  $d_{k,\ell}$  est contenue dans  $W$ , de même que celle des chemins  $v_{k,\ell}$  et  $v_{k,\ell+1}$ , si bien que

$$\begin{aligned} [v_{k,\ell+1} \bar{d}_{k,\ell} \bar{v}_{k,\ell}] [v_{k,\ell} d_{k,\ell} \bar{v}_{k,\ell+1}] &= [v_{k,\ell+1} \bar{d}_{k,\ell} \bar{v}_{k,\ell}]_W [v_{k,\ell} d_{k,\ell} \bar{v}_{k,\ell+1}]_W \\ &= [v_{k,\ell+1} d_{k,\ell} \bar{v}_{k,\ell} v_{k,\ell} d_{k,\ell} \bar{v}_{k,\ell+1}]_W \\ &= e. \end{aligned}$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
\theta_\ell &= \prod_{k=1}^n \left( [v_{k-1,\ell} d_{k-1,\ell} \bar{v}_{k-1,\ell+1}] [v_{k-1,\ell+1} c_{k,\ell+1} \bar{v}_{k,\ell+1}] [v_{k,\ell+1} \bar{d}_{k,\ell} \bar{v}_{k,\ell}] \right) \\
&= [v_{0,\ell} d_{0,\ell} \bar{v}_{0,\ell+1}] \prod_{k=1}^{n-1} \left( [v_{k-1,\ell+1} c_{k,\ell+1} \bar{v}_{k,\ell+1}] [v_{k,\ell+1} \bar{d}_{k,\ell} \bar{v}_{k,\ell}] [v_{k,\ell} d_{k,\ell} \bar{v}_{k,\ell+1}] \right) \\
&\quad [v_{n-1,\ell+1} c_{n,\ell+1} \bar{v}_{n,\ell+1}] [v_{n,\ell+1} \bar{d}_{n,\ell} \bar{v}_{n,\ell}] \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \left( [v_{k-1,\ell+1} c_{k,\ell+1} \bar{v}_{k,\ell+1}] \right) [v_{n-1,\ell+1} c_{n,\ell+1} \bar{v}_{n,\ell+1}] \\
&= \prod_{k=1}^n [v_{k-1,\ell+1} c_{k,\ell+1} \bar{v}_{k,\ell+1}] \\
&= \theta_{\ell+1}.
\end{aligned}$$

On a donc  $\theta(c) = \theta_0 = \theta_n = \theta(c')$ . On peut donc définir une application  $\mu$  de  $\pi_1(X, a)$  dans le produit amalgamé par la formule  $\mu(\gamma) = \theta(c)$ , où  $c$  est un lacet quelconque de classe  $\gamma$ .

La formule explicite pour  $\theta$  prouve que  $\theta(c * c') = \theta(c)\theta(c')$ . Par suite,  $\mu$  est un homomorphisme de groupes. On a  $\lambda(\theta(c)) = [c]$  par construction, donc  $\lambda \circ \mu = \text{id}$ .

Cela prouve que  $\mu$  est injectif. L'image de  $\mu$  contient le facteur  $\pi_1(U, a)$  du produit amalgamé, comme on le voit en prenant un lacet  $c$  dans  $U$  et en constatant que  $\mu([c]_X) = \mu(c)$ ; l'image de  $\mu$  contient aussi le facteur  $\pi_1(V, a)$ . Comme ces deux facteurs engendrent le produit amalgamé, l'application  $\theta$  est surjective. C'est ainsi un isomorphisme, et  $\lambda$  est donc aussi un isomorphisme.

2) *Preuve par la théorie des revêtements* (on suppose  $U$  et  $V$  délaçables).

Soit  $F$  un ensemble muni d'une action  $m_U$  de  $\pi_1(U, a)$  et d'une action  $m_V$  de  $\pi_1(V, a)$  qui coïncident sur  $\pi_1(W, a)$  au sens où, pour tout  $x \in F$  et tout  $\gamma \in \pi_1(W, a)$ , on a  $m_U((i_{WU})_* \gamma, x) = m_V((i_{WV})_* \gamma, x)$ . On doit démontrer qu'il existe une unique action  $m$  de  $\pi_1(X, a)$  sur  $F$  telle que  $m((i_U)_* \gamma, x) = m_U(\gamma, x)$  pour tout  $\gamma \in \pi_1(U, a)$  et tout  $x \in F$ , et  $m((i_V)_* \gamma, x) = m_V(\gamma, x)$  pour tout  $\gamma \in \pi_1(V, a)$  et tout  $x \in F$ .

Soit  $E_U$  le revêtement de  $U$  dont la fibre en  $a$  est égale à  $F$  sur laquelle  $\pi_1(U, a)$  agit via  $m_U$ ; soit  $E_V$  le revêtement de  $V$  dont la fibre en  $a$  est égale à  $F$  sur laquelle  $\pi_1(V, a)$  agit via  $m_V$ . La restriction à  $W$  du revêtement  $E_U$  correspond à l'action de  $\pi_1(W, a)$  sur  $F$ , de même que la restriction à  $W$  du revêtement  $E_V$ ; les deux revêtements  $E_U|_W$  et  $E_V|_W$  de  $W$  sont donc isomorphes. Comme  $W$  est connexe, il existe un unique isomorphisme de revêtements de  $E_U|_W$  sur  $E_V|_W$  qui est l'application identique sur  $F = (E_U)_a = (E_V)_a$ . Soit  $E$  l'espace topologique obtenu en recollant  $E_U$  et  $E_V$  au moyen de cet isomorphisme. C'est un  $B$ -espace; au-dessus de  $U$ , on a un isomorphisme  $E|_U \simeq E_U$ ; au-dessus de  $V$ , on a un isomorphisme  $E|_V \simeq E_V$ . Comme  $U$  et  $V$  sont ouverts,  $E$  est un revêtement de  $B$ . Soit  $m$  l'action de  $\pi_1(B, a)$  sur la fibre  $E_a = F$ .



Le groupe  $\pi_1(U, a)$  agit via  $m_U$  ; le groupe  $\pi_1(V, a)$  agit via  $m_V$ . Cela prouve l'existence d'une action vérifiant les propriétés indiquées. L'unicité d'une telle action découle de ce que  $\pi_1(X, a)$  est engendré par les images de  $\pi_1(U, a)$  et  $\pi_1(V, a)$  (surjectivité de  $\lambda$ ).  $\square$

Je renvoie aux exercices faits en séances de travaux dirigés pour de nombreuses applications de ce théorème. On y démontrera par exemple que le groupe fondamental du complémentaire de  $n$  points dans le plan est le groupe libre  $F_n$ .



## CHAPITRE 2

### VARIÉTÉS TOPOLOGIQUES

---

Dans ce premier chapitre, on utilise des techniques de calcul différentiel pour démontrer quelques résultats frappants et importants en topologie.

#### § 2.1. Applications différentiables

DÉFINITION 2.1.1. — Soit  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels normés, soit  $U$  un ouvert de  $E$ , soit  $x$  un point de  $U$  et soit  $f: U \rightarrow F$  une application.

a) Soit  $u$  un vecteur de  $E$ . On dit que  $f$  possède une dérivée en  $x$  dans la direction  $u$  si l'application  $t \mapsto f(x + tu)$  est dérivable en 0 ; on note alors  $D_u f(x)$  sa dérivée.

b) On dit que  $f$  est différentiable en  $x$  s'il existe une application linéaire continue  $a: E \rightarrow F$  telle que

$$f(x + u) = f(x) + a(u) + o(\|u\|)$$

lorsque  $u \rightarrow 0$  dans  $E$ .

Si  $f$  est différentiable en  $x$ , alors  $f$  possède une dérivée en  $x$  dans la direction de tout vecteur et l'application linéaire  $a$  de la définition vérifie  $a(u) = D_u f(x)$  pour tout  $u \in E$ . On la note plutôt  $Df(x)$ , ou  $f'(x)$ , et on dit que c'est la *différentielle* de  $f$  en  $x$ .

Si  $f$  est différentiable en  $x$ , alors  $f$  est continue en  $x$ .

Exercice 2.1.2. — Soit  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  l'application donnée par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3 y / (x^6 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) ; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que  $f$  a une dérivée suivant tout vecteur en l'origine, que l'application  $u \mapsto D_u f(0)$  est linéaire, mais que  $f$  n'est pas continue en 0.

Notons  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ . Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  et  $f: U \rightarrow E$  une application de  $U$  dans un espace vectoriel normé  $E$ . Si elle existe, la dérivée de  $f$

suisant le vecteur  $e_i$  est appelée dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x_i$  et notée  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $\partial_i f$  ou  $D_i f$ , ou encore  $f_{x_i}$ , voire même  $f_i$ .

PROPOSITION 2.1.3. — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , soit  $f: U \rightarrow E$  un espace vectoriel normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) L'application  $f$  est différentiable en tout point de  $U$  et l'application  $x \mapsto Df(x)$  de  $U$  dans  $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, E)$  est continue;

b) L'application  $f$  a des dérivées partielles en tout point de  $U$  et les applications  $x \mapsto D_i f(x)$  sont continues sur  $U$ .

*Démonstration.* — L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est évidente. Démontrons l'autre. Soit  $a$  un point de  $U$ , soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $\delta$  un nombre réel tel que  $\delta > 0$ ,  $V = \prod_i [a_i - \delta, a_i + \delta] \subset U$ , et  $|D_i f(x) - D_i f(a)| < \varepsilon$  si  $x \in V$ . Pour  $x \in V$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n) \\ &= \sum_{p=1}^n (f(x_1, \dots, x_p, a_{p+1}, \dots, a_n) - f(x_1, \dots, x_{p-1}, a_p, \dots, a_n)). \end{aligned}$$

En outre, pour tout  $p \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\begin{aligned} &f(x_1, \dots, x_p, a_{p+1}, \dots, a_n) - f(x_1, \dots, x_{p-1}, a_p, \dots, a_n) \\ &= \int_{a_p}^{x_p} D_p f(x_1, \dots, x_{p-1}, t, a_p, \dots, a_n) dt \\ &= (x_p - a_p) D_p f(a) + \int_{a_p}^{x_p} (D_p f(x_1, \dots, x_{p-1}, t, a_p, \dots, a_n) - D_p f(a)) dt, \end{aligned}$$

si bien que

$$\left| f(x) - f(a) - \sum_{p=1}^n (x_p - a_p) D_p f(a) \right| \leq \varepsilon \sum_{p=1}^n |x_p - a_p|$$

pour tout  $x \in V$ . Comme  $\varepsilon$  est arbitraire, cela démontre que  $f$  est différentiable en  $a$ , de différentielle l'application linéaire  $(u_1, \dots, u_n) \mapsto \sum_{p=1}^n u_p D_p f(a)$ . Comme les applications  $a \mapsto D_p f(a)$  sont continues, l'application  $a \mapsto Df(a)$  est continue. Cela conclut la preuve de la proposition.  $\square$

PROPOSITION 2.1.4. — Soit  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $f: U \rightarrow F$  une application,  $V$  un ouvert de  $F$ ,  $g: V \rightarrow G$  une application. On suppose que  $f(U) \subset V$ . Soit  $a \in U$ , posons  $b = f(a)$ . Si  $f$  est différentiable en  $a$  et  $g$  est différentiable en  $b$ , alors  $g \circ f$  est différentiable en  $a$  et l'on a

$$D(g \circ f)(a) = Dg(b) \circ Df(a).$$

*Démonstration.* — Par définition de  $Dg(b)$ , on a, pour  $v \in F$  proche de 0,

$$g(b + v) = g(b) + Dg(b)(v) + o(\|v\|).$$

Pour  $u \in E$  proche de 0, on écrit

$$f(a+u) = f(a) + Df(a)(u) + o(\|u\|) = b + Df(a)(u) + o(\|u\|),$$

que l'on reporte dans la définition de  $Dg(b)$ . Il vient :

$$\begin{aligned} g(f(a+u)) &= g(b) + Dg(b)(Df(a)(u) + o(\|u\|)) + o(Df(a)(u) + o(\|u\|)) \\ &= g(b) + Dg(b)(Df(a)(u)) + o(\|u\|), \end{aligned}$$

Ce qui démontre que  $g \circ f$  est différentiable en  $a$ , de différentielle  $Dg(b) \circ Df(a)$ .  $\square$

PROPOSITION 2.1.5. — Soit  $U$  un ouvert d'un espace vectoriel normé  $E$ , soit  $F$  un espace vectoriel normé, soit  $f: U \rightarrow F$  une application différentiable.

a) Soit  $a, b$  des points de  $U$  tels que  $[a, b] \subset U$ . Soit  $m: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  une application continue. On suppose que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\|Df((1-t)a + tb)\| \leq m(t)$ . Alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \int_0^1 m(t) dt.$$

b) Si  $Df(x) = 0$  pour tout  $x \in U$ , alors  $f$  est localement constante.

Démonstration. — a) Pour  $t \in [0, 1]$ , posons  $M(t) = \int_0^t m(u) du$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $I$  l'ensemble des nombres réels  $t \in [0, 1]$  tels que  $\|f((1-t)a + tb) - f(a)\| \leq M(t) + \varepsilon t \|b - a\|$ . C'est une partie fermée de  $[0, 1]$  car  $f$  et  $M$  sont continues; elle contient 0. Soit  $t \in I$ . Soit  $\delta > 0$  tel que l'on ait

$$\|f((1-t)a + tb + u) - f((1-t)a + tb) - Df((1-t)a + tb)(u)\| \leq \varepsilon \|u\|$$

et

$$|m((1-t)a + tb + u) - m((1-t)a + tb)| \leq \varepsilon \|u\|$$

si  $\|u\| < \delta$ . Alors, pour  $t' \in [0, 1]$  tel que  $t \leq t' \leq t + \delta$ , on a

$$\begin{aligned} \|f((1-t')a + t'b) - f(a)\| &\leq \|f((1-t)a + tb) - f(a)\| + \|f((1-t)a + tb + (t'-t)(b-a)) - f((1-t)a + tb)\| \\ &\leq M(t) + \varepsilon t \|b - a\| + \|Df((1-t)a + tb)\| |t' - t| \|b - a\| + \varepsilon |t' - t| \|b - a\| \\ &\leq M(t) + \int_t^{t'} m(u) du \end{aligned}$$

etc. puis on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0.

b) D'après le point précédent,  $f$  est constante sur toute boule contenue dans  $U$ .  $\square$

DÉFINITION 2.1.6. — Soit  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels normés. Soit  $U$  un ouvert de  $E$  et soit  $f: U \rightarrow F$  une application.

a) On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^0$  si  $f$  est continue;

b) Si  $n \geq 1$ , on dit que  $f$  est classe  $\mathcal{C}^n$  si  $f$  est différentiable et si sa différentielle  $Df: U \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  est de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$ .

c) On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  pour tout entier  $n \geq 0$ .

*Exemple 2.1.7.* — Supposons que  $f$  soit une application d'un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^n$  dans un espace vectoriel normé  $E$ . Alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  si, pour tout  $p$ -uplet  $(i_1, \dots, i_p)$  d'entiers de  $\{1, \dots, n\}$ , la dérivée partielle

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_p}}$$

existe en tout point de  $U$  et définit une fonction continue. On la note

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}}.$$

Soit  $f$  une application d'un ouvert  $U$  d'un espace vectoriel normé  $E$  dans un espace vectoriel normé  $F$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ , on définit par récurrence sa différentielle  $p$ -ième  $D^p f$  comme la différentielle  $(p-1)$ -ième de  $Df$ . C'est un élément de l'espace  $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; \cdots \mathcal{L}(E; F) \cdots))$ , dans lequel l'espace  $E$  apparaît  $p$  fois. Il est commode d'identifier un élément  $A$  de cet espace à l'application

$$(u_1, \dots, u_p) \mapsto A(u_1)(u_2) \cdots (u_p)$$

de  $E^p$  dans  $F$ . Cette dernière application est  $p$ -linéaire, c'est-à-dire linéaire par rapport à chaque variable.

Notons aussi que si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^q$ , alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  si et seulement si  $D^q f$  est de classe  $\mathcal{C}^{p-q}$ , et alors  $D^p f = D^{p-q}(D^q f)$ .

**PROPOSITION 2.1.8.** — *Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{p-1}$ , alors pour tout point  $x \in U$  en lequel  $D^{p-1}$  est différentiable,  $D^p f(x)$  est une application  $p$ -linéaire symétrique.*

*Exemple 2.1.9.* — Lorsque  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  d'un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  dans un espace vectoriel normé  $E$ , cela correspond aux égalités

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Inversement, ces égalités recouvrent l'essentiel de la preuve de la proposition.

*Démonstration.* — On traite pour commencer le cas  $p = 2$ . Soit  $a \in U$ , soit  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $E$ . Il faut démontrer que  $D_v(D_u f)$  et  $D_u(D_v f)$  coïncident en  $a$ ; le principe de la preuve consiste à approcher ces deux expressions par une combinaison linéaire convenable de valeurs de  $f$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , soit  $\delta > 0$  tel que  $a + su + tv \in U$  pour tout  $(s, t) \in [0, \delta]^2$  et tel que  $\|D_u f(x) - D_u f(a)\| \leq \varepsilon$ ,  $\|D_v f(x) - D_v f(a)\| \leq \varepsilon$  pour tout  $x \in U$  de la forme  $a + su + tv$  avec  $(s, t) \in [0, \delta]^2$ . Par hypothèse,  $D_u f$  est différentiable en  $a$ , si bien que

$$D_u f(a + su + tv) = D_u f(a) + sD_u D_u f(a) + tD_v D_u f(a) + o(s + t).$$

Pour  $s \in [0, \delta]$ , on pose

$$\varphi(s) = f(a + su + \delta v) - f(a + su).$$

Alors,  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$\varphi'(s) = D_u f(a + su + \delta v) - D_u f(a + su) = \delta D_v D_u f(a) + o(s + \delta),$$

si bien que

$$f(a + \delta u + \delta v) - f(a + \delta u) - f(a + \delta v) + f(a) = \varphi(\delta) - \varphi(0) = \delta^2 D_v D_u f(a) + o(\delta^2).$$

Par symétrie,

$$f(a + \delta u + \delta v) - f(a + \delta u) - f(a + \delta v) + f(a) = \delta^2 D_v D_u f(a) + o(\delta^2),$$

si bien que

$$\delta^2 D_u D_v f(a) = \delta^2 D_v D_u f(a) + o(\delta^2),$$

d'où l'égalité voulue en divisant par  $\delta^2$  et en faisant tendre  $\delta$  vers 0.

Démontrons maintenant la proposition par récurrence sur  $p$ . Soit  $u_1, \dots, u_p$  des vecteurs fixés de  $E$ . En appliquant le cas  $p = 2$  à  $x \mapsto D^{p-2} f(x)(u_3, \dots, u_p)$ , on obtient

$$D^p f(a)(u_1, \dots, u_p) = D^p f(a)(u_2, u_1, u_3, \dots, u_p).$$

D'autre part, le cas  $p - 1$  appliqué à  $x \mapsto D^{p-1} f(x)(u_2, \dots, u_p)$  entraîne que pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{2, \dots, p\}$ ,

$$D^{p-1} f(x)(u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(p)}) = D^{p-1} f(x)(u_2, \dots, u_p).$$

Si on différencie cette relation dans la direction de  $u_1$ , on obtient

$$D^p f(x)(u_1, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(p)}) = D^p f(x)(u_1, u_2, \dots, u_p).$$

L'assertion découle alors de ce que la transposition (12) et les permutations de  $\{1, \dots, n\}$  qui fixent 1 engendrent le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ .  $\square$

## § 2.2. Approximation

**THÉORÈME 2.2.1.** — Soit  $p \in \mathbf{N}$ . Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $\mathbf{R}^n$ , à support compact. Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  contenant le support de  $f$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $g$  sur  $\mathbf{R}^n$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et dont le support est contenu dans  $U$ , telle que  $|g(x) - f(x)| \leq \varepsilon$  et  $\inf(f) \leq g(x) \leq \sup(f)$  pour tout  $x \in \mathbf{R}^n$ .

**LEMME 2.2.2.** — Il existe une fonction  $\rho$  sur  $\mathbf{R}^n$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et à support compact, telle que  $\int \rho = 1$ .

*Démonstration.* — On construit une telle fonction  $\rho$  lorsque  $n = 1$  et on considère ensuite la fonction  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n \rho(x_i)$ .

Posons d'abord  $f(x) = \exp(-1/x)$  si  $x > 0$  et  $f(x) = 0$  si  $x \leq 0$ . La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbf{R}$ , elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbf{R}^*$ . On démontre par récurrence qu'il existe pour tout entier  $p \geq 0$  un polynôme  $A_p$  de degré  $p$  tel que  $f^{(p)}(x) = A_p(x)e^{-1/x}/x^{2p}$  pour  $x > 0$  et  $f^{(p)}(x) = 0$  pour  $x < 0$ . Prouvons maintenant que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  par récurrence sur  $p$  et  $f^{(p)}(0) = 0$ . Elle est continue. La formule donnée montre que si  $f$  est de

classe  $\mathcal{C}^{(p)}$ , alors  $f^{(p)}(x)/x$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0, si bien que  $f^{(p)}$  est dérivable en 0, de dérivée nulle. Reprenant la formule pour  $f^{(p+1)}$ , on en déduit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{p+1}$ .

Posons ensuite  $g(x) = f(1 - x^2)$ . La fonction  $g$  est positive et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbf{R}$ , son support est égal à  $[-1; 1]$ . Par suite,  $\int g > 0$  et il suffit de poser  $\rho(x) = g(x) / \int g$ .  $\square$

LEMME 2.2.3. — Soit  $\rho$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact sur  $\mathbf{R}^n$ , soit  $f$  une fonction localement intégrable sur  $\mathbf{R}^n$ . Pour tout  $x \in \mathbf{R}^n$ , posons

$$g(x) = (\rho * f)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \rho(y) f(x - y) dy.$$

La fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $\mathbf{R}^n$ ; pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  tel que  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq p$ ,

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g = \partial^\alpha \rho * f.$$

Si, de plus,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ , alors

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g = \rho * \partial^\alpha f.$$

*Démonstration.* — La deuxième assertion résulte du théorème de dérivation sous le signe somme dans la définition de  $g$ . Par changement de variables, on a aussi

$$g(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \rho(x - y) f(y) dy.$$

La première assertion découle alors du théorème de dérivation sous le signe somme appliqué à cette seconde expression.  $\square$

LEMME 2.2.4. — Soit  $\rho$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact sur  $\mathbf{R}^n$ , supposons  $\int \rho = 1$ . Pour tout  $t > 0$ , posons  $\rho_t(x) = t^n \rho(x/t)$ . Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbf{R}^n$ . Lorsque  $t \rightarrow 0$ ,  $\rho_t * f$  converge vers  $f$ , uniformément sur tout compact de  $\mathbf{R}^n$ .

*Démonstration.* — Comme  $\int_{\mathbf{R}^n} \rho = 1$ , on a aussi  $\int_{\mathbf{R}^n} \rho_t = 1$  et

$$\begin{aligned} \rho_t * f(x) - f(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} \rho_t(x - y) f(y) dy - \int_{\mathbf{R}^n} \rho_t(x - y) f(x) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \rho_t(x - y) (f(y) - f(x)) dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \rho_t(y) (f(x - y) - f(x)) dy \\ &= t^n \int_{\mathbf{R}^n} \rho(y/t) (f(x - y) - f(x)) dy. \end{aligned}$$

Soit  $T > 0$  tel que  $\rho(y) = 0$  si  $\|y\| \geq T$ . On a alors  $\rho(y/t) = 0$  si  $\|y\| \geq tT$ . Par suite,

$$\rho_t * f(x) - f(x) = t^n \int_{\|y\| \leq tT} \rho(y/t) (f(x - y) - f(x)) dy.$$



Soit  $R > 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f$  est uniformément continue sur la boule de centre 0 et de rayon  $R + 1$ , il existe un nombre réel  $\delta$  strictement positif tel que  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  si  $\|x - y\| \leq \delta$  et  $\|x\| \leq R$ . Par suite, si  $0 < t \leq \delta/T$  et  $\|x\| \leq R$ , on a

$$\begin{aligned} |\rho_t * f(x) - f(x)| &\leq t^n \int_{\|y\| \leq tT} |\rho(y/t)| |f(x-y) - f(x)| \, dy \\ &\leq t^n \varepsilon \int_{\|y\| \leq tT} |\rho|(y/t) \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbf{R}^n} |\rho|. \end{aligned}$$

Cela prouve que quand  $t \rightarrow 0$ ,  $\rho_t * f$  converge uniformément vers  $f$  sur la boule de centre 0 et de rayon  $R$ .  $\square$

### § 2.3. Un théorème du changement de variables

THÉORÈME 2.3.1. — Soit  $\varphi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ ; on suppose qu'il existe  $R > 0$  tel que  $\varphi(x) = x$  si  $\|x\| > R$ . Alors, pour toute fonction  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  qui est continue et à support compact, on a

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(\varphi(x)) \det(D\varphi(x)) \, dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \, dx.$$

Il y a plusieurs différences entre cet énoncé et le théorème du changement de variables dans les intégrales multiples :

- On n'exige pas que  $\varphi$  soit un difféomorphisme ;
- D'ailleurs, on va *déduire* de ce théorème que sous ces hypothèses,  $\varphi$  est automatiquement surjective ;
- le *jacobien*, c'est-à-dire le déterminant de la différentielle de  $\varphi$ , n'apparaît pas avec la valeur absolue.

Exemple 2.3.2. — En dimension 1, il s'agit de l'énoncé suivant : supposons que  $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et qu'il existe  $R > 0$  tel que  $\varphi(x) = x$  pour  $|x| > R$ . Alors, pour toute fonction intégrable  $f$  sur  $\mathbf{R}$ , on a

$$\int_{\mathbf{R}} f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = \int_{\mathbf{R}} f(x) \, dx.$$

C'est-à-dire essentiellement le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.

LEMME 2.3.3. — Il suffit de démontrer le théorème sous l'hypothèse que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  et à support compact.

*Démonstration.* — Supposons le théorème démontré sous ces hypothèses plus fortes. Pour commencer, on suppose que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  à support compact et  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Soit  $\rho: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$ , paire, positive ou nulle, dont le support est contenu dans la boule unité et telle  $\int_{\mathbf{R}^n} \rho(x) \, dx = 1$ . Pour tout  $t > 0$ , posons  $\rho_t(x) = t^n \rho(tx)$ .

Alors,  $\varphi_t = \rho_t * \varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et converge uniformément vers  $\varphi$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ , de même que  $\rho_t * D\varphi$  converge uniformément vers  $D\varphi$ . De plus, si  $\|x\| > R + 1$  et  $t > 1$ , alors

$$\rho_t * \varphi(x) = \int_{\|y\| < 1/t} \rho_t(y) \varphi(x - y) \, dy = \int_{\|y\| < 1/t} \rho_t(y) (x - y) \, dy = x.$$

Le théorème appliqué à  $\varphi_t$  et  $f$  affirme

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(\varphi_t(x)) \det(D\varphi_t(x)) \, dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \, dx.$$

Lorsque  $t \rightarrow \infty$ , l'intégrande converge uniformément vers  $f(\varphi(x)) \det(D\varphi(x))$  et son support reste contenu dans un compact fixé de  $\mathbf{R}^n$ .

Supposons maintenant  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et que  $f$  est continue à support compact. Alors  $f$  est limite uniforme, lorsque  $t \rightarrow \infty$ , de la famille  $(f * \rho_t)$  de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  et à supports compacts définie. Pour tout  $t > 0$ , on a donc

$$\int_{\mathbf{R}^n} f_t(\varphi(x)) \det(D\varphi(x)) \, dx = \int_{\mathbf{R}^n} f_t(x) \, dx.$$

Lorsque  $t \rightarrow \infty$ , les deux intégrandes convergent uniformément, respectivement vers  $f(\varphi(x)) \det(D\varphi(x))$  et  $f(x)$ , et leur support est contenu dans un compact fixé de  $\mathbf{R}^n$ . Par suite, on peut passer à la limite et l'on obtient l'égalité annoncée.  $\square$

LEMME 2.3.4. — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application de classe  $\mathbf{C}^2$ ; pour  $x \in U$ , notons  $A(x) = (\partial_j \varphi_i(x))$  la matrice de sa différentielle en  $x$ . Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , notons  $M_i(x)$  le cofacteur de  $\partial_i \varphi_1(x)$  dans le développement du déterminant de  $A(x)$  suivant la première ligne. Alors,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} M_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} M_n = 0.$$

*Démonstration.* — Il est instructif de commencer par le cas  $n = 2$ . Dans ce cas,

$$\det(A) = \partial_1 \varphi_1 \partial_2 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_1 \partial_1 \varphi_2,$$

de sorte que

$$M_1 = \partial_2 \varphi_2 \quad \text{et} \quad M_2 = -\partial_1 \varphi_2.$$

L'égalité à prouver est donc

$$\partial_1 \partial_2 \varphi_2 - \partial_2 \partial_1 \varphi_2 = 0,$$

égalité qui résulte de la symétrie de la différentielle seconde de  $\varphi$ .

Traitons le cas général. Pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $A_k(x)$  la matrice extraite de  $A(x)$  dont on a ôté la première ligne et la  $k$ -ième ligne, de sorte que  $M_k(x) = (-1)^{k-1} \det A_k(x)$ . Pour abrégier les notations, on note  $\psi(x)$  le vecteur colonne  $(\varphi_2, \dots, \varphi_n)$ , de sorte que

$A_k = (\partial_j \psi)_{j \neq k}$ . L'application  $x \mapsto A_k(x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et la multi-linéarité du déterminant d'une matrice entraîne que pour tout  $\ell \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \det(A_k(x)) &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\partial_j \psi)_{j \neq k} \\ &= \sum_{p=1}^n \det \left( \left[ (\partial_j \psi)_{j < p} (\partial_k \partial_p \psi) (\partial_j \psi)_{j > p} \right]_{j \neq k} \right) \\ &= \sum_{p=1}^n \begin{cases} (-1)^{p-1} & \text{si } p < k \\ (-1)^{p-2} & \text{si } p > k \end{cases} \det \left( \left[ (\partial_k \partial_p \psi) (\partial_j \psi)_{j \neq p, k} \right] \right). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\partial}{\partial x_k} \det(A_k(x)) \\ = \sum_{\substack{k, p=1 \\ p \neq k}}^n (-1)^{k-1} \begin{cases} (-1)^{p-1} & \text{si } p < k \\ (-1)^{p-2} & \text{si } p > k \end{cases} \det \left( \left[ (\partial_k \partial_p \psi) (\partial_j \psi)_{j \neq p, k} \right] \right). \end{aligned}$$

Comme les coefficients  $\varphi_2, \dots, \varphi_n$  de  $\psi$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$ , on a  $\partial_k \partial_p \psi = \partial_p \partial_k \psi$ . On peut donc regrouper les termes de la somme indexés par  $(p, k)$  et par  $(k, p)$ . Leurs signes sont opposés, si bien que ces termes s'annulent deux à deux, d'où l'égalité

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\partial}{\partial x_k} \det(A_k(x)) = 0.$$

□

Nous démontrons maintenant le théorème 2.3.1.

*Démonstration du théorème 2.3.1, d'après Lax (1999).* — D'après le lemme 2.3.3, nous pouvons supposer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^2$ .

Soit  $c$  un nombre réel  $> R$  tel que  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbf{R}^n$  n'appartenant pas au cube  $[-c, c]^n$ .

Définissons une fonction  $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  par

$$g(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} f(y, x_2, \dots, x_n) dy = \int_{-c}^{x_1} f(y, x_2, \dots, x_n) dy.$$

Elle est différentiable par rapport à  $x_1$ , et

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = f;$$

par dérivation sous le signe somme, elle est aussi différentiable par rapport aux autres variables  $x_2, \dots, x_n$ . De plus, ces dérivées partielles sont continues, si bien que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . En outre, s'il existe  $j \in \{2, \dots, n\}$  tel que  $|x_j| \geq c$ , alors  $g(x) = 0$ ; de plus, si  $x_1 \leq -c$ , alors  $g(x) = 0$ .

Notons  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  les coordonnées de  $\varphi$ . Comme  $g$  est  $\mathcal{C}^1$ , on peut écrire

$$D(g \circ \varphi)(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(\varphi(x)) D\varphi_j(x).$$

Par suite, la multi-linéarité du déterminant entraîne

$$\begin{aligned} \det(D(g \circ \varphi)(x), D\varphi_2(x), \dots, D\varphi_n(x)) &= \sum_{j=1}^n \det(\partial_j g(\varphi(x)) D\varphi_j(x), D\varphi_2(x), \dots, D\varphi_n(x)) \\ &= \det(\partial_1 g(\varphi(x)) D\varphi_1(x), D\varphi_2(x), \dots, D\varphi_n(x)) \\ &= f(\varphi(x)) \det(D\varphi_1(x), D\varphi_2(x), \dots, D\varphi_n(x)) \end{aligned}$$

puisque si  $j \geq 2$ , dans le déterminant du  $j$ -ième terme de cette somme, la première colonne est multiple de celle d'indice  $j$ , tandis que pour  $j = 1$ , toute la ligne est multiple de  $\partial_1 g(\varphi(x)) = f(\varphi(x))$ . Par suite,

$$(2.3.5) \quad f(\varphi(x)) \det(D\varphi(x)) = \det(D(g \circ \varphi)(x), D\varphi_2(x), \dots, D\varphi_n(x))$$

pour tout  $x \in \mathbf{R}^n$ .

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} f(\varphi(x)) \det(D\varphi(x)) dx &= \int_{[-c, c]^n} f(\varphi(x)) \det(D\varphi(x)) dx \\ &= \int_{[-c, c]^n} \det(D(g \circ \varphi)(x), D\varphi_2(x), \dots, D\varphi_n(x)) dx. \end{aligned}$$

Développons le déterminant par rapport à la première colonne. Avec les mêmes notations qu'avant, on a donc

$$\det(D(g \circ \varphi)(x), D\varphi_2(x), \dots, D\varphi_n(x)) = \sum_{k=1}^n \partial_k (g \circ \varphi)(x) M_k(x),$$

de sorte que

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(\varphi(x)) \det(D\varphi(x)) dx = \sum_{k=1}^n \int_{[-c, c]^n} \partial_k (g \circ \varphi)(x) M_k(x) dx.$$

Intégrons par parties par rapport à la variable  $x_k$  dans l'intégrale correspondant au  $k$ -ième terme de la somme : cela donne

$$\begin{aligned} \int_{-c}^c \partial_k (g \circ \varphi)(x) M_k(x) dx_k &= g(\varphi(x_1, \dots, x_{k-1}, c, x_{k+1}, \dots, x_n)) M_k(x_1, \dots, x_{k-1}, c, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ &\quad - g(\varphi(x_1, \dots, x_{k-1}, -c, x_{k+1}, \dots, x_n)) M_k(x_1, \dots, x_{k-1}, -c, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ &\quad - \int_{-c}^c g \circ \varphi(x) \partial_k M_k(x) dx_k. \end{aligned}$$

En outre, si  $k \geq 2$ , le terme intégré s'annule. Si  $k = 1$  seul subsiste celui où  $x_1 = c$ . On a en effet  $\varphi(x_1, \dots, x_{k-1}, \pm c, x_{k+1}, \dots, x_n) = \pm c$ , donc  $g(\varphi(x_1, \dots, x_{k-1}, \pm c, x_{k+1}, \dots, x_n))$

vaut 0 si  $k \geq 2$  ou si  $k = 1$  dans le cas  $-c$ . En outre,

$$g(c, x_2, \dots, x_n) = \int_{-c}^c f(y, x_2, \dots, x_n) dy$$

et  $M_1(c, x_2, \dots, x_n) = 1$ . Ainsi,

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(\varphi(x)) \det(D\varphi(x)) dx = \int_{[-c, c]^{n-1}} g(c, x_2, \dots, x_n) dx - \int_{[-c, c]^n} g \circ \varphi(x) \left( \sum_{k=1}^n \partial_k M_k(x) \right) dx.$$

D'après le lemme 2.3.4, la seconde intégrale est nulle ; la première vaut

$$\int_{[-c, c]^n} f(x_1, \dots, x_n) dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx.$$

Cela conclut la preuve du théorème 2.3.1. □

### § 2.4. Deux théorèmes de Brouwer

On commence par énoncer un corollaire du théorème 2.3.1.

**PROPOSITION 2.4.1.** — *Soit  $\varphi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application continue. On suppose qu'il existe  $R \in \mathbf{R}$  tel que  $\varphi(x) = x$  si  $\|x\| \geq R$ . Alors,  $\varphi$  est surjective.*

*Démonstration.* — L'image de  $\varphi$  est fermée, car c'est la réunion de l'image (compacte) de la boule  $B_R$  de rayon  $R$  et du complémentaire (fermé) de la boule ouverte  $B_R^\circ$ .

Supposons que  $\varphi$  soit de classe  $\mathcal{C}^1$ . Par suite, si  $x_0$  n'appartient pas à l'image de  $\varphi$ , il existe un voisinage  $V$  de  $\varphi$  qui est disjoint de  $\varphi(\mathbf{R}^n)$ . Soit alors  $f$  une fonction continue, positive ou nulle, telle que  $f(x_0) > 0$ , et dont le support est contenu dans  $V$ . On a  $f \circ \varphi = 0$ . En outre,  $\|x_0\| < R$ .

Comme  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , on peut utiliser le théorème 2.3.1. On a alors

$$\int_{\mathbf{R}^n} f \circ \varphi(x) \det(D\varphi(x)) dx = 0,$$

donc  $\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx = 0$ . Mais cela contredit l'hypothèse que  $f$  est continue, positive ou nulle mais pas identiquement nulle.

Dans le cas général, on approche uniformément  $\varphi$  par une famille  $(\varphi_t)$  d'applications de classe  $\mathcal{C}^1$  vérifiant les hypothèses du théorème 2.3.1, par exemple de la forme  $\varphi_t = \rho_t * \varphi$  comme dans le lemme 2.3.3. Pour tout  $t$ , il existe  $y_t \in \mathbf{R}^n$  tel que  $\varphi_t(y_t) = x_0$ . Comme  $\|x_0\| < R$  et  $\varphi_t(y) = y$  pour  $\|y\| > R + 1$ , on a  $\|y_t\| \leq R + 1$  aussi. Quant  $t \rightarrow \infty$ ,  $\varphi_t$  tend uniformément vers  $\varphi$ , et  $(y_t)$  admet une valeur d'adhérence  $y_0$ . On a donc  $\varphi(y_0) = x_0$ , ce qui prouve que  $\varphi$  est surjective. □

**COROLLAIRE 2.4.2** (Théorème de non-rétraction). — *Il n'existe pas d'application continue  $f: \mathbf{B}_n \rightarrow \mathbf{S}_{n-1}$  telle que  $f(x) = x$  pour tout  $x \in \mathbf{S}_{n-1}$ .*

*Démonstration.* — Raisonnons par l'absurde et considérons une telle application. Définissons une application  $\varphi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  en posant  $\varphi(x) = f(x)$  si  $\|x\| \leq 1$  et  $\varphi(x) = x$  si  $\|x\| > 1$ . Elle est continue car sa restriction à  $\mathbf{B}_n$  est continue, de même que sa restriction au complémentaire de la boule unité ouverte où l'on a  $\varphi(x) = x$  pour tout  $x$ . D'après la proposition précédente,  $\varphi$  est surjective. Mais par construction, aucun point de la boule unité ouverte n'a d'antécédent par  $\varphi$ .  $\square$

THÉORÈME 2.4.3 (Théorème du point fixe de Brouwer). — *Soit  $f: \mathbf{B}_n \rightarrow \mathbf{B}_n$  une application continue. Il existe  $x \in \mathbf{B}_n$  tel que  $f(x) = x$ .*

*Démonstration.* — Raisonnons par l'absurde en supposant que  $f$  n'ait pas de point fixe. Pour tout  $x \in \mathbf{B}_n$ , la demi-droite d'origine  $x$  passant par  $f(x)$  coupe  $\mathbf{S}_{n-1}$  en un unique point  $g(x)$ . On calcule  $g(x)$  en posant  $g(x) = x + t(x)(f(x) - x)$ , où  $t(x)$  est l'unique racine  $\geq 0$  de l'équation  $\|g(x)\|^2 = 1$ . Précisément,

$$t(x)^2 \|f(x) - x\|^2 + 2t(x)\langle x, f(x) - x \rangle + \|x\|^2 - 1$$

donne

$$t(x) = \frac{-\langle x, f(x) - x \rangle + \sqrt{\langle x, f(x) - x \rangle^2 + (1 - \|x\|^2) \|f(x) - x\|^2}}{\|f(x) - x\|^2}.$$

L'application  $x \mapsto t(x)$  est continue, donc  $g$  est continue aussi. Par construction,  $g$  est une application continue de  $\mathbf{B}_n$  dans  $\mathbf{S}_{n-1}$  telle que  $g(x) = x$  pour  $x \in \mathbf{S}_{n-1}$ , ce qui contredit le théorème de non-rétraction.  $\square$

COROLLAIRE 2.4.4. — *Soit  $f: \mathbf{B}_n \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application continue telle que  $\langle f(x), x \rangle \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbf{S}_{n-1}$ . Alors il existe  $x \in \mathbf{B}_n$  tel que  $f(x) = 0$ .*

*Démonstration.* — On commence par supposer qu'il existe  $m > 0$  tel que  $\langle f(x), x \rangle > m$  pour tout  $x \in \mathbf{S}_{n-1}$ . Soit  $M$  un majorant de  $\|f(x)\|$  pour  $x \in \mathbf{B}_n$ . On va montrer que pour  $\varepsilon > 0$  assez petit,  $g(x) = x - \varepsilon f(x)$  appartient à la boule unité, pour tout  $x \in \mathbf{B}_n$ . Comme  $f$  est continue et la sphère  $\mathbf{S}_{n-1}$  compacte, il existe un nombre réel  $r$  tel que  $0 < r < 1$  et tel que  $\langle f(x), x \rangle \geq m/2$  pour tout  $x \in \mathbf{B}_n$  tel que  $\|x\| \geq r$ . Pour  $x \in \mathbf{B}_n$  tel que  $\|x\| \geq r$ , on a donc

$$\|g(x)\|^2 = \|x\|^2 - 2\varepsilon\langle x, f(x) \rangle + \varepsilon^2 \|f(x)\|^2 \leq 1 - \varepsilon m + \varepsilon^2 M^2;$$

on en déduit que  $\|g(x)\| \leq 1$  dès que  $\varepsilon < m/M^2$  et  $\|x\| \geq r$ . D'autre part, si  $x \in \mathbf{B}_n$  et  $\|x\| \leq r$ , alors  $\|g(x)\| \leq r + \varepsilon M$ , d'où  $\|g(x)\| \leq 1$  si  $\varepsilon \leq (1 - r)/M$ . Ceci montre que si  $\varepsilon < \min(m/M^2, (1 - r)/M)$ , alors  $g$  applique la boule  $\mathbf{B}_n$  dans elle-même. Alors,  $g$  est justiciable du théorème du point fixe de Brouwer, donc il existe  $x \in \mathbf{B}_n$  tel que  $g(x) = x$ , d'où  $f(x) = 0$ .

Pour traiter le cas général, on remplace  $f$  par la fonction  $x \mapsto f(x) + mx$ , où  $m > 0$  est arbitrairement petit. Il existe alors  $x_m \in \mathbf{B}_n$  tel que  $f(x_m) + mx_m = 0$ . Lorsque  $m \rightarrow 0$ , la famille  $(x_m)_{m>0}$  a une valeur d'adhérence  $x$  et  $f(x) = 0$ .  $\square$

THÉORÈME 2.4.5 (Théorème d'invariance du domaine). — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  et soit  $f: U \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application continue injective. Alors  $f(U)$  est ouvert dans  $\mathbf{R}^n$ .

*Démonstration, d'après Kulpa (1998).* — Soit  $a \in U$ . Il s'agit de prouver que  $f(U)$  est un voisinage de  $f(a)$  dans  $\mathbf{R}^n$ . Quitte à composer  $f$  avec une translation et une homothétie, on se ramène à prouver que si  $f: \mathbf{B}_n \rightarrow \mathbf{R}^n$  est continue,  $f(\mathbf{B}_n)$  est voisinage de  $f(0)$ . Supposons par l'absurde que  $f(0)$  appartienne au bord de  $f(\mathbf{B}_n)$ .

Comme  $\mathbf{B}_n$  est compact,  $f$  définit un homéomorphisme de  $\mathbf{B}_n$  sur son image. Notant  $b = f(0)$ , il existe donc  $\delta > 0$  tel que  $f^{-1}(B(b, 2\delta)) \subset \mathbf{B}_n^\circ$ . Puisque l'on a supposé que  $b$  n'est pas intérieur à  $f(\mathbf{B}_n)$ , il existe  $c \in B^\circ(b, \delta)$  tel que  $c \notin f(\mathbf{B}_n)$ . Alors,  $b \in B^\circ(c, \delta)$ , donc  $B^\circ(c, \delta) \subset B^\circ(b, 2\delta)$  et  $f^{-1}(B^\circ(c, \delta)) \subset \mathbf{B}_n^\circ$ .

Soit  $X = f(\mathbf{B}_n) \setminus B^\circ(c, \delta)$ , soit  $S = S(c, \delta)$  (la sphère de centre  $c$  et rayon  $\delta$ ) et posons  $Y = X \cup S$ . Observons que  $f^{-1}(x) \neq 0$  pour tout  $x \in X$ , car  $f(0) = b \in B^\circ(c, \delta)$ . D'après le lemme 2.4.6, il existe une application continue  $g: X \cup S \rightarrow \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  telle que  $\|g(x) - f^{-1}(x)\| < 1$  pour tout  $x \in X$ .

Soit  $r: \mathbf{R}^n \setminus \{c\} \rightarrow \mathbf{R}^n$  l'application définie par

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin B^\circ(c, \delta) \\ c + \delta \frac{x - c}{\|x - c\|} & \text{si } x \in B^\circ(c, \delta). \end{cases}$$

Elle est continue et c'est une rétraction de  $\mathbf{R}^n \setminus \{c\}$  sur le complémentaire de  $B^\circ(c, \delta)$ .

Pour  $x \in \mathbf{B}_n$ , on a  $f(x) \neq c$ , donc  $r(f(x))$  est défini; de plus, soit  $\|f(x) - c\| \geq \delta$  et  $r(f(x)) = f(x)$ , soit  $\|f(x) - c\| \leq \delta$  auquel cas  $r(f(x)) \in S$ . Cela prouve que l'application  $r \circ f$  est bien définie sur  $\mathbf{B}_n$  et prend ses valeurs dans  $X \cup S$ . On définit donc une application de  $\mathbf{B}_n$  dans  $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  par  $F(x) = g(r(f(x)))$  pour  $x \in \mathbf{B}_n$ .

Si  $x \in \mathbf{S}_n$ , alors  $f(x) \notin B^\circ(c, \delta)$ , donc  $\|f(x) - c\| \geq \delta$ ; alors  $f(x) \in X$  et  $r(f(x)) = f(x)$ ; ainsi  $\|F(x) - x\| < 1$ . Par suite pour tout  $x \in \mathbf{S}_n$ , on a

$$\langle F(x), x \rangle = \langle x, x \rangle + \langle F(x) - x, x \rangle \geq 0.$$

D'après le corollaire 2.4.4, il existe  $x \in \mathbf{B}_n$  tel que  $F(x) = 0$ , ce qui contredit l'hypothèse que  $F = g \circ r \circ f$  et que  $g$  ne s'annule pas.  $\square$

LEMME 2.4.6. — Soit  $X$  une partie compacte de  $\mathbf{R}^n$ , soit  $B$  une boule fermée et  $S$  son bord. Soit  $f: X \rightarrow \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  une application continue. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une application continue  $F: (X \cup S) \rightarrow \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  telle que  $\|F(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$  pour tout  $x \in X$ .

*Démonstration.* — Soit  $m > 0$  un nombre réel tel que  $m < \varepsilon$  et  $\|f(x)\| \geq m$  pour  $x \in X$ . On approche  $f$  uniformément sur  $X$  par une application  $f_1: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , par exemple un polynôme, de sorte que  $\|f(x) - f_1(x)\| \leq m/2$  pour tout  $x \in X$ . Alors,  $\|f_1(x)\| \geq m/2$  pour  $x \in X$ . De plus,  $f_1(S)$  est de mesure nulle (théorème de Sard, théorème 4.4.3 qu'on démontrera plus tard). En particulier,  $f_1(S)$  ne contient aucune boule

ouverte de centre 0 et il existe  $y \in \mathbf{R}^n$  tel que  $\|y\| < m/2$  et  $y \notin f_1(S)$ . Alors, la fonction  $F: x \mapsto f_1(x) - y$  de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^n$  est continue, applique  $X \cup S$  dans  $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ , et vérifie  $\|F(x) - f(x)\| < m \leq \varepsilon$  pour tout  $x \in X$ .  $\square$

**COROLLAIRE 2.4.7.** — *Si un ouvert non vide de  $\mathbf{R}^n$  est homéomorphe à une partie de  $\mathbf{R}^m$ , alors  $m \geq n$ .*

*Démonstration.* — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  et soit  $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$  une application continue qui induise un homéomorphisme de  $U$  sur son image. Supposons par l'absurde que  $m < n$ . L'application  $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x), 0, \dots, 0)$  de  $U$  dans  $\mathbf{R}^n$  est continue, injective, mais son image n'est pas ouverte, contradiction.  $\square$

**COROLLAIRE 2.4.8.** — *Si  $\mathbf{R}^n$  est homéomorphe à  $\mathbf{R}^m$ , alors  $n = m$ .*

**COROLLAIRE 2.4.9.** — *Soit  $A, B$  des parties de  $\mathbf{R}^n$  et soit  $f: A \rightarrow B$  un homéomorphisme. Alors  $f(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{B}$ .*

*Démonstration.* — Comme  $\overset{\circ}{A}$  est ouvert dans  $\mathbf{R}^n$ ,  $f(\overset{\circ}{A})$  est ouvert et contenu dans  $B$ , donc contenu dans  $\overset{\circ}{B}$ . En considérant l'homéomorphisme réciproque de  $f$ , on prouve de même que  $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{A}$ . Comme  $f(A) = B$ , on en déduit que  $\overset{\circ}{B} \subset f(\overset{\circ}{A})$ , d'où finalement l'égalité.  $\square$

**COROLLAIRE 2.4.10.** — *La sphère  $\mathbf{S}_n$  n'est homéomorphe à aucune partie de  $\mathbf{R}^n$ .*

*Démonstration.* — Soit  $f: \mathbf{S}_n \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application continue qui induit un homéomorphisme de  $\mathbf{S}_n$  sur son image. Comme  $\mathbf{S}_n$  est compact,  $f(\mathbf{S}_n)$  aussi. Démontrons que  $f(\mathbf{S}_n)$  est ouverte. Comme  $\mathbf{R}^n$  est connexe, il en résultera une contradiction.

Pour cela, on fixe un point  $a$  de  $\mathbf{S}_n$ , on considère l'hémisphère  $\mathbf{S}_n^+$  formé des points  $x \in \mathbf{S}_n$  tels que  $\langle a, x \rangle > 0$ . Observons que  $\mathbf{S}_n^+$  est homéomorphe à  $\mathbf{B}_n^\circ$ . On déduit de  $f$  une application continue injective  $g_a$  de  $\mathbf{B}_n^\circ$  dans  $\mathbf{R}^n$  telle que  $g_a(0) = f(a)$ . D'après le théorème d'invariance du domaine,  $g_a(\mathbf{B}_n^\circ)$  est voisinage de  $f(a)$ . A fortiori,  $f(\mathbf{S}_n)$  est voisinage de  $f(a)$ .  $\square$

## § 2.5. Variétés topologiques

**DÉFINITION 2.5.1.** — *Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est une variété topologique si pour tout point  $x$  de  $X$ , il existe un entier  $n \geq 0$  et un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $X$  qui est homéomorphe à un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ .*

Soit  $X$  une variété topologique. Soit  $x$  un point de  $X$ , soit  $n$  un entier naturel et soit  $U$  un voisinage ouvert de  $x$  dans  $X$  qui est homéomorphe à un ouvert  $V$  de  $\mathbf{R}^n$ . Alors,  $U$  n'est homéomorphe à aucun ouvert de  $\mathbf{R}^m$ , pour  $m \neq n$ . Il est donc licite d'appeler  $n$  la *dimension* de  $X$  en  $x$ ; on la note  $\dim_x(X)$ . Avec ces notations, tout point  $y$  de  $U$  possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , par exemple  $U$  lui-même. En



particulier,  $\dim_y(X) = n$  pour tout  $y \in U$ . Cela démontre que l'application  $x \mapsto \dim_x(X)$  est localement constante.

En particulier, si  $X$  est connexe, l'application  $x \mapsto \dim_x(X)$  est constante. Si  $X$  n'est pas vide, on dira que  $X$  est de dimension  $n$  si elle est de dimension  $n$  en chacun de ses points.

**DÉFINITION 2.5.2.** — Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est une variété topologique à bord si pour tout point  $x$  de  $X$ , il existe un entier  $n \geq 0$  et un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $X$  qui est homéomorphe à un ouvert de  $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{n-1}$ .

Pour simplifier les notations, on notera  $\mathbf{H}_n = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{n-1}$ ,  $\mathbf{H}_n^0 = \{0\} \times \mathbf{R}^{n-1}$  et  $\mathbf{H}_n^* = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^{n-1}$ . Lorsque  $n = 0$ ,  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0^*$  est un point, et  $\mathbf{H}_0^0$  est vide.

Soit  $X$  une variété topologique à bord. Soit  $x$  un point de  $X$ , soit  $n$  un entier naturel et soit  $U$  un voisinage ouvert de  $x$  dans  $X$  qui est homéomorphe à un ouvert de  $\mathbf{H}_n$ . Soit  $f$  un tel homéomorphisme et soit  $V = f(U)$ . Si  $f(x) \in \mathbf{H}_n^*$ , alors  $x$  possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , par exemple  $f^{-1}(\mathbf{H}_n^*)$ . Dans ce cas, on dit que  $x$  est intérieur. On constate aussi que si  $m \neq n$ , aucun voisinage de  $x$  n'est homéomorphe à un ouvert de  $\mathbf{R}^m$ , ni même de  $\mathbf{H}_m$ . On pose donc sans ambiguïté  $\dim_x(X) = n$  dans ce cas. Les points intérieurs forment un ouvert de  $X$  qui est une variété topologique ; en tout point de  $\text{Int}(X) \cap U$ ,  $\text{Int}(X)$  est de dimension  $n$ . En outre,  $\text{Int}(X)$  est adhérent à  $x$ . Par suite, on peut poser sans ambiguïté  $\dim_x(X) = n$ .

Si  $f(x) \in \mathbf{H}_n^0$ , démontrons qu'aucun voisinage de  $x$  n'est homéomorphe à un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ . Quitte à restreindre  $U$ , on peut supposer que  $g: U \rightarrow \mathbf{R}^n$  est un homéomorphisme de  $U$  sur un ouvert  $W$  de  $\mathbf{R}^n$ . Alors,  $f \circ g^{-1}: W \rightarrow V$  est un homéomorphisme. Par le théorème d'invariance du domaine,  $f \circ g^{-1}$  applique l'intérieur de  $W$  dans  $\mathbf{R}^n$  (à savoir  $W$ , car  $W$  est ouvert) sur l'intérieur de  $V$  dans  $\mathbf{R}^n$ . Mais  $f(x)$  n'appartient pas à l'intérieur de  $V$ , contradiction. Dans ce cas, on dit que  $x$  appartient au *bord* de  $X$ , que l'on note  $\partial(X)$ .

Remarquons que  $\partial(X) \cap U$  est l'image réciproque par  $f$  de  $\mathbf{H}_n^0 \cap V$ . Elle est d'une part fermée dans  $U$ , et d'autre part homéomorphe à un ouvert de  $\mathbf{R}^{n-1}$ . Il en résulte que  $\partial(X)$  est fermée dans  $X$ , et est une variété topologique ; en  $x \in \partial(X)$ ,  $\dim_x(\partial(X)) = \dim_x(X) - 1$ .

**Exercice 2.5.3.** — Soit  $X$  une variété topologique à bord. Si  $X$  est connexe, alors  $\text{Int}(X)$  est connexe.

(Soit  $f: \text{Int}(X) \rightarrow \{0, 1\}$  une application continue. Montrons que l'on peut prolonger  $f$  en une application continue de  $X$  dans  $\{0, 1\}$ . Soit  $x \in \partial(X)$  et soit  $U$  un voisinage de  $x$  dans  $X$  qui est homéomorphe à l'intersection d'une boule  $B$  de  $\mathbf{R}^n$  avec  $\mathbf{H}_n$ . Comme  $B$ ,  $\mathbf{H}_n$  et  $\mathbf{H}_n^*$  sont convexes, il en est de même de  $B \cap \mathbf{H}_n$ , et de  $B \cap \mathbf{H}_n^*$ . En particulier,  $U \cap \text{Int}(X)$  est connexe et  $f$  est constante sur  $U \cap \text{Int}(X)$ . Elle se prolonge donc de manière unique en une application continue au voisinage de  $x$ .)

*Remarques 2.5.4.* — a) Une variété topologique (à bord) hérite de nombreuses propriétés topologique de l'espace  $\mathbf{R}^n$  ou de l'espace  $\mathbf{H}_n$ . En particulier, une variété topologique (à bord) est localement connexe par arcs et localement compacte.

b) En pratique, il est nécessaire d'imposer en outre des hypothèses de nature *globale* sur une variété topologique  $X$ . L'hypothèse la plus courante est que sa topologie soit de type dénombrable, c'est-à-dire qu'il existe une suite d'ouverts  $(U_n)_{n \geq 0}$  telle que tout ouvert de  $X$  soit réunion d'une partie d'entre eux. Cela interdit des objets un peu étranges comme la « longue droite », et est nécessaire pour pouvoir construire des partitions de l'unité sur une variété.

On exige aussi que  $X$  soit *séparé*, c'est-à-dire que deux points distincts quelconques possèdent des voisinages disjoints. Si  $x$  et  $y$  sont des points de  $X$  possédant un voisinage commun  $U$  homéomorphe à un ouvert  $V$  de  $\mathbf{R}^n$ , alors  $x$  et  $y$  ont des voisinages disjoints, par exemple les images réciproques de boules dans  $V$  centrées en les images de  $x$  et  $y$ . Mais il est fort possible que deux points  $x$  et  $y$  étant donnés, on ne puisse trouver un tel voisinage. Par exemple, la droite dont l'origine est dédoublée est un tel espace : La réunion de  $\mathbf{R}^*$  et de deux points  $0^+$  et  $0^-$ , où la topologie est telle que les ensembles  $\{0^+\} \cup (]-a, a[ \cap \mathbf{R}^*)$  forment une base de voisinages de  $0^+$ , et de même pour  $0^-$ . Dans ce cas,  $0^+$  et  $0^-$  n'ont pas de voisinages disjoints.

c) Pour un espace  $X$  localement homéomorphe à un ouvert d'un espace  $\mathbf{H}_n$ , les conditions que la topologie soit séparée et de type dénombrable peuvent se reformuler de façon un peu plus parlante : elle équivaut à ce que  $X$  soit *métrisable* (sa topologie peut être définie par une distance) et réunion dénombrable de partie compactes (*dénombrable à l'infini*).

Pour résumer : lorsqu'on supposera qu'une variété topologique  $X$  est métrisable et séparable, sa topologie sera séparée, de type dénombrable, et  $X$  sera réunion dénombrable de parties compactes.

d) Supposons que la variété topologique  $X$  est métrisable et connexe et prouvons qu'elle est réunion dénombrable de partie compactes. Comme  $X$  est localement compact, on peut considérer un recouvrement  $(U_j)_{j \in J}$  de  $X$  par des parties ouvertes dont les adhérences sont compactes. Soit  $(f_j)_{j \in J}$  une partition continue de l'unité subordonnée au recouvrement  $(U_j)$  (théorème 4.2.2). Pour tout  $j$ , soit  $U_j$  l'ensemble des points de  $V_j$  tels que  $f_j(x) > 0$ ; c'est un ouvert de  $X$  dont l'adhérence, contenue dans  $\overline{V_j}$ , est compacte dans  $X$ . Soit alors  $I$  l'ensemble des  $i \in J$  tels que  $f_i \neq 0$ . La famille  $(U_i)_{i \in I}$  est un recouvrement localement fini de  $X$  par des parties ouvertes et d'adhérences compactes.

Notons alors  $\sim$  la relation d'équivalence la moins fine sur  $X$  telle que  $x \sim y$  s'il existe  $i \in I$  tel que  $\{x, y\} \subset U_i$ .

Démontrons que pour tout  $x \in X$ , la classe d'équivalence  $U(x)$  de  $x$  est la réunion d'une sous-famille *dénombrable* d'ensembles  $U_i$ . Fixons un point  $x \in X$  et construisons comme suit une suite croissante  $(I_n)$  de parties finies de  $I$ . On prend pour  $I_0$  l'ensemble

fini des  $i \in I$  tels que  $x_0 \in U_i$ ; si  $I_n$  est défini, on prend pour ensemble  $I_{n+1}$  celui des indices  $i \in I$  tels que  $U_i$  rencontre  $\bigcup_{j \in I_n} U_j$ . Comme la réunion  $K_n$  des parties  $\overline{U_j}$ , pour  $j \in I_n$ , est compacte dans  $X$ , l'ensemble des indices  $i \in I$  tels que  $U_i$  rencontre  $K_n$  est fini. A fortiori,  $I_{n+1}$  est fini. La réunion  $I(x)$  des parties  $I_n$ , pour  $n \in \mathbf{N}$ , est donc dénombrable et la classe d'équivalence de  $x$  est la réunion des  $U_i$ , pour  $i \in I(x)$ .

Les classes d'équivalence de cette relation  $\sim$  forment une partition de  $X$  en parties ouvertes. Puisque  $X$  est connexe,  $U(x) = X$  pour tout  $x \in X$ . Par conséquent,  $X$  est aussi la réunion des  $\overline{U_i}$ , pour  $i \in I(x)$ , donc est dénombrable à l'infini.

*Exemple 2.5.5* (La sphère de dimension  $n$ ). — Démontrons que *la sphère de dimension  $n$  dans  $\mathbf{R}^{n+1}$  est une variété topologique de dimension  $n$ , de bord vide.*

Soit  $N = (0, \dots, 0, 1)$  le pôle nord. Le plan  $\Pi$  de l'équateur est l'hyperplan d'équation  $x_{n+1} = 0$ . La *projection stéréographique*  $p_N: \mathbf{S}_n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbf{R}^n$  applique un point  $A \in \mathbf{S}_n$  distinct de  $N$  sur le point d'intersection de la droite  $(NA)$  avec le plan de l'équateur. Écrivons les formules : Si  $A = (a_1, \dots, a_{n+1})$ , la droite  $(NA)$  est paramétrée par

$$x_1 = a_1 t, \quad x_n = a_n t, \quad x_{n+1} = 1 + (a_{n+1} - 1)t.$$

Le point d'intersection de cette droite avec le plan  $\Pi$  est donné par  $t = 1/(1 - a_{n+1})$  (comme  $A \neq N$ ,  $a_{n+1} \neq 1$ ). D'où les formules

$$p_N(a_1, \dots, a_{n+1}) = \left( \frac{a_1}{1 - a_{n+1}}, \dots, \frac{a_n}{1 - a_{n+1}}, 0 \right).$$

On voit que  $p_N$  est continue. Géométriquement, elle est bijective : si  $B$  est un point de  $\Pi$ , la droite  $(NB)$  coupe la sphère en deux points, le point  $N$  et un second point qui est l'unique antécédent de  $B$  par  $p_N$ . Faisons le calcul. Si  $p_N(x_1, x_{n+1}) = (b_1, \dots, b_n, 0)$ , on obtient  $x_i = b_i(1 - x_{n+1})$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Alors,  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \|b\|^2(1 - x_{n+1})^2$ , donc  $1 = \|x\|^2 = \|b\|^2(1 - x_{n+1})^2 + x_{n+1}^2$ . C'est une équation du second degré en  $x_{n+1}$ , mais  $x_{n+1} = 1$  est racine. Si on factorise par  $1 - x_{n+1}$ , on obtient

$$1 + x_{n+1} = \|b\|^2(1 - x_{n+1}),$$

d'où

$$x_{n+1} = \frac{\|b\|^2 - 1}{\|b\|^2 + 1}$$

et

$$1 - x_{n+1} = \frac{2}{\|b\|^2 + 1}.$$

Ainsi,

$$p_N^{-1}(b_1, \dots, b_n, 0) = \left( \frac{2b_1}{\|b\|^2 + 1}, \dots, \frac{2b_n}{\|b\|^2 + 1}, \frac{\|b\|^2 - 1}{\|b\|^2 + 1} \right).$$

La réciproque de  $p_N$  est manifestement continue, si bien que  $\mathbf{S}_n \setminus \{N\}$  est homéomorphe à  $\mathbf{R}^n$ .

En raisonnant à partir d'un autre point (par exemple le pôle sud), on conclut que  $\mathbf{S}_n$  est une variété topologique de dimension  $n$ .

*Exemple 2.5.6* (La boule unité de  $\mathbf{R}^n$ ). — La boule unité  $\mathbf{B}_n$  de  $\mathbf{R}^n$  est une variété topologique à bord de dimension  $n$ . Son bord est la sphère  $\mathbf{S}_{n-1}$ .

Pour cela, on fixe un point de  $\mathbf{B}_n$ , par exemple le pôle sud  $S = (0, \dots, 0, -1)$  et on effectue une inversion de centre  $S$ . Cette inversion applique un point  $M \neq S$  sur le point  $M'$  de la demi-droite  $[SM)$  tel que  $\overline{SM} \cdot \overline{SM'} = 1$ . Écrivons les formules : si  $M = (a_1, \dots, a_n) = (a', a_n)$ ,

$$\begin{aligned} M' &= S + \frac{1}{\|SM\|^2}(M - S) \\ &= (0, \dots, 0, -1) + (\|a'\|^2 + (1 + a_n)^2)^{-1}(a', a_n + 1) \\ &= \left( \frac{a'}{\|a'\|^2 + (1 + a_n)^2}, \frac{a_n + 1}{\|a'\|^2 + (1 + a_n)^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Si  $M \in \mathbf{S}_n$ ,  $\|a'\|^2 + a_n^2 = 1$ , et la dernière coordonnée de  $M'$  est égale à

$$\frac{a_n + 1}{1 - a_n^2 + (1 + a_n)^2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Si  $M \in \mathbf{B}_n$ ,  $\|a'\|^2 + a_n^2 \leq 1$ , et on voit de même que le point  $M'$  appartient au demi-espace  $H$  défini par l'inégalité  $x_n \geq -1/2$ . Inversement, si  $M' \in H$ ,

$$2(a_n + 1) \geq \|a'\|^2 + (1 + a_n)^2,$$

d'où

$$\|a'\|^2 + a_n^2 \leq 1,$$

c'est-à-dire  $M \in \mathbf{B}_n$ .

Cela prouve que  $\mathbf{B}_n \setminus \{S\}$  est une variété à bord, et que son bord est  $\mathbf{S}_{n-1} \setminus \{S\}$ . En partant d'un autre point, on obtient le résultat voulu.

*Exemple 2.5.7.* — La réunion  $X$  des deux axes de coordonnées dans  $\mathbf{R}^2$  n'est pas une variété à bord.

Observons que tout point de  $X$  autre que l'origine a un voisinage homéomorphe à un intervalle. En particulier,  $X^* = X \setminus \{O\}$  est une variété topologique de dimension 1. C'est l'origine qui pose problème : pour tout voisinage  $U$  de  $O$  dans  $X$ ,  $U \setminus \{O\}$  a au moins quatre composantes connexes. Par suite,  $O$  n'a pas de voisinage dans  $X$  qui soit homéomorphe à un intervalle puisque le complémentaire d'un point dans un intervalle a au plus deux composantes connexes.

*Exemple 2.5.8.* — Le quadrant positif  $\{x \geq 0\} \cap \{y \geq 0\}$  dans  $\mathbf{R}^2$  est une variété topologique à bord.

Considérons en effet l'application  $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ . En posant  $z = x + iy$ , elle s'écrit  $z \mapsto z^2$ , et on voit bien que c'est un homéomorphisme du quadrant positif sur le demi-espace  $\Im(z) \geq 0$ .

C'est un exemple un peu bizarre car on verra que ce n'est pas une variété différentiable à bord.

*Exemple 2.5.9* (Recollement le long du bord). — Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variétés topologiques à bord (de dimension  $n$ ), soit  $u: \partial(X_1) \rightarrow \partial(X_2)$  un homéomorphisme. Soit  $X$  l'espace topologique obtenu en quotientant la réunion disjointe  $X_1 \sqcup X_2$  par la relation d'équivalence la plus fine qui identifie  $x \in X_1$  à  $u(x) \in X_2$ . Alors,  $X$  est une variété topologique (de dimension  $n$ ), sans bord. Elle contient le bord de la variété initiale comme fermé privilégié.

Si  $X_1 = X_2$  et  $u$  est l'identité, la variété obtenue est appelée le double de  $X_1$ . En particulier, lorsque  $X_1 = X_2 = \mathbf{B}_n$ , on obtient la sphère  $\mathbf{S}_n$ , avec l'équateur.

*Exercice 2.5.10.* — Supposons que  $X_1 = X_2 = \mathbf{R} \times [0, 1]$ . Alors,  $\partial(X_1) = \mathbf{R} \times \{0, 1\}$ , et il y a deux possibilités, suivant que l'homéomorphisme  $u: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  utilisé pour recoller les deux droites est croissant ou non.

a) Dans le cas où  $u$  est croissant, démontrer que l'espace  $X$  obtenu est homéomorphe à  $\mathbf{R} \times \mathbf{S}_1$  (un cylindre).

Démontrer qu'il existe une partie compacte  $K$  du cylindre  $X$  telle que pour toute partie compacte  $K'$  contenant  $K$ ,  $X \setminus K'$  ne soit pas connexe. (On peut prendre  $K = \{0\} \times \mathbf{S}_1$ .)

b) Si  $u$  est décroissant, démontrer que pour toute partie compacte  $K$  de  $X'$ , il existe une partie compacte  $K'$  de  $X'$  tel que  $X' \setminus K'$  est connexe. (Prouver qu'il existe  $a, b \in \mathbf{R}$  tels que  $K$  soit contenu dans l'image de la réunion de la partie  $[a, b] \times [0, 1]$  de  $X_1$  et de la partie  $[u(b), u(a)] \times [0, 1]$  de  $X_2$ .) L'espace  $X'$  est appelé *ruban de Möbius*.

c) En déduire que  $X$  et  $X'$  ne sont pas homéomorphes.

## § 2.6. Variétés topologiques de dimension 1

**THÉORÈME 2.6.1.** — *Soit  $X$  une variété topologique à bord de dimension 1, connexe et métrisable. Alors  $X$  est homéomorphe à  $[0, 1]$ ,  $\mathbf{S}_1$ ,  $\mathbf{R}_+$  ou  $\mathbf{R}$  et ces quatre espaces ne sont pas deux à deux homéomorphes.*



## CHAPITRE 3

### SOUS-VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

---

#### § 3.1. Théorème d'inversion locale et applications

Dans ce paragraphe, on rappelle les trois grands théorèmes du calcul différentiel : théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites et théorème du rang constant. Ces théorèmes nous permettront d'affirmer que de nombreux sous-espaces de  $\mathbf{R}^n$  sont des variétés topologiques. Ils seront plus tard à la base de la théorie des variétés différentiables.

**THÉORÈME 3.1.1** (Théorème d'inversion locale). — *Soit  $E$  et  $F$  des espaces de Banach, soit  $U$  un ouvert de  $E$ , soit  $f : U \rightarrow F$  une application de classe  $\mathcal{C}^p$ . Soit  $a$  un point de  $U$ , soit  $b = f(a)$ . Si  $Df(a)$  est un isomorphisme, il existe un voisinage  $V$  de  $a$  dans  $U$ , un voisinage  $W$  de  $b$  dans  $F$  tel que  $f$  induise un homéomorphisme de  $V$  sur  $W$ . En outre, l'application réciproque  $g : W \rightarrow V$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ .*

*Démonstration.* — Quitte à remplacer  $f$  par l'application  $x \mapsto Df(a)^{-1}(f(x+a) - b)$ , on suppose que  $E = F$ ,  $a = b = 0$  et  $Df(a) = \text{id}$ .

On doit prouver que pour  $y$  assez petit, l'équation  $f(x) = y$  a une seule solution petite, et que l'application  $y \mapsto x$  est continue. L'équation  $f(x) = y$  se réécrit  $x = F(x)$ , où  $F(x) = y - f(x) + x$ . Comme  $f$  est différentiable en 0, de différentielle l'identité, on a  $f(x) = x + o(\|x\|)$ . Soit  $\varepsilon$  un nombre réel tel que  $0 < \varepsilon < 1$ , soit  $r$  un nombre réel  $> 0$  tel que la boule fermée  $B_r$  de centre 0 et de rayon  $r$  soit contenue dans  $U$  et que l'on ait  $\|Df(x) - \text{id}\| < \varepsilon$  pour  $x \in B_r$ . Alors, pour  $x, x' \in B_r$ , l'inégalité des accroissements finis entraîne

$$\|f(x) - f(x') - (x - x')\| \leq \sup_{x'' \in [x, x']} \|Df(x'') - \text{id}\| \|x - x'\| \leq \varepsilon \|x - x'\|;$$

en particulier,

$$\|f(x) - x\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

Par suite, pour  $x \in B_r$ ,

$$\|F(x)\| = \|y - f(x) + x\| \leq \|y\| + \|f(x) - x\| \leq \|y\| + \varepsilon \|x\|.$$

Posons  $s = r(1 - \varepsilon)$ ; si  $\|y\| \leq s$ , on a donc  $F(x) \in B_r$ . De plus, pour  $x, x' \in B_r$ ,

$$\|F(x) - F(x')\| = \|y - f(x) + x - y + f(x') - x'\| = \|f(x) - f(x') - (x - x')\| \leq \varepsilon \|x - x'\|.$$

Autrement dit, l'application  $F$  applique  $B_r$  dans elle-même et est contractante. D'après le théorème du point fixe, elle possède un unique point fixe  $g(y)$  dans  $B_r$  et l'on a  $f(g(y)) = y + g(y) - F(g(y)) = y$ .

Pour démontrer que l'application  $g$  est continue, on applique ce raisonnement « à  $y$  variable »; autrement dit, on introduit l'espace  $\mathcal{C}$  des applications continues de  $B_s$  dans  $B_r$ , que l'on munit de la distance  $d(u, v) = \sup_y \|u(y) - v(y)\|$ . Pour  $u \in \mathcal{C}$ , on définit  $\Phi(u) \in \mathcal{C}$  par la formule  $\Phi(u)(y) = y - f(u(y)) + u(y)$ . Pour  $u, v \in \mathcal{C}$  et  $y \in B_s$ , on a

$$\|\Phi(u)(y) - \Phi(v)(y)\| \leq \varepsilon \|u(y) - v(y)\|,$$

donc  $d(\Phi(u), \Phi(v)) \leq \varepsilon d(u, v)$  et  $\Phi$  est contractante. Il existe donc une unique application  $u \in \mathcal{C}$  telle que  $\Phi(u) = u$ . Nécessairement,  $u(y) = g(y)$  pour tout  $y \in B_s$ , ce qui prouve que  $g$  est continue sur  $B_s$ .

Construisons maintenant des voisinages ouverts  $V$  et  $W$  de 0, respectivement contenus dans  $B_r$  et dans  $B_s$ , tels que  $f(V) = W$ ,  $g(W) = V$ ,  $g \circ f|_V = \text{id}_V$  et  $f \circ g|_W = \text{id}_W$ .

Soit  $W$  la boule ouverte de centre 0 et de rayon  $s$ ; c'est un ouvert de  $E$ . Posons  $V = f^{-1}(W) \cap B_r$ . Si  $x \in E$  vérifie  $\|x\| = r$ , alors  $\|f(x)\| \geq (1 - \varepsilon)\|x\| \geq s$ , donc  $f(x) \notin W$ ; cela entraîne que  $V = f^{-1}(W) \cap B_r^\circ$ ; en particulier,  $V$  est ouvert dans  $E$ . Par construction,  $f(V) \subset W$ ; mais comme  $f(B_r)$  contient  $W$ , on a  $f(V) = W$ . De plus, si  $y \in W$ , alors  $g(y) \in B_r$  vérifie  $f(g(y)) = y$ , donc  $g(y) \in V$ ; cela démontre que  $g(W) \subset V$  et  $f \circ g|_W = \text{id}_W$ . Enfin, si  $x \in V$ ,  $f(x) \in W$  et  $g(f(x)) = x$  puisque c'est l'unique élément de  $B_r$  d'image  $f(x)$  par  $f$ ; ainsi,  $g(W) = V$  et  $g \circ f|_V = \text{id}_V$ .

Démontrons que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $W$ . Soit  $y, y' \in W$ . Lorsque  $y'$  tend vers  $y$ , on a

$$y' - y = f(g(y')) - f(g(y)) = Df(g(y))(g(y') - g(y)) + o(\|g(y') - g(y)\|).$$

Pour  $y \in W$ ,  $g(y) \in V$  et  $Df(g(y))$  est inversible, si bien que

$$g(y') - g(y) = Df(g(y))^{-1}(y' - y) + o(\|g(y') - g(y)\|).$$

Cela entraîne que  $\|g(y') - g(y)\| = O(\|y' - y\|)$  puis

$$g(y') - g(y) = Df(g(y))^{-1}(y' - y) + o(\|y' - y\|).$$

Autrement dit,  $g$  est différentiable en  $y$ , de différentielle  $Df(g(y))^{-1}$ .

L'application  $y \mapsto Df(g(y))$  est continue; comme l'application  $u \mapsto u^{-1}$  de  $\text{GL}(E)$  dans lui-même est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , cela prouve que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Soit  $p$  un entier  $\geq 1$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ , démontrons par récurrence sur  $p$  que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ . On vient de le voir pour  $p = 1$ ; si  $p \geq 2$ , on sait par récurrence, que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^{p-1}$ , la formule précédente pour  $Dg$  prouve que  $Dg$  est de classe  $\mathcal{C}^{p-1}$ , si bien que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ .



Enfin, si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  pour tout  $p$ , donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .  $\square$

**COROLLAIRE 3.1.2.** — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^m$ , soit  $f: U \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ , soit  $a \in U$  tel que  $Df(a)$  soit injective. Il existe alors un voisinage  $V$  de  $a$  contenu dans  $U$  tel que  $f(V)$  soit une variété topologique de dimension  $m$ .

*Démonstration.* — Soit  $g: \mathbf{R}^{n-m} \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application linéaire dont l'image est un supplémentaire de l'image de  $Df(a)$ . L'application  $\varphi: \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{n-m} \rightarrow \mathbf{R}^n$  donnée par  $(x, y) \mapsto f(x) + g(y)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Sa différentielle en  $(a, 0)$  est égale à  $(Df(a), g)$  donc est un isomorphisme. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $(a, 0)$  dans  $\mathbf{R}^n$  et un voisinage ouvert  $W$  de  $g(a)$  dans  $\mathbf{R}^n$  tels que  $\varphi$  induise un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $V$  sur  $W$ . Pour toute partie  $A$  de  $V$ ,  $\varphi|_A$  induit un homéomorphisme de  $A$  sur  $\varphi(A)$ . Soit  $V'$  ... Alors, l'application  $x \mapsto \varphi(x, 0) = f(x)$  induit un homéomorphisme de  $V$  sur son image. En particulier,  $f(V)$  est une variété topologique de dimension  $m$ .  $\square$

**THÉORÈME 3.1.3 (Théorème des fonctions implicites).** — Soit  $E, F, G$  trois espaces de Banach, soit  $U$  un ouvert de  $E \times F$ , soit  $f: E \times F \rightarrow G$  une application de classe  $\mathcal{C}^p$ . Soit  $(a, b) \in U$  un point tel que  $f(a, b) = 0$  et tel que la différentielle partielle  $D_2f(a, b)$  par rapport à la seconde variable soit un isomorphisme de  $F$  sur  $G$ . Alors, il existe un voisinage  $V$  de  $a$  dans  $E$ , un voisinage  $W$  de  $b$  dans  $F$  tel que pour tout  $x \in V$ , il existe un unique point  $g(x) \in W$  tel que  $f(x, g(x)) = 0$ . L'application  $x \mapsto g(x)$  de  $V$  dans  $W$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  et sa différentielle est donnée par

$$Dg(x) = -(D_2f(x, g(x)))^{-1} \circ (D_1f(x, g(x)))$$

pour tout  $x \in V$ .

*Démonstration.* — Soit  $\varphi$  l'application de  $U$  dans  $E \times G$  donnée par  $\varphi(x, y) = (x, f(x, y))$ . Elle est de classe  $\mathcal{C}^p$  et sa différentielle en  $(x, y)$ , exprimée par blocs, est égale à

$$\begin{pmatrix} \text{id}_E & 0 \\ D_1f(x, y) & D_2f(x, y) \end{pmatrix},$$

donc est inversible en  $(a, b)$ . Par suite, il existe un voisinage ouvert  $U'$  de  $(a, b)$  contenu dans  $U$  et un voisinage  $V'$  de  $(a, 0)$  dans  $E \times G$  tel que  $\varphi$  induise un  $\mathcal{C}^p$ -difféomorphisme de  $U'$  sur  $V'$ . On peut supposer que  $U'$  est de la forme  $U'_1 \times U'_2$ , où  $U'_1$  est un voisinage de  $a$  et  $U'_2$  un voisinage de  $b$ . Posons  $\psi = \varphi^{-1}: V' \rightarrow U'$ ; pour  $(x, y) \in V'$ , on peut écrire  $\psi(x, y) = (x, \psi_2(x, y))$ . Alors, pour  $(x, y) \in U'$ , l'équation  $f(x, y) = 0$  équivaut à  $\varphi(x, y) = (x, 0)$ , soit encore  $(x, y) = \psi(x, 0) = (x, \psi_2(x, 0))$ .

Soit  $V$  l'ensemble des  $x \in E$  tels que  $(x, 0) \in V'$ ; c'est un voisinage de  $a$  dans  $E$ . Pour  $x \in V$ , posons  $g(x) = \psi_2(x, 0)$ ; c'est l'unique élément  $y$  de  $F$  tel que  $(x, y) \in U'$  et  $f(x, y) = 0$ . L'application  $g: V \rightarrow F$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ . Notons  $i: E \rightarrow E \times G$  l'application  $x \mapsto (x, 0)$ ,  $p: E \times F \rightarrow F$  la seconde projection; elles sont linéaires, donc  $Di(x) = i$

et  $Dp(x, y) = p$  pour tout  $x \in E$  et tout  $y \in F$ . En outre,  $g = p \circ \psi \circ i$ , de sorte que pour  $x \in V$ ,  $Dg(x) = Dp(\psi(i(x)) \circ D\psi(i(x)) \circ Di(x))$ . D'après le théorème d'inversion locale, on a aussi  $D\varphi(x, y) = D\varphi(\psi(x, y))^{-1}$ . Pour  $y = 0$ ,

$$D\varphi(\psi(x, 0)) = \begin{pmatrix} \text{id}_E & 0 \\ D_1f(x, g(x)) & D_2f(x, g(x)) \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$D\varphi(\psi(x, 0))^{-1} = \begin{pmatrix} \text{id}_E & 0 \\ -D_2f(x, g(x))^{-1} \circ D_1f(x, g(x)) & D_2f(x, g(x))^{-1} \end{pmatrix}.$$

Pour  $\xi \in E$ , on a donc

$$\begin{aligned} Dg(x)(\xi) &= p \circ D\varphi(\psi(x, 0))^{-1} \circ i(\xi) \\ &= p \left( \begin{pmatrix} \text{id}_E & 0 \\ -D_2f(x, g(x))^{-1} \circ D_1f(x, g(x)) & D_2f(x, g(x))^{-1} \end{pmatrix} (\xi, 0)^t \right) \\ &= p(\xi, -D_2f(x, g(x))^{-1} \circ D_1f(x, g(x))(\xi)) \\ &= -D_2f(x, g(x))^{-1} \circ D_1f(x, g(x))(\xi). \end{aligned}$$

Cela conclut la preuve du théorème des fonctions implicites.  $\square$

**COROLLAIRE 3.1.4.** — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , soit  $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $M$  l'ensemble des points  $x$  de  $U$  tels que  $f(x) = 0$ . Soit  $a \in M$  un point  $Df(a)$  soit surjective. Alors, il existe un voisinage  $V$  de  $a$  dans  $\mathbf{R}^n$  tel que  $M \cap V$  soit une variété topologique.

*Démonstration.* — Un changement de base permet d'écrire  $\mathbf{R}^n$  sous la forme  $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^m$ , de sorte que  $Df(a) = (D_1f(a), D_2f(a))$ , où  $D_2f(a)$  est un isomorphisme. Posons  $a = (a_1, a_2)$  avec  $a_1 \in \mathbf{R}^p$  et  $a_2 \in \mathbf{R}^m$ . D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage compact  $V$  de  $a_1$ , un voisinage compact  $W$  de  $a_2$  tels que  $V \times W$  soit contenu dans  $U$ , et une application continue  $g: V \rightarrow W$  telles que pour tout  $x \in V$ ,  $y = g(x)$  soit l'unique point de  $W$  tel que  $(x, y) \in M$ . Alors, l'application  $\gamma: x \mapsto (x, g(x))$  de  $V$  dans  $M$  est continue; elle est injective; comme  $V$  est compact, c'est un homéomorphisme de  $V$  sur son image. Par construction,  $\gamma(V) = M \cap (V \times W)$ : il est clair que  $\gamma(V) \subset M \cap (V \times W)$ ; inversement, si  $(x, y) \in M \cap (V \times W)$ ,  $x \in V$ ,  $y \in W$  et  $(x, y) \in M$ , donc  $y = g(x)$  si bien que  $(x, y) = \gamma(x)$ .

Par suite,  $M \cap (\mathring{V} \times W)$  est un voisinage de  $a$  dans  $M$  qui est homéomorphe à  $\mathring{V}$ . En particulier,  $M \cap (\mathring{V} \times W)$  est une variété topologique.  $\square$

**THÉORÈME 3.1.5 (Théorème du rang constant).** — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , soit  $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$  une application de classe  $\mathcal{C}^p$ . Soit  $a \in U$ . Soit  $r$  un entier naturel; on suppose que pour tout  $x \in U$ ,  $Df(x)$  est de rang  $r$ . Alors, il existe un voisinage  $V$  de  $a$  dans  $\mathbf{R}^n$ , un difféomorphisme  $\psi$  de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $V$  sur un voisinage  $\psi(V)$  de  $a$  contenu dans  $U$  tel

que  $\psi(0) = a$ , un voisinage  $W$  de 0 dans  $\mathbf{R}^m$  et un difféomorphisme  $\theta$  de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $W$  sur un voisinage de  $f(a)$  tels que

$$f(\psi(x_1, \dots, x_n)) = \theta(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in V$ .

*Démonstration.* — On peut supposer que  $a = 0$  et  $f(a) = 0$ . Quitte à composer  $f$  à droite et à gauche par des applications linéaires, on suppose que le mineur principal de taille  $r$  de  $Df(x)$  est inversible, pour tout  $x \in U$ . Autrement dit, on écrit  $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^{n-r}$ ,  $\mathbf{R}^m = \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^{m-r}$ ,  $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$  et  $D_1 f(x, y)$  est inversible pour tout  $(x, y) \in U$ . Soit  $\varphi: U \rightarrow \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^{n-r}$  l'application définie par

$$\varphi(x, y) = (f_1(x, y), y).$$

Elle est de classe  $\mathcal{C}^p$  et sa différentielle s'écrit par blocs

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(x, y) & D_2 f_1(x, y) \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix},$$

donc est inversible en tout point de  $U$ . L'application  $\varphi$  définit donc un  $\mathcal{C}^p$ -difféomorphisme d'un voisinage  $U_1$  de 0 dans  $\mathbf{R}^n$  sur un voisinage  $V_1$  de 0 dans  $\mathbf{R}^n$ . Il n'est pas restrictif de supposer que  $V_1$  est de la forme  $V_1' \times V_1''$ , où  $V_1'$  est un voisinage connexe de 0 dans  $\mathbf{R}^r$  et  $V_1''$  un voisinage connexe de 0 dans  $\mathbf{R}^{n-r}$ . L'application  $\psi = \varphi^{-1}: V_1 \rightarrow U_1$  s'écrit  $(x, y) \mapsto (\psi_1(x, y), y)$ . Posons  $g = f \circ \psi: V_1 \rightarrow \mathbf{R}^m$ ; écrivons  $g = (g_1, g_2)$ . Pour  $(x, y) \in V_1$ , on a donc

$$g(x, y) = (f_1(\psi_1(x, y), y), f_2(\psi_1(x, y), y)) = (x, f_2(\psi_1(x, y), y)) = (x, g_2(x, y)).$$

En outre, la différentielle de  $g$  est de rang  $r$  en tout point  $(x, y)$  de  $V_1$ ; comme elle s'écrit par blocs

$$\begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ D_1 g_2(x, y) & D_2 g_2(x, y) \end{pmatrix},$$

on a nécessairement  $D_2 g_2(x, y) = 0$  pour tout  $(x, y) \in V_1 = V_1' \times V_1''$ . Comme  $V_1''$  est connexe, il s'ensuit que  $g_2$  ne dépend pas de  $y$  et l'on a  $g(x, y) = (x, \tilde{g}(x))$ , où  $\tilde{g}(x) = g_2(x, 0)$ . Posons alors  $\theta(x, y) = (x, y + \tilde{g}(x))$ . L'application  $\theta$  est un  $\mathcal{C}^p$ -difféomorphisme de  $\mathbf{R}^n$  sur lui-même et l'on a  $f(\psi(x, y)) = g(x, y) = \theta(x, 0)$  pour tout  $(x, y) \in V_1$ . Cela termine la démonstration du théorème.  $\square$

**COROLLAIRE 3.1.6.** — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , soit  $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ , soit  $p$  un entier naturel. On suppose que pour tout  $x \in U$ ,  $Df(x)$  est une application linéaire de rang  $p$ . Alors, pour tout  $b \in f(U)$ ,  $f^{-1}(b)$  est une variété topologique de dimension  $n - p$ .

*Démonstration.* — Posons  $M = f^{-1}(b)$  et soit  $a$  un point de  $M$ . Soit  $V$  un voisinage de 0 dans  $\mathbf{R}^n$ , soit  $\psi$  un difféomorphisme de  $V$  sur un voisinage  $\psi(V)$  de  $a$  contenu

dans  $0$  tel que  $\psi(0) = a$ , soit  $W$  un voisinage de  $0$  dans  $\mathbf{R}^m$ , soit  $\theta$  un difféomorphisme de  $W$  sur un voisinage de  $b$  tels que

$$f(\psi(x_1, \dots, x_n)) = \theta(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$$

pour tout  $x \in V$ . Un élément  $y$  de  $\psi(V)$  appartient à  $M$  si et seulement si l'unique élément  $x$  de  $V$  tel que  $y = \psi(x)$  vérifie  $\theta(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0) = b$ , c'est-à-dire  $(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0) = \theta^{-1}(b) = 0$ . Par suite,  $\psi^{-1}(M) = \psi^{-1}(M \cap \psi(V)) = V \cap (\{0, \dots, 0\} \times \mathbf{R}^{m-p})$ . Comme  $\psi$  induit un homéomorphisme de  $V$  sur son image, il induit un homéomorphisme de  $V \cap \{0\} \times \mathbf{R}^{m-p}$  sur son image,  $M \cap \psi(V)$ , dans  $\mathbf{R}^n$ . Cela prouve que  $M \cap \psi(V)$  est une variété topologique de dimension  $m - p$ .  $\square$

**DÉFINITION 3.1.7.** — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , soit  $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $a \in U$ .

On dit que  $f$  est une immersion en  $a$  si  $Df(a)$  est injective.

On dit que  $f$  est une submersion en  $a$  si  $Df(a)$  est surjective.

On dit que  $f$  est une subimmersion en  $a$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  et un entier  $p$  tel que  $Df(x)$  soit de rang  $p$  pour tout  $x \in V$ .

**Remarque 3.1.8.** — Si  $f$  est une immersion ou une submersion, c'est aussi une subimmersion. En effet, si  $A$  est une application linéaire injective (surjective) de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^m$ , toute application linéaire assez proche de  $A$  est encore injective (surjective).

### § 3.2. Sous-variétés

Rappelons que pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $\mathbf{H}_n = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{n-1}$ ,  $\mathbf{H}_n^* = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^{n-1}$  et  $\mathbf{H}_n^0 = \{0\} \times \mathbf{R}^{n-1}$ . Si  $n = 0$ ,  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0^*$  est un point et  $\mathbf{H}_0^0$  est vide.

**DÉFINITION 3.2.1.** — Soit  $M$  une partie de  $\mathbf{R}^n$  et soit  $p$  un élément de  $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ . On dit que  $M$  est une sous-variété à bord de classe  $\mathcal{C}^p$  si pour tout point  $a \in M$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $a$  dans  $\mathbf{R}^n$ , un ouvert  $V$  de  $\mathbf{R}^n$ , un difféomorphisme  $\varphi: U \rightarrow V$  de classe  $\mathcal{C}^p$  et un entier  $d$  tels que l'on ait  $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbf{H}_d \times \{0\})$ .

Avec les notations de la définition, on pose  $d = \dim_a(M)$ ; on dit que  $a$  est intérieur si  $\varphi(a) \in \mathbf{H}_d^* \times \{0\}$  et que  $a$  est un point de bord sinon. On note  $\text{Int}(M)$  l'ensemble des points intérieurs de  $M$  et  $\partial(M)$  son bord. On dit qu'une sous-variété différentiable à bord  $M$  est *sans bord* si  $\partial(M) = \emptyset$ ; si l'on parle de sous-variété différentiable (sans plus de précision), il est souvent sous-entendu qu'il s'agit d'une sous-variété sans bord.

L'observation suivante nous permettra de justifier que ces notions sont bien définies, indépendamment du choix d'un difféomorphisme  $\varphi$ .

**Remarque 3.2.2.** — Conservons les notations de la définition. Considérons  $\mathbf{R}^n$  comme le produit de  $\mathbf{R}^d$  par  $\mathbf{R}^{n-d}$ , soit  $i: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^n$  l'injection  $x \mapsto (x, 0)$  et  $p: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^d$  la projection  $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ . Soit  $V_1 = i^{-1}(V)$  l'ensemble des points  $x$  de  $\mathbf{R}^d$  tels que  $i(x) = (x, 0) \in$

$V$ . Alors, l'application  $f_1 = f \circ i$  est une immersion de classe  $\mathcal{C}^p$  (si  $p \geq 1$ ) et induit un homéomorphisme de  $V_1$  sur son image dans  $U$ , et un homéomorphisme de  $V_1 \cap \mathbf{H}_d$  sur  $U \cap M$ .

PROPOSITION 3.2.3. — a) Une sous-variété à bord de classe  $\mathcal{C}^p$  est une variété topologique à bord ; les notions de dimension, de points intérieurs et de bord coïncident.

b) L'intérieur d'une sous-variété différentiable à bord de classe  $\mathcal{C}^p$  est une sous-variété (sans bord) de classe  $\mathcal{C}^p$ .

c) Le bord d'une sous-variété différentiable à bord de classe  $\mathcal{C}^p$  est lui-même une sous-variété différentiable (sans bord) de classe  $\mathcal{C}^p$ .

Démonstration. — a) Cela résulte directement de la remarque précédente. En effet,  $U \cap M$  est homéomorphe à un ouvert de  $\mathbf{H}_d$ .

b) Avec les notations de la définition,  $U \cap \partial(M)$  est l'image réciproque de  $\{0\} \times \mathbf{R}^{d-1} \times \{0\}$  par  $\varphi$ . Cela prouve que  $\partial(M)$  est une sous-variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^p$ . □

Remarques 3.2.4. — a) Si  $M$  est une sous-variété différentiable à bord de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $\mathbf{R}^n$ , alors  $M$  est une sous-variété différentiable à bord de classe  $\mathcal{C}^q$  pour tout entier  $q$  tel que  $q \leq p$ .

b) Il est possible, pour une partie de  $\mathbf{R}^n$ , d'être une variété topologique à bord (pour la topologie induite), mais de ne pas être une sous-variété différentiable à bord de classe  $\mathcal{C}^0$ .

Supposons  $p \geq 1$ .

Alors, les théorèmes des fonctions implicites, d'inversion locale et du rang constant fournissent des moyen efficace est simple de garantir qu'une partie de  $\mathbf{R}^n$  soit une sous-variété différentiable : sous les hypothèses des corollaires 3.1.4 et 3.1.6,  $M$  est une sous-variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^1$ . Plus généralement :

PROPOSITION 3.2.5. — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  et soit  $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$  une application de classe  $\mathcal{C}^p$  qui est une subimmersion de rang  $r$  en tout point. Soit  $b \in \mathbf{R}^m$ .

a) L'ensemble  $f^{-1}(b)$  est une sous-variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^p$ , de dimension  $n - r$  en tout point.

b) Supposons  $m = 1$  et  $r = 1$  (de sorte que  $f$  est une submersion en tout point). Alors, pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$  d'intérieur non vide,  $f^{-1}(I)$  est une sous-variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^p$ , de dimension  $n + 1 - r$  en tout point et de bord  $f^{-1}(\partial I)$ .

Démonstration. — On démontre simultanément les deux assertions. Posons  $A = f^{-1}(b)$  ; dans le premier cas, et  $A = f^{-1}(I)$  dans le second ; soit  $a \in A$ .

D'après le théorème du rang constant, il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $a$  dans  $U$ , un difféomorphisme  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^p$  d'un voisinage ouvert  $V_1$  de  $0$  dans  $\mathbf{R}^n$  sur  $V$  vérifiant  $\varphi(0) = a$ , un voisinage ouvert  $W$  de  $f(a)$  dans  $\mathbf{R}^m$  et un difféomorphisme  $\psi$

de classe  $\mathcal{C}^p$  d'un voisinage ouvert  $W_1$  de 0 dans  $\mathbf{R}^m$  sur  $W$  vérifiant  $\psi(0) = f(a)$ , tels que pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in V_1$ , on a  $(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \in W_1$  et  $f(\varphi(x_1, \dots, x_n)) = \psi(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ . Posons  $F = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ .

Traitons maintenant le premier cas. Par construction, un point  $x = (x_1, \dots, x_n)$  appartient à  $\varphi(A \cap U)$  si et seulement si  $x_1 = \dots = x_r = 0$ . Autrement dit,  $\varphi(A \cap U) = \{0\} \times \mathbf{R}^{n-r}$ . Cela prouve que  $A \cap U$  est une sous-variété de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $\mathbf{R}^n$ , de dimension  $n - r$ .

Traitons enfin le second cas. De même, un point  $x = (x_1, \dots, x_n)$  appartient à  $\varphi(A \cap U)$  si et seulement si  $x_1$  appartient à  $\psi^{-1}(W \cap I)$ . Si  $f(a)$  appartient à l'intérieur de  $I$ , on peut supposer, quitte à diminuer  $W$ , que  $W \subset I$ , de sorte que  $W \cap I = W$ ; dans ce cas,  $\varphi(A \cap U) = \mathbf{R} \times \{0\} \times \mathbf{R}^{n-r}$  et  $A \cap U$  est une sous-variété de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $\mathbf{R}^n$ , de dimension  $n + 1 - r$ .

Si  $f(a)$  est l'extrémité inférieure de  $I$ , on peut supposer que  $W \cap [f(a), +\infty[ \subset I$ , de sorte que  $W \cap I = W \cap [f(a), +\infty[$ . On peut aussi supposer que  $\psi$  est croissant (quitte à changer  $\psi$  en  $-\psi$  et  $W_1$  en  $-W_1$ ). Alors,  $\varphi(A \cap U) = \mathbf{R}_+ \times \{0\} \times \mathbf{R}^{n-r}$ , si bien que  $A \cap U$  est une sous-variété de classe  $\mathcal{C}^p$ , de dimension  $n + 1 - r$  et de bord  $f^{-1}(f(a)) \cap U$ .

Le cas où  $f(a)$  est l'extrémité supérieure de  $I$  se traite de façon analogue.  $\square$

Dans la remarque qui suit la définition d'une sous-variété différentiable, l'application  $f$  est nécessairement une immersion. Ainsi, une sous-variété différentiable est, « localement », l'image d'un ouvert de  $\mathbf{H}_d$  par une immersion qui induit un homéomorphisme sur son image. Inversement :

**PROPOSITION 3.2.6.** — *Supposons  $p \geq 1$ . Soit  $d$  un entier  $\geq 0$ , soit  $V$  un ouvert de  $\mathbf{R}^d$  et soit  $f: V \rightarrow \mathbf{R}^n$  une immersion de classe  $\mathcal{C}^p$ . Supposons que  $f$  induise un homéomorphisme de  $V \cap \mathbf{H}_d$  sur son image  $M$  dans  $\mathbf{R}^n$ . Alors,  $M$  est une sous-variété différentiable à bord de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $\mathbf{R}^n$ .*

*Démonstration.* — Pour alléger les notations, si  $V$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^d$ , on pose  $V^+ = V \cap \mathbf{H}_d$ ; on a donc  $M = f(V^+)$ . De manière analogue, si  $W$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , on pose  $W^+ = W \cap \{0\} \times \mathbf{H}_d$ .

Soit  $a$  un point de  $M$ , soit  $b \in V^+$  tel que  $a = f(b)$ . Par hypothèse,  $Df(b)$  est une application linéaire injective de  $\mathbf{R}^d$  dans  $\mathbf{R}^n$ . Son image est donc un sous-espace vectoriel de rang  $d$  de  $\mathbf{R}^n$ ; en complétant les images des vecteurs de la base canonique en une base de  $\mathbf{R}^n$ , on construit une application linéaire  $j: \mathbf{R}^{n-d} \rightarrow \mathbf{R}^n$  telle que l'application linéaire  $(Df(b), j): (x, y) \mapsto Df(b)(x) + j(y)$  soit un isomorphisme d'espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d}$  sur  $\mathbf{R}^n$ . Posons  $W = V \times \mathbf{R}^{n-d}$  et soit  $f_1: W_1 \rightarrow \mathbf{R}^n$  l'application  $(x, y) \mapsto f(x) + j(y)$ . Elle est de classe  $\mathcal{C}^p$  et sa différentielle en  $b_1 = (b, 0)$  est égale à  $(Df(b), j)$ . D'après le théorème d'inversion locale (théorème 3.1.1), il existe des voisinages ouverts  $W_1$  de  $b_1$  dans  $\mathbf{R}^n$  et  $U_1$  de  $a = f_1(b_1)$  dans  $\mathbf{R}^n$  tels que  $f_1$  induise un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $W_1$  sur  $U_1$ .

Puisque  $f$  induit un homéomorphisme de  $V^+$  sur  $M$ , l'image par  $f$  de tout voisinage de  $b$  dans  $V^+$  est un voisinage de  $a$  dans  $M$ . Soit  $V_1$  l'ensemble des éléments  $x$  de  $\mathbf{R}^d$  tels que  $(x, 0) \in W_1$ ;  $c$ 'est un voisinage de  $b$  contenu dans  $V$ , donc  $V_1^+$  est un voisinage de  $b$  dans  $V^+$ . Par suite,  $f(V_1^+)$  est un voisinage de  $a$  dans  $M$ . Il existe donc un voisinage ouvert  $U_2$  de  $a$  dans  $\mathbf{R}^n$ , contenu dans  $U_1$ , tel que  $f(V_1^+)$  contienne  $M \cap U_2$ .

Posons  $W_2 = f_1^{-1}(U_2)$ ;  $c$ 'est un voisinage ouvert de  $b_1$  contenu dans  $W_1$  et  $f_1$  induit un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $W_2$  sur  $U_2$ . Soit  $V_2$  l'ensemble des éléments  $x \in V$  tels que  $(x, 0) \in W_2$ ;  $c$ 'est un voisinage de  $b$  dans  $V$  contenu dans  $V_1$ .

Par construction, on a  $U_2 \cap M = f(V_2^+) = f_1(W_2^+)$ . En effet, si  $x \in V_2^+$ ,  $(x, 0) \in W_2$ , donc  $f(x) = f_1(x, 0) \in U_2$  et  $f(x) \in M$ . Inversement, si  $y \in U_2 \cap M$ , il existe un élément  $x \in V_1^+$  tel que  $f(x) = y$ ; alors,  $(x, 0) \in W_1$ ,  $f_1(x, 0) = f(x) \in U_2$ , donc  $(x, 0) \in W_2$  et finalement  $x \in V_2$ ; puisque  $V_1^+ \subset \mathbf{H}_d$ , on a aussi  $x \in V_2 \cap \mathbf{H}_d = V_2^+$ .

Cela prouve que  $U_2 \cap M$  est une sous-variété différentiable à bord de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $U_2$ , de bord  $f_1(W_2 \cap (\mathbf{H}_d^0 \times \{0\})) = f(\mathbf{H}_d^0 \cap V_2)$ , d'où la proposition.  $\square$

*Remarque 3.2.7.* — Dans cette proposition, on ne peut pas omettre l'hypothèse que  $f$  induit un homéomorphisme sur son image. Par exemple, si  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  n'est pas injective,  $f$  peut décrire une courbe qui « se recoupe » (penser à un « 8 ») et cette courbe n'est pas une variété topologique.

Il n'est pas non plus suffisant de supposer que  $f$  soit une immersion injective pour en conclure que son image est une sous-variété différentiable à bord de  $\mathbf{R}^n$ . Dans la preuve de la proposition, on a dû utiliser que l'image par  $f$  du voisinage  $V_1 \cap \mathbf{H}_d$  de  $b$  dans  $V \cap \mathbf{H}_d$  est un voisinage de  $a$  dans  $M$ . Sans l'hypothèse d'homéomorphisme, on pourrait avoir besoin, pour décrire  $M$  au voisinage de  $a$ , de valeurs de  $f$  en des points très loin de  $b$ . Penser de nouveau à un « 8 », image d'une application injective  $f$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}^2$  telle que le centre du « 8 » soit égal à  $f(0)$  et à  $\lim_{\pm\infty} f(t)$ .

Cette hypothèse que  $f$  induit un homéomorphisme de  $V \cap \mathbf{H}_d$  sur  $M$  est vérifiée si l'on suppose que l'application continue  $f: V \cap \mathbf{H}_d \rightarrow M$ , supposée bijective, est ouverte (c'est la définition) ou fermée (comme elle est bijective elle sera alors ouverte). Mais cette propriété est quasi-tautologique et sa vérification requiert de connaître  $M$ . Voilà un cas important et relativement simple à vérifier où elle est satisfaite : il suffit que l'image réciproque par  $f$  de tout compact de  $\mathbf{R}^n$  soit compacte dans  $U \cap \mathbf{R}^d$  (on dit que  $f$  est *propre*).

### § 3.3. Espaces et cônes tangents

**DÉFINITION 3.3.1.** — Soit  $M$  une partie de  $\mathbf{R}^n$  et soit  $a$  un point de  $M$ . On définit le cône tangent de  $M$  en  $a$  comme l'ensemble des points  $x \in \mathbf{R}^n$  tels qu'il existe une suite  $(x_k)$  de points de  $M$  et une suite  $(t_k)$  de nombres réels strictement positifs tels que  $t_k \rightarrow 0$  et  $(x_k - a)/t_k \rightarrow x$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

*Remarques 3.3.2.* — a) Pour tout point  $a$ ,  $C_a(M)$  est un cône au sens où si  $x \in C_a(M)$  et  $t \geq 0$ , alors  $tx \in C_a(M)$ . C'est vrai si  $t = 0$ , car  $0 \in C_a(M)$ ; il suffit de prendre  $x_k = a$  pour tout  $k$  et  $t_k = 1/k$  (disons). Si  $t > 0$ , choisissons des suites  $(t_k)$  et  $(x_k)$  telles que  $t_k \rightarrow 0$  et  $(x_k - a)/t_k \rightarrow x$ ; alors,  $(x_k - a)/(t_k/t)$  converge vers  $tx$ .

En outre,  $C_a(M)$  est fermé. En effet, si  $(x_m)$  est une suite de points de  $C_a(M)$  qui converge vers un point  $x \in \mathbf{R}^n$ , choisissons des suites  $(t_{m,k})$  et  $(x_{m,k})$  telles que  $(x_{m,k} - a)/t_{m,k} \rightarrow x_m$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Pour tout  $m$ , choisissons un entier  $k = k(m)$  tel que  $t_{m,k} < 1/m$  et  $(x_{m,k} - a)/t_{m,k}$  soit à distance au plus  $1/m$  de  $x_m$ ; posons alors  $y_m = x_{m,k(m)}$  et  $t_m = t_{m,k(m)}$ ; On a  $t_m < 1/m$  et

$$\left\| \frac{y_m - a}{t_m} - x \right\| \leq \frac{1}{m} + \|x_m - x\|,$$

donc  $(y_m - a)/t_m$  tend vers  $x$ .

b) Le cône tangent  $C_a(M)$  ne dépend que de «  $M$  au voisinage de  $a$  » : si  $U$  est un voisinage de  $a$  dans  $\mathbf{R}^n$ , on a  $C_a(M \cap U) = C_a(M)$ .

*Exemples 3.3.3.* — Soit  $M$  une partie de  $\mathbf{R}^n$  et soit  $a$  un point de  $M$ .

a) Si  $a$  appartient à l'intérieur de  $M$ , alors  $C_a(M) = \mathbf{R}^n$ . En effet, pour tout  $v \in \mathbf{R}^n$ ,  $a + tv$  appartient à  $M$  pour  $t$  assez petit.

b) Supposons  $M = \mathbf{H}_d \times \{0\}$  et  $a \in \mathbf{H}_d^*$ ; alors,  $C_a(M) = \mathbf{R}^d \times \{0\}$ .

En effet, pour tout  $x \in M$  et tout  $t > 0$ ,  $v = (x - a)/t$  appartient à  $\mathbf{R}^d \times \{0\}$ ; comme ce sous-espace est fermé dans  $\mathbf{R}^n$ , il en résulte que  $C_a(M)$  est contenu dans  $\mathbf{R}^d \times \{0\}$ . Inversement, si  $v \in \mathbf{R}^d \times \{0\}$ , alors  $a + tv$  appartient à  $\mathbf{H}_d \times \{0\}$  pour tout  $t$  assez petit, d'où  $v \in C_a(M)$ .

c) Supposons  $M = \mathbf{H}_d \times \{0\}$  et  $a \in \mathbf{H}_d^0 \times \{0\}$ ; alors,  $C_a(M) = \mathbf{H}_d \times \{0\}$ .

Si  $x \in M$  et  $t > 0$ ,  $v = (x - a)/t$  appartient à  $\mathbf{H}_d \times \{0\}$ , car  $a_1 = 0$ ; comme ce sous-espace est fermé dans  $\mathbf{R}^n$ , cela entraîne l'inclusion  $C_a(M) \subset \mathbf{H}_d \times \{0\}$ . Inversement, si  $v \in \mathbf{H}_d \times \{0\}$ , alors  $a + tv$  appartient à  $\mathbf{H}_d \times \{0\}$  pour tout nombre réel *strictement positif*  $t$  assez petit, d'où  $v \in C_a(M)$ .

d) Soit  $M$  la réunion des deux axes de coordonnées dans  $\mathbf{R}^2$  et soit  $a = (0, 0)$ . Alors,  $C_a(M) = M$ .

*LEMME 3.3.4.* — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , soit  $f: U \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ , soit  $a$  un point de  $U$  et soit  $b = f(a)$ . Soit  $M$  une partie de  $\mathbf{R}^n$  telle que  $a \in M$ .

a) On a  $C_b(f(M \cap U)) \supset Df(a)(C_a(M))$ .

b) Si, de plus,  $f$  induit un difféomorphisme de  $U$  sur  $f(U)$ , alors  $C_b(f(M \cap U)) = Df(a)(C_a(M))$ .

*Démonstration.* — Quitte à remplacer  $M$  par  $M \cap U$ , ce qui ne change pas  $C_a(M)$ , on peut supposer que  $M \subset U$ . On commence alors par démontrer que  $C_b(f(M))$  contient  $Df(a)(C_a(M))$ . Soit donc  $v \in C_a(M)$ ,  $(x_k)$  une suite de points de  $M$ ,  $(t_k)$  une suite de



nombres réels strictement positifs tels que  $t_k \rightarrow 0$  et  $(x_k - a)/t_k \rightarrow v$ . On a donc  $x_k = a + t_k v + o(t_k)$ , donc

$$f(x_k) = f(a) + Df(a)(x_k - a) + o(\|x_k - a\|) = b + t_k Df(a)(v) + o(t_k),$$

ce qui prouve que  $(f(x_k) - b)/t_k$  tend vers  $Df(a)(v)$ . Ainsi,  $Df(a)(v)$  appartient à  $C_b(f(M))$ .

Soit  $g: V \rightarrow U$  l'inverse de  $f$ . D'après l'argument précédent, on a les inclusions

$$C_a(M) = C_a(g(f(M))) \supset Dg(b)(C_b(f(M))) \supset Dg(b) \circ Df(a)(C_a(M)) = C_a(M).$$

Par suite, ces inclusions sont toutes des égalités. Comme les applications linéaires  $Df(a)$  et  $Dg(b)$  sont bijectives, on a donc  $C_b(f(M)) = Df(a)(C_a(M))$ .  $\square$

**COROLLAIRE 3.3.5.** — *Soit  $M$  une partie de  $\mathbf{R}^n$  qui est une sous-variété différentiable à bord de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $a$  un point de  $M$ . Si  $a \in \text{Int}(M)$ ,  $C_a(M)$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $\dim_a(M)$  de  $\mathbf{R}^n$ . Si  $a \in \partial(M)$ ,  $C_a(M)$  est un demi-espace d'un sous-espace vectoriel de dimension  $\dim_a(M)$  de  $\mathbf{R}^n$  dont le bord est  $C_a(\partial(M))$ .*

On note  $T_a(M)$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$  engendré par  $C_a(M)$  et on dira que c'est l'espace tangent de  $M$  en  $a$ ; sa dimension est égale à  $\dim_a(M)$ . D'après le corollaire précédent, on a donc  $C_a(M) = T_a(M)$  si  $a \in \text{Int}(M)$ , tandis que  $C_a(M)$  est un des deux demi-espaces de  $T_a(M)$  séparé par  $T_a(\partial(M))$  si  $a \in \partial(M)$ .

*Démonstration.* — Soit  $U$  un voisinage ouvert de  $a$  dans  $\mathbf{R}^n$ , soit  $\varphi: U \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  qui induit un difféomorphisme de  $U$  sur son image dans  $\mathbf{R}^n$  et tel que  $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbf{H}_d \times \{0\})$ . D'après le lemme précédent, on a donc

$$C_a(M) = C_a(M \cap U) = D\varphi(a)^{-1}(C_{\varphi(a)}(V \cap \mathbf{H}_d \times \{0\})) = D\varphi(a)^{-1}(\mathbf{H}_d \times \{0\}).$$

Nous avons calculé le cône tangent de  $\mathbf{H}_d \times \{0\}$  en  $b$  dans les exemples; observons que c'est ou bien le sous-espace vectoriel  $\mathbf{R}^d \times \{0\}$  (si  $\varphi(a)$  est un point intérieur de  $\mathbf{R}^d \times \{0\}$ ) ou bien le demi-espace  $\mathbf{H}_d \times \{0\}$  de ce sous-espace vectoriel (si  $\varphi(a)$  est un point de bord), d'où le corollaire.  $\square$

*Remarque 3.3.6.* — Le corollaire précédent fournit une définition simple de la dimension et du bord d'une variété à bord de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Soit  $M$  une sous-variété à bord de  $\mathbf{R}^n$  et soit  $a \in M$ . La dimension de  $M$  en  $a$  et l'appartenance de  $a$  au bord  $\partial(M)$  de  $M$  avaient été définis en termes de la variété topologique  $M$ , donc d'un homéomorphisme  $f$  d'un voisinage  $U$  de  $a$  dans  $\mathbf{R}^n$  sur un voisinage  $V$  de 0 dans  $\mathbf{R}^n$  qui applique  $U \cap M$  sur  $\mathbf{R}^d \times \{0\}$  ou sur  $\mathbf{H}_d \times \{0\}$ . C'est le théorème d'invariance du domaine qui garantissait que l'entier  $d$  ne dépend pas du choix de l'homéomorphisme  $f$  de même que l'appartenance de  $f(a)$  à  $\mathbf{H}_d^0 \times \{0\}$  ou non.

Si  $M$  est une sous-variété à bord de classe  $\mathcal{C}^1$ , et si l'on prend pour  $f$  un difféomorphisme, le corollaire précédent prouve que  $d$  est la dimension de  $T_a(M)$ , et que  $a \in \partial(M)$  si et seulement si  $C_a(M) \neq T_a(M)$ .

**COROLLAIRE 3.3.7.** — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , soit  $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$  une subimmersion de rang  $r$  en tout point. Soit  $b \in \mathbf{R}^m$  et soit  $M = f^{-1}(b)$ . Pour tout point  $a \in M$ , on a  $T_a(M) = \ker(Df(a))$ .

*Démonstration.* — On peut supposer que  $M \neq \emptyset$ . Soit  $a \in M$ . Comme  $f(M) = \{b\}$  et  $C_b(\{b\}) = \{0\}$ ,  $Df(a)(T_a(M)) = 0$  et  $T_a(M) \subset \ker(Df(a))$ . Puisque, de plus,  $T_a(M)$  est un espace vectoriel de dimension  $\dim_a(M) = n - r$  et que  $\dim(\ker(Df(a))) = n - \operatorname{rg}(Df(a)) = n - r$ , on a l'égalité.  $\square$

**Exemple 3.3.8.** — Identifions l'espace  $M_n(\mathbf{R})$  des matrices carrées de taille  $n$  à l'espace  $\mathbf{R}^{n^2}$ . Le groupe  $\operatorname{SL}(n, \mathbf{R})$  est une sous-variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $M_n(\mathbf{R})$ . Elle est connexe et de dimension  $n^2 - 1$ . Son espace tangent en la matrice identité est le sous-espace des matrices de trace nulle.

La fonction déterminant  $\det: M_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$  est polynomiale, donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Le sous-groupe  $\operatorname{GL}(n, \mathbf{R})$  est ouvert dans  $M_n(\mathbf{R})$ . Démontrons que  $D(\det)$  est de rang constant égal à 1 en tout point de  $\operatorname{GL}(n, \mathbf{R})$ .

On a  $\det(I_n + M) = 1 + \operatorname{tr}(M) + O(\|M\|^2)$  lorsque  $M \rightarrow 0$  (exercice : le vérifier !), si bien que  $D\det(I_n) = \operatorname{tr}$ . Plus généralement, si  $A \in \operatorname{GL}(n, \mathbf{R})$ ,

$$\det(A + M) = \det(A) \det(I_n + A^{-1}M) = \det(A) + \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1}M) + O(\|M\|^2),$$

si bien que  $D\det(A)$  est l'application linéaire  $M \mapsto \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1}M)$ . On constate donc que  $D(\det)(A)$  n'est nulle pour aucune matrice  $A \in \operatorname{GL}(n, \mathbf{R})$ . Elle est donc de rang 1.

Puisque  $\operatorname{SL}(n, \mathbf{R})$  est l'image réciproque de  $\{1\}$  par la fonction  $\det$ , cela prouve que  $\operatorname{SL}(n, \mathbf{R})$  est une sous-variété différentiable de  $M_n(\mathbf{R})$  de dimension  $n^2 - 1$  en tout point.

La formule  $D\det(I_n) = \operatorname{tr}$  que nous avons démontrée ci-dessus entraîne que l'espace tangent à  $\operatorname{SL}(n, \mathbf{R})$  en  $I_n$  est le sous-espace de  $M_n(\mathbf{R})$  formé des matrices de trace nulle.

La connexité de  $\operatorname{SL}(n, \mathbf{R})$  découle, par exemple, de ce que ce groupe est engendré par la réunion des sous-groupes formé des matrices de la forme  $I_n + tA$ , où  $A$  est une matrice de rang 1 de carré nul (transvection).

**Exemple 3.3.9.** — Le groupe  $\operatorname{SO}(n, \mathbf{R})$  des matrices orthogonales de déterminant 1 est une sous-variété connexe de dimension  $n(n-1)/2$  de  $M_n(\mathbf{R})$ . Son espace tangent en  $I_n$  est le sous-espace des matrices antisymétriques.

Soit  $\Phi: M_n(\mathbf{R}) \rightarrow M_n(\mathbf{R})$  l'application donnée par  $\Phi(A) = {}^tAA$ . Elle est polynomiale, donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , et sa différentielle en  $A$  est l'application linéaire  $M \mapsto {}^tAM + {}^tMA$ . On constate que  $D\Phi(A)(M) = D\Phi(I_n)({}^tAM)$ ; pour  $A \in \operatorname{GL}(n, \mathbf{R})$ , l'application linéaire  $M \mapsto {}^tAM$  est un isomorphisme, si bien que le rang de  $D\Phi(A)$  est égal à celui de  $D\Phi(I_n)$ .

On constate que  $\ker(D\Phi(I_n))$  est le sous-espace des matrices antisymétriques; il est de dimension  $n(n-1)/2$ .

La connexité de  $\operatorname{SO}(n, \mathbf{R})$  provient de ce qu'une matrice de  $\operatorname{SO}(n, \mathbf{R})$  est semblable dans une base orthonormée à une matrice diagonale par blocs  $2 \times 2$  ou  $1 \times 1$ , les blocs  $2 \times 2$  étant des rotations planes (des éléments de  $\operatorname{SO}(2, \mathbf{R})$ , les blocs  $1 \times 1$  étant l'identité.

En outre, le groupe  $SO(2, \mathbf{R})$  est connexe, puisque c'est l'ensemble des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$  avec  $t \in \mathbf{R}$ .

### § 3.4. Sous-groupes fermés de $GL(n, \mathbf{R})$

Le théorème suivant généralise les exemples 3.3.8 et 3.3.9.

**THÉORÈME 3.4.1 (Cartan).** — *Soit  $G$  un sous-groupe de  $GL(n, \mathbf{R})$  qui est fermé. Alors  $G$  est une sous-variété différentiable (sans bord) de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .*

Avant de démontrer ce théorème, nous devons faire quelques « rappels » sur l'exponentielle des matrices.

On munit  $M_n(\mathbf{R})$  d'une norme d'endomorphisme :  $\mathbf{R}^n$  est (par exemple) muni de la norme euclidienne et, si  $A \in M_n(\mathbf{R})$ ,  $\|A\|$  est la borne supérieure des  $\|Ax\|$ , pour  $x \in \mathbf{R}^n$  de norme  $\leq 1$ . On a  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

**DÉFINITION 3.4.2.** — *Pour  $A \in M_n(\mathbf{R})$ , on pose*

$$\exp(A) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} A^p.$$

**LEMME 3.4.3.** — a) *Cette série converge normalement et définit une fonction continue de  $M_n(\mathbf{R})$  dans  $M_n(\mathbf{R})$ .*

b) *Si  $A$  et  $B \in M_n(\mathbf{R})$  sont deux matrices telles que  $AB = BA$ , alors*

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A).$$

c) *Pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbf{R})$  et tous  $s, t \in \mathbf{R}$ , on a*

$$\exp((s + t)A) = \exp(sA) \exp(tA).$$

*En particulier,  $\exp(A)$  est inversible et  $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$ .*

**Démonstration.** — a) Comme  $\|A^p\| \leq \|A\|^p$  et que le rayon de convergence de la série exponentielle est infini, la série de matrices  $\exp(A)$  converge uniformément sur toute boule. L'application  $A \mapsto \exp(A)$  est donc continue.

b) Puisque  $A$  et  $B$  commutent, la formule du binôme est valable et l'on a

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

pour tout entier  $p \geq 0$ . Alors,

$$\exp(A + B) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Cette série double est normalement convergente puisque

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \|A^k B^{n-k}\| \leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \|A\|^k \|B\|^{n-k} = \exp(\|A\|) \exp(\|B\|).$$

On peut donc intervertir l'ordre des termes sans changer ni la nature ni la somme de la série et écrire

$$\exp(A+B) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=k}^{\infty} \frac{1}{k!(p-k)!} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \sum_{p=k}^{\infty} \frac{1}{(p-k)!} B^{n-k} = \exp(A) \exp(B).$$

c) L'assertion précédente appliquée aux matrices  $sA$  et  $tA$  (qui commutent) entraîne la première égalité. Comme  $\exp(0) = I_n$ , on voit alors que  $\exp(A) \exp(-A) = I_n$ , donc  $\exp(A)$  est inversible, d'inverse  $\exp(-A)$ . □

*Remarque 3.4.4.* — Observons la majoration, valable pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbf{R})$  :

$$\left\| \exp(A) - I_n - A - \frac{1}{2}A^2 \right\| \leq \sum_{p=3}^{\infty} \frac{1}{p!} \|A\|^p \leq \exp(\|A\|) \|A\|^3.$$

En particulier, pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbf{R})$ , on a le développement limité

$$\exp(tA) = I_n + tA + O(t^2)$$

lorsque  $t \rightarrow 0$  dans  $\mathbf{R}$ .

**PROPOSITION 3.4.5.** — *La fonction  $\exp$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $M_n(\mathbf{R})$  et sa différentielle en  $A \in M_n(\mathbf{R})$  est donnée par*

$$D \exp(A) : M \mapsto \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(p-1)!} \left( \sum_{j=1}^p A^{j-1} M A^{p-j} \right).$$

*Démonstration.* — Nous avons déjà démontré que la fonction  $\exp$  est continue. Prouvons qu'elle est différentiable et que sa différentielle est obtenue par dérivation terme à terme. Pour  $A$  et  $M \in M_n(\mathbf{R})$ , posons

$$\varphi_A(M) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(p-1)!} \left( \sum_{j=1}^p A^{j-1} M A^{p-j} \right).$$

Cette expression est la somme d'une série normalement convergente, car  $\|A^{j-1} M A^{p-j}\| \leq \|A\|^{p-1} \|M\|$ , de sorte que l'application  $(A, M) \mapsto \varphi_A(M)$  est continue. De plus, pour tout  $p \geq 0$ ,

$$(A+M)^p = A^p + \sum_{j=1}^p A^{j-1} M A^{p-j} + \sum_{k=2}^p R_{p,k},$$

où  $R_{p,k}$  est la somme de  $\binom{p}{k}$  termes, chacun étant un produit de  $k$  facteurs égaux à  $M$  et de  $p-k$  facteurs égaux à  $A$ , dans tous les ordres possibles. Ainsi,

$$\|R_k\| \leq \binom{p}{k} \|A\|^{p-k} \|M\|^k,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \|\exp(A+M) - \exp(A) - \varphi(M)\| &\leq \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{k=2}^p \|R_{p,k}\| \\ &\leq \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{k=2}^p \binom{p}{k} \|A\|^{p-k} \|M\|^k \\ &\leq \exp(\|A\| + \|M\|) - \exp(\|A\|) - \|M\| \exp(\|A\|) \\ &\leq O(\|M\|^2). \end{aligned}$$

Il en résulte que  $\varphi_A$  est la différentielle en  $A$  de l'application  $\exp$ . Cela prouve que  $\exp$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .  $\square$

*Remarque 3.4.6.* — La différentielle de l'exponentielle est encore donnée par une série de polynômes. Un argument similaire démontrerait qu'elle est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$ , de sorte que  $\exp$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**PROPOSITION 3.4.7.** — *Il existe un voisinage ouvert  $U$  de 0 dans  $M_n(\mathbf{R})$  et un voisinage ouvert  $V$  de  $I_n$  dans  $GL_n(\mathbf{R})$  tels que l'exponentielle induise un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $U$  sur  $V$ .*

*Démonstration.* — En effet, la différentielle de  $\exp$  en 0 est l'application identique. La proposition découle donc immédiatement du théorème d'inversion locale.  $\square$

Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices dans  $M_n(\mathbf{R})$ , on note  $[A, B] = AB - BA$ .

**COROLLAIRE 3.4.8.** — *Pour  $A, B \in M_n(\mathbf{R})$  et  $t \in \mathbf{R}$ , on a les relations*

$$(3.4.9/a) \quad \exp(tA) \exp(tB) = \exp\left(t(A+B) + \frac{1}{2}t^2[A, B] + O(t^3)\right)$$

$$(3.4.9/b) \quad \exp(tA) \exp(tB) \exp(-tA) = \exp\left(tB + t^2[A, B] + O(t^3)\right)$$

$$(3.4.9/c) \quad \exp(-tA) \exp(-tB) \exp(tA) \exp(tB) = \exp\left(t^2[A, B] + O(t^3)\right)$$

*Démonstration.* — a) On peut écrire  $\exp(tA) \exp(tB) = \exp(tC_1 + t^2C_2 + O(t^3))$ . Quand  $t \rightarrow 0$ , le membre de gauche vérifie le développement limité

$$\begin{aligned} \exp(tA) \exp(tB) &= (I_n + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + O(t^3))(I_n + tB + \frac{1}{2}t^2B^2 + O(t^3)) \\ &= I_n + t(A+B) + \frac{1}{2}t^2(A^2 + 2AB + B^2), \end{aligned}$$

tandis que le membre de droite s'exprime par

$$\exp(tC_1 + t^2C_2 + O(t^3)) = I_n + tC_1 + t^2(C_2 + C_1^2) + O(t^3),$$

si bien que l'on a  $C_1 = A + B$  et  $C_2 + C_1^2 = A^2 + 2AB + B^2$ , d'où

$$C_2 = A^2 + 2AB + B^2 - (A + B)^2 = 2AB - AB - BA = AB - BA = [A, B].$$

Les calculs précédents prouvent en fait ce développement limité uniformément en  $A$  et  $B$  lorsque ces matrices parcourent un ensemble borné.

b) Compte tenu de la formule précédente, on a

$$\exp(tA) \exp(tB) \exp(-tA) = \exp(t(A + B) + \frac{1}{2}t^2[A, B] + O(t^3)) \exp(-tA).$$

On l'applique de nouveau aux matrices  $A + B + \frac{1}{2}t[A, B] + O(t^2)$  (qui reste bornée quand  $t \rightarrow 0$ ) et  $-A$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \exp(tA) \exp(tB) \exp(-tA) &= \exp(tB + \frac{1}{2}t^2[A, B] - \frac{1}{2}t^2[A + B, A] + O(t^3)) \\ &= \exp(tB + t^2[A, B] + O(t^3)). \end{aligned}$$

c) De même,

$$\begin{aligned} \exp(tA) \exp(tB) \exp(-tA) \exp(-tB) &= \exp(t(A + B) + \frac{1}{2}t^2[A, B] + O(t^3)) \exp(-t(A + B) + \frac{1}{2}t^2[A, B] + O(t^3)) \\ &= \exp(t^2[A, B] - \frac{1}{2}t^2[A + B, A + B] + O(t^3)) \\ &= \exp(t^2[A, B] + O(t^3)). \end{aligned}$$

Cela conclut la preuve du corollaire. □

*Remarque 3.4.10.* — Lorsque  $t \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \exp(t(A + B)) &= I_n + t(A + B) + \frac{1}{2}t^2(A + B)^2 + O(t^3) \\ \exp(tA) \exp(tB) &= I_n + t(A + B) + \frac{1}{2}t^2(A^2 + 2AB + B^2) + O(t^3) \\ \exp(tA) \exp(tB) &= I_n + t(A + B) + \frac{1}{2}t^2(A^2 + 2BA + B^2) + O(t^3). \end{aligned}$$

Par suite, ces trois expressions diffèrent d'un multiple de  $t^2[A, B] + O(t^3)$ , donc sont deux à deux distinctes quand  $[A, B] \neq 0$  et  $t$  est assez petit (mais non nul). Cela prouve qu'on ne peut enlever l'hypothèse que  $A$  et  $B$  commutent dans la formule  $\exp(A) \exp(B) = \exp(A + B)$ .

Nous pouvons maintenant commencer la preuve du théorème 3.4.1. Soit  $G$  un sous-groupe de  $GL(n, \mathbf{R})$ , fermé. Nous allons commencer par prouver que le cône tangent à  $G$  en l'identité est un sous-espace vectoriel. Notons-le  $\mathfrak{g}$ .

LEMME 3.4.11. — Pour  $A \in M_n(\mathbf{R})$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) On a  $A \in \mathfrak{g}$  ;
- (ii) Pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , on a  $\exp(tA) \in G$  ;
- (iii) Il existe une suite  $(t_k)$  de réels non nuls tendant vers 0 telle que  $\exp(t_k A) \in G$  pour tout  $k$ .

*Démonstration.* — Supposons  $A \in \mathfrak{g}$ . Soit  $(A_k)$  une suite de matrices dans  $G$  et  $(t_k)$  une suite de nombres réels strictement positifs qui converge vers 0 tels que  $(A_k - I_n)/t_k$  converge vers  $A$ . Alors,  $A_k = I_n + t_k A + o(t_k)$ . Comme l'exponentielle définit un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans  $M_n(\mathbf{R})$  sur un voisinage de  $I_n$  dans  $GL(n, \mathbf{R})$  et que sa différentielle en 0 est l'identité, il existe (pour  $k$  assez grand) une matrice  $B_k$  vérifiant  $B_k = t_k A + o(t_k)$  et  $A_k = \exp(B_k)$ . Soit  $t \in \mathbf{R}$ . Choisissons une suite  $(m_k)$  d'entiers relatifs telle que  $m_k t_k$  converge vers  $t$  ; par exemple, on prend  $m_k = \lfloor t/t_k \rfloor$ , de sorte que  $t - t_k \leq m_k t_k \leq t$ , d'où  $m_k t_k \rightarrow t$  puisque  $t_k \rightarrow 0$ . Alors,  $m_k B_k = m_k t_k A + o(m_k t_k)$  converge vers  $tA$  et  $A_k^{m_k} = \exp(m_k B_k)$  converge vers  $\exp(tA)$ , car l'exponentielle est continue. Puisque  $A_k \in G$  et que  $G$  est un sous-groupe de  $GL(n, \mathbf{R})$ ,  $A_k^{m_k} \in G$  ; comme  $G$  est une partie fermée de  $GL(n, \mathbf{R})$ , on a donc  $\exp(tA) \in G$ . Cela démontre l'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii).

L'implication (ii)  $\Rightarrow$  (iii) est évidente.

Sous l'hypothèse (iii), on peut supposer  $t_k > 0$ , car  $G$  est un sous-groupe de  $GL(n, \mathbf{R})$ . Pour tout  $k$ , posons  $A_k = \exp(t_k A)$ . Alors,  $A_k = I_n + t_k A + O(t_k^2)$ , donc  $(A_k - I_n)/t_k$  converge vers  $A$ . Cela prouve que  $A$  appartient au cône tangent de  $G$  en l'identité.  $\square$

LEMME 3.4.12. — Le cône  $\mathfrak{g}$  est un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbf{R})$ . Pour  $A, B \in \mathfrak{g}$ , on a  $[A, B] \in \mathfrak{g}$ .

*Remarque 3.4.13.* — Une algèbre de Lie est un espace vectoriel  $V$  muni d'une application bilinéaire antisymétrique  $(A, B) \mapsto [A, B]$  vérifiant la relation (*identité de Jacobi*) :

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]]$$

pour tous  $A, B, C$  dans  $V$ . On vérifie que  $M_n(\mathbf{R})$  muni du crochet  $[A, B] = AB - BA$  est une algèbre de Lie. Autrement dit,  $\mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Lie de  $M_n(\mathbf{R})$ .

*Démonstration.* — On a  $0 \in \mathfrak{g}$  car  $I_n \in G$  et  $\exp(0) = I_n$ . Si  $A, B \in \mathfrak{g}$ , alors  $\exp(tA)\exp(tB) \in G$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ . Le développement limité

$$\exp(tA)\exp(tB) = I_n + t(A + B) + O(t^2)$$

entraîne alors que  $A + B$  appartient à  $\mathfrak{g}$ . Enfin, si  $A \in \mathfrak{g}$  et  $s \in \mathbf{R}$ , on a  $\exp(tsA) \in G$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , donc  $sA \in \mathfrak{g}$ . Enfin, si  $A, B \in M_n(\mathbf{R})$  et  $t \in \mathbf{R}$ , on a le développement limité

$$\exp(tA)\exp(tB)\exp(-tA)\exp(-tB) = I_n + t^2[A, B] + O(t^3).$$

Comme le membre de gauche appartient à  $G$ ,  $[A, B]$  appartient à  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

LEMME 3.4.14. — *Il existe un voisinage  $U$  de 0 dans  $M_n(\mathbf{R})$  tel que, pour  $A \in U$ , les conditions  $\exp(A) \in G$  et  $A \in \mathfrak{g}$  sont équivalentes.*

*Démonstration.* — Si  $A \in \mathfrak{g}$ , on sait déjà que  $\exp(A) \in G$ . Supposons que l'énoncé soit faux; il existe alors une suite  $(A_k)$  d'éléments de  $M_n(\mathbf{R})$  qui tend vers 0 telle que  $\exp(A_k) \in G$  pour tout  $k$  mais  $A_k \notin \mathfrak{g}$ . Soit  $V$  un supplémentaire de  $\mathfrak{g}$  dans  $M_n(\mathbf{R})$ . l'application  $(B, C) \mapsto \exp(B)\exp(C)$  de  $\mathfrak{g} \times V$  dans  $M_n(\mathbf{R})$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et sa différentielle en l'origine est l'application  $(M, N) \mapsto M + N$  de  $\mathfrak{g} \times V$  dans  $M_n(\mathbf{R})$ , donc est un isomorphisme. Par suite, elle réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans  $\mathfrak{g} \times V$  sur un voisinage de  $I_n$  dans  $M_n(\mathbf{R})$ . Pour tout  $k$  assez grand, on peut donc écrire  $\exp(A_k) = \exp(B_k)\exp(C_k)$ , où  $B_k \in \mathfrak{g}$  et  $C_k \in V$ , les suites  $(B_k)$  et  $(C_k)$  tendant vers 0. Comme  $B_k \in \mathfrak{g}$  et  $\exp(A_k) \in G$ , on a donc  $\exp(C_k) = \exp(-B_k)\exp(A_k) \in G$ . Posons  $t_k = \|C_k\|$ . Par hypothèse,  $A_k \notin \mathfrak{g}$ , donc  $C_k \neq 0$  et  $t_k > 0$ . Introduisons la suite  $(C_k/t_k)$  à valeurs dans la sphère unité de  $M_n(\mathbf{R})$  et considérons-en une valeur d'adhérence  $C$ . On a  $C \in V$  et  $\|C\| = 1$ , donc  $C \notin \mathfrak{g}$ . Alors,  $\exp(C_k) = \exp(t_k(C_k/t_k)) = I_n + t_k C + o(t_k)$ , ce qui prouve que  $C \in \mathfrak{g}$ , une contradiction.  $\square$

*Fin de la démonstration du théorème 3.4.1.* — Soit  $U$  un voisinage de 0 dans  $M_n(\mathbf{R})$  et  $V$  un voisinage de  $I_n$  dans  $GL_n(\mathbf{R})$  tels que l'exponentielle induise un difféomorphisme  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $U$  sur  $V$ . Quitte à diminuer  $U$ , on peut supposer qu'il vérifie les conditions du lemme 3.4.14. Cela montre que  $G \cap U = \varphi(\mathfrak{g} \cap V)$ , par suite,  $G \cap U$  est une sous-variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Il reste à établir cette propriété au voisinage de tout point  $g$  de  $G$ . Mais l'application de  $GL(n, \mathbf{R})$  dans lui-même donnée par  $A \mapsto gA$  est un difféomorphisme. Par suite,  $G \cap gU$  est une sous-variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Comme  $gU$  est un voisinage ouvert de  $g$ , cela conclut la preuve du théorème.  $\square$

### § 3.5. Fonctions différentiables sur une sous-variété différentiable

LEMME 3.5.1. — *Soit  $M$  une sous-variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $\mathbf{R}^n$ , soit  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  une application. Soit  $a$  un point de  $M$  et soit  $d = \dim_a(M)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe un voisinage  $U$  de  $a$  dans  $\mathbf{R}^n$  et une application  $F: U \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^p$  qui coïncide avec  $f$  sur  $U \cap M$ .*



(ii) Pour tout ouvert  $V$  de  $\mathbf{H}_d$  et toute immersion  $i: V \rightarrow \mathbf{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^p$  qui induit un homéomorphisme de  $V$  sur un voisinage de  $a$  dans  $M$ , l'application  $f \circ i$  de  $V$  dans  $\mathbf{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  au voisinage de  $i^{-1}(a)$ .

(iii) Il existe un ouvert  $V$  de  $\mathbf{H}_d$  et une immersion  $i: V \rightarrow \mathbf{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^p$  qui induit un homéomorphisme de  $V$  sur un voisinage de  $a$  dans  $M$  tels que l'application  $f \circ i$  de  $V$  dans  $\mathbf{R}$  soit de classe  $\mathcal{C}^p$  au voisinage de  $i^{-1}(a)$ .

*Démonstration.* — Nous conservons les notations des assertions du lemme. (i)  $\Rightarrow$  (ii). Pour  $x \in V \cap i^{-1}(U)$ , on a  $f(i(x)) = F(i(x))$ , si bien que l'on a  $f \circ i = F \circ i$  sur  $V \cap i^{-1}(U)$ . Comme  $F$  et  $i$  sont de classe  $\mathcal{C}^p$ ,  $f \circ i$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $V \cap i^{-1}(U)$ , et cet ensemble est un voisinage de  $a$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Cela résulte de ce qu'il existe un tel ouvert et une telle immersion.

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Soit  $b \in V$  tel que  $i(b) = a$ . On a vu (preuve du théorème) qu'il existe un diféomorphisme  $\varphi$  d'un voisinage ouvert  $W$  de  $b \times \{0\}$  dans  $\mathbf{R}^n$  sur un voisinage ouvert  $U$  de  $a$  dans  $\mathbf{R}^n$  tel que pour tout  $x \in \mathbf{R}^d$  tel que  $(x, 0) \in W$ , on ait  $x \in V$  et  $\varphi(x, 0) = i(x)$ . Quitte à restreindre  $W$  et  $U$ , on peut supposer que  $W = V' \times V''$ , où  $V'$  est un voisinage ouvert de  $b$  dans  $\mathbf{R}^d$  tel que  $V' \cap \mathbf{H}_d \subset V$  et  $V''$  est un voisinage ouvert de  $0$  dans  $\mathbf{R}^{n-d}$ . Alors, il existe une unique application  $F$  de  $U$  dans  $\mathbf{R}$  telle que  $F(\varphi(x, y)) = f(\varphi(x, 0))$  pour tout  $x \in V'$  et tout  $y \in V''$ . L'application  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  et prolonge  $f|_{i(V)}$ .  $\square$

**DÉFINITION 3.5.2.** — Soit  $M$  une sous-variété à bord de  $\mathbf{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^p$  et soit  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  une application. On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  au voisinage de  $a$  si les propriétés équivalentes du lemme précédent sont satisfaites.

L'ensemble des points  $a \in M$  tels que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^p$  au voisinage de  $a$  est un ouvert de  $M$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  si elle l'est au voisinage de tout point de  $M$ .

**LEMME 3.5.3.** — Soit  $M$  une sous-variété à bord de  $\mathbf{R}^m$  de classe  $\mathcal{C}^p$ , soit  $N$  une sous-variété à bord de  $\mathbf{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^p$  et soit  $f: M \rightarrow N$  une application. Soit  $a \in M$  et soit  $b = f(a)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Les composantes  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $f$  sont de classe  $\mathcal{C}^p$  au voisinage de  $a$ .

(ii) Pour toute application  $g$  de  $N$  dans  $\mathbf{R}$  qui est de classe  $\mathcal{C}^p$  au voisinage de  $b$ , l'application  $g \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  au voisinage de  $a$ .

*Démonstration.* — (i)  $\Rightarrow$  (ii). Soit  $d = \dim_a(M)$ , soit  $i$  une immersion d'un ouvert  $V$  de  $\mathbf{R}^d$  dans  $\mathbf{R}^m$  qui induit un homéomorphisme de  $V \cap \mathbf{H}_d$  sur un voisinage de  $a$  dans  $M$ . Par hypothèse, les composantes  $\varphi_1 = f_1 \circ i, \dots, \varphi_n = f_n \circ i$  de  $f \circ i$  sont de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $V$ . Soit  $U$  un voisinage de  $b$  dans  $\mathbf{R}^n$  et  $G: U \rightarrow \mathbf{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^p$  qui coïncide avec  $g$  sur  $U \cap N$ . Pour  $x \in V \cap f^{-1}(U)$ , on a

$$g \circ f(i(x)) = G(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)),$$

donc  $g \circ f \circ i$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ . Cela prouve que  $g \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  au voisinage de  $a$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Les projections  $g_1, \dots, g_m$  de  $\mathbf{R}^m$  dans  $\mathbf{R}$  sont de classe  $\mathcal{C}^p$ . Leurs restrictions à  $M$  (notées de la même façon) sont donc de classe  $\mathcal{C}^p$ . Pour tout  $j$ , on a  $f_j = g_j \circ f$ , donc  $f_j$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ .  $\square$

LEMME 3.5.4. — Soit  $M$  une sous-variété de  $\mathbf{R}^m$ ,  $N$  une sous-variété de  $\mathbf{R}^n$ , toutes deux de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $f: M \rightarrow N$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $a \in M$  et soit  $b = f(a)$ .

a) Il existe une unique application linéaire  $T_a(f): T_a(M) \rightarrow T_b(N)$  telle que l'on ait pour tout  $u \in C_a(M)$ , toute suite  $(x_k)$  de points de  $M$  et toute suite  $(t_k)$  de nombres réels strictement positifs qui tend vers 0 et telle que  $(x_k - a)/t_k \rightarrow u$ ,

$$\frac{f(x_k) - f(a)}{t_k} \rightarrow T_a f(u).$$

b) En outre,  $T_a(f)$  applique  $C_a(M)$  dans  $C_a(N)$ .

c) Pour tout voisinage  $U$  de  $a$  dans  $\mathbf{R}^m$  et toute application  $F: U \rightarrow \mathbf{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  qui coïncide avec  $f$  sur  $M \cap U$ ,  $DF(a)$  coïncide avec  $T_a(f)$  sur  $T_a(M)$  et, en particulier, applique  $C_a(M)$  dans  $C_b(N)$  et  $T_a(M)$  dans  $T_b(N)$ .

*Démonstration.* — Soit  $U$  un voisinage de  $a$  dans  $\mathbf{R}^m$ , soit  $F: U \rightarrow \mathbf{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  qui coïncide avec  $f$  sur  $M \cap U$ . Soit  $u \in C_a(M)$ , soit  $(x_k)$  une suite de points de  $M$ , soit  $(t_k)$  une suite de nombres réels strictement positifs qui tend vers 0 telle que  $(x_k - a)/t_k \rightarrow u$ . Alors,  $x_k = a + t_k u + o(t_k)$ , donc

$$f(x_k) = F(x_k) = F(a) + t_k DF(a)(u) + o(t_k) = b + t_k DF(a)(u) + o(t_k),$$

ce qui prouve que  $(f(x_k) - b)/t_k \rightarrow DF(a)(u)$ .

En particulier,  $DF(a)(u)$  appartient à  $C_b(N)$ . Comme les cônes tangents  $C_a(M)$  et  $C_b(N)$  engendrent  $T_a(M)$  et  $T_b(N)$  respectivement (on a égalité si  $a$  est intérieur, et le cône tangent est un demi-espace de l'espace tangent sinon) et que  $DF(a)$  est linéaire, elle applique  $T_a(M)$  dans  $T_a(N)$ . Cela prouve que l'application linéaire  $DF(a)$  vérifie les conditions a) et b).

Cela démontre en outre que la restriction de  $DF(a)$  à l'espace tangent  $T_a(M)$  ne dépend pas du choix de l'application  $F$  choisie, d'où l'assertion c).  $\square$

THÉORÈME 3.5.5 (Théorème des extrêma liés). — Soit  $M$  une sous-variété de  $\mathbf{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , soit  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $a \in M$ ; supposons que  $a$  soit un minimum local de  $f$  c'est-à-dire qu'il existe un voisinage  $U$  de  $a$  dans  $M$  tel que  $f(x) \geq f(a)$  pour tout  $x \in U$ .

a) Si  $a \in \text{Int}(M)$ , alors  $T_a(f) = 0$ .

b) Si  $a \in \partial(M)$ , alors  $T_a(f)(C_a(M)) \subset \mathbf{R}_+$ .

*Démonstration.* — Par hypothèse,  $f$  applique  $U$  dans la variété à bord  $N = [f(a), +\infty[$ . D'après le lemme précédent,  $T_a(f)$  applique  $C_a(M)$  dans le cône tangent en  $f(a)$  de  $N$ ,

à savoir  $\mathbf{R}_+$ , d'où la seconde assertion. Si  $a \in \text{Int}(M)$ ,  $C_a(M) = T_a(M)$  est un espace vectoriel, donc son image par  $T_a(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}$  contenu dans  $\mathbf{R}_+$ ; il est nul.  $\square$

Soit  $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ ; on suppose que  $p \geq 1$ . Soit  $M, N$  des sous-variétés de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $\mathbf{R}^m$  et  $\mathbf{R}^n$  respectivement. Soit  $f: M \rightarrow N$  une application de classe  $\mathcal{C}^p$ .

Soit  $a \in M$ . On dit que  $f$  est une immersion (*resp.* une submersion) en  $a$  si  $T_a(f)$  est injective (*resp.* surjective). Plus généralement, soit  $B$  une sous-variété de  $N$ . On dit que  $f$  est transverse à  $B$  si pour tout  $a \in f^{-1}(B)$ ,

$$T_{f(a)}(B) + T_a f(M_a) = T_{f(a)}(N).$$

Lorsque  $B$  est réduite à un point,  $f$  est transverse à  $B$  si et seulement si c'est une submersion en tout point de  $f^{-1}(B)$ .

**THÉORÈME 3.5.6.** — Soit  $p \geq 1$ . Soit  $M, N$  des sous-variétés de classe  $\mathcal{C}^p$  d'un espace euclidien,  $N$  étant sans bord. Soit  $f: M \rightarrow N$  une application de classe  $\mathcal{C}^p$ . Soit  $B$  une sous-variété de  $N$  et soit  $A = f^{-1}(B)$ . On suppose que les applications  $f$  et  $f|_{\partial(M)}$  sont transverses à  $B$  et à  $\partial(B)$ , et que  $f^{-1}(\partial(B)) \cap \partial(M) = \emptyset$ . Alors  $A$  est une sous-variété de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $M$ , de bord

$$\partial(A) = (A \cap \partial(M)) \cup f^{-1}(\partial(B)).$$

De plus, pour tout point  $a \in A$ ,  $T_a(A) = (T_a f)^{-1}(T_a(B))$ ; en particulier,

$$\dim_a(A) = \dim_a(M) + \dim_{f(a)}(B) - \dim_{f(a)}(N).$$

*Démonstration.* — Soit  $a$  un point de  $A$ ; posons  $b = f(a)$ .

a) Supposons d'abord que  $b \in \text{Int}(B)$ . Il existe ainsi un voisinage  $V$  de  $b$  dans  $\mathbf{R}^n$  et un  $\mathcal{C}^p$ -difféomorphisme  $\psi$  de  $V$  sur un voisinage  $\psi(V)$  de 0 dans  $\mathbf{R}^n$  tels que  $\psi(V \cap B) = \mathbf{R}^e \times \{0\}$  et  $\psi(b) = 0$ ; soit  $q$  la projection de  $\mathbf{R}^n$  sur  $\mathbf{R}^{n-e}$ . Alors,

$$A \cap f^{-1}(V) = (q \circ \psi \circ f)^{-1}(0);$$

Si l'on remplace  $M$  par  $f^{-1}(V)$ ,  $N$  par l'origine de  $\mathbf{R}^{n-e}$ ,  $e$  par 0 et  $f$  par  $q \circ \psi \circ f$ , les hypothèses de transversalité restent vérifiées, ce qui permet de supposer que  $N$  est l'origine  $\{e\}$  de  $\mathbf{R}^n$ , et que  $f$  est une submersion en  $a$ , de même que  $f|_{\partial(M)}$ .

Quitte à remplacer  $M$  un voisinage de  $a$  dans  $M$ , on peut aussi supposer qu'il existe un voisinage  $U_1$  de  $a$  dans  $\mathbf{R}^m$  et une application  $F: U_1 \rightarrow \mathbf{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^p$  qui coïncide avec  $a$  sur  $M$ . Soit alors  $U$  un voisinage de  $a$  dans  $U_1$  et  $\varphi$  un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $U$  sur un voisinage de 0 dans  $\mathbf{R}^m$  tel que  $\varphi(a) = 0$  et tel que

$$\varphi(M \cap U) = \begin{cases} (\mathbf{R}^d \times \{0\}) \cap \varphi(U) & \text{si } a \in \text{Int}(M); \\ \mathbf{H}_d \times \{0\} & \text{si } a \in \partial(M). \end{cases}$$

Alors,  $\varphi(A \cap U) = (F \circ \varphi^{-1})^{-1}(0) \cap \varphi(M \cap U)$ . Cela permet de supposer que  $a = 0$ , que  $M = \mathbf{R}^d \times \{0\}$  ou  $M = \mathbf{H}^d \times \{0\}$  (suivant que  $a \in \text{Int}(M)$  ou  $a \in \partial(M)$ ) et que  $f$  est la restriction à  $M$  d'une application  $F$  de classe  $\mathcal{C}^p$  définie sur un voisinage  $U$  de 0.

Pour finir, il est plus commode de séparer les deux cas. Supposons d'abord que  $a \in \text{Int}(M)$ . Par construction, la restriction à  $\mathbf{R}^d \times \{0\}$  est une submersion en 0, c'est-à-dire que les dérivées partielles  $\partial_1 F(0), \dots, \partial_d F(0)$  engendrent  $\mathbf{R}^n$ . Quitte à renuméroter les variables  $x_1, \dots, x_n$ , on peut supposer que  $\partial_{d-n+1} F(0), \dots, \partial_d F(0)$  forment une base de  $\mathbf{R}^n$ . Soit  $\theta: U \rightarrow \mathbf{R}^m = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-n-1}$  l'application donnée par

$$\theta(x_1, \dots, x_d, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{d-n}, F(x_1, \dots, x_m), x_{n+1}, \dots, x_m).$$

Elle est de classe  $\mathcal{C}^p$  et sa différentielle en l'origine est inversible. Quitte à restreindre  $U$ , elle réalise un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $U$  sur un voisinage ouvert de 0 dans  $\mathbf{R}^m$ . Alors,  $U \cap M = U \cap \theta^{-1}(\mathbf{R}^n \times \{0\})$  et  $U \cap A = U \cap \theta^{-1}(\mathbf{R}^{d-n} \times \{0\})$ . Cela prouve que  $U \cap A$  est une sous-variété différentiable, sans bord, de  $\mathbf{R}^m$ , et de dimension  $d - n = \dim_a(M) - \dim_b(N) + \dim_b(B)$  en  $a$ . En outre, on a  $T_a(M) = D\theta(0)^{-1}(\mathbf{R}^d \times \{0\})$  et

$$T_a(A) = D\theta(0)^{-1}(\mathbf{R}^{d-n} \times \{0\}) = DF(0)^{-1}(\{0\}) \cap D\theta(0)^{-1}(\mathbf{R}^n \times \{0\}) = Df(0)^{-1}(T_b(B)).$$

Traitons maintenant le cas où  $a \in \partial(M)$ . Par construction, la restriction de  $F$  à  $\partial(M) = \{0\} \times \mathbf{R}^{d-1} \times \{0\}$  est une submersion en 0; autrement dit, les dérivées partielles  $\partial_2 F(0), \dots, \partial_d F(0)$  engendrent  $\mathbf{R}^n$ . Quitte à renuméroter les variables  $x_2, \dots, x_d$ , on peut supposer que  $\partial_2 F(0), \dots, \partial_{n+1} F(0)$  forment une base de  $\mathbf{R}^n$ . Soit alors  $\theta: U \rightarrow \mathbf{R}^m = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-n-1}$  l'application donnée par

$$\theta(x_1, \dots, x_d, \dots, x_n) = (x_1, F(x_1, \dots, x_m), x_{n+2}, \dots, x_m).$$

Elle est de classe  $\mathcal{C}^p$  et sa différentielle en l'origine est inversible. Quitte à restreindre  $U$ , elle réalise un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $U$  sur un voisinage ouvert de 0 dans  $\mathbf{R}^m$ . On a  $M = \theta^{-1}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{d-n-1} \times \{0\})$  et  $A = \theta^{-1}(\mathbf{R}_+ \times \{0\} \times \mathbf{R}^{d-n-1} \times \{0\})$ . Cela prouve que  $A$  est une variété à bord de dimension  $d - n = \dim_a(M) - \dim_b(N) + \dim_b(B)$  et que son bord est égal à

$$\partial(A) = \theta^{-1}(0 \times \{0\} \times \mathbf{R}^{d-n-1} \times \{0\}) = A \cap \partial(M).$$

En outre,  $T_a(A) = (T_a f)^{-1}(T_b(B))$  et  $T_a(\partial(A)) = T_a(A) \cap T_a(\partial(M))$ .

*b)* Supposons maintenant que  $b \in \partial(B)$ . Par hypothèse, on a donc  $a \in \text{Int}(M)$ . Soit  $V$  un voisinage de  $b$  dans  $\mathbf{R}^n$  et  $\psi: V \rightarrow \mathbf{R}^n$  un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $V$  sur un voisinage de 0 dans  $\mathbf{R}^n$  tel que  $\psi(b) = 0$  et tel que  $\psi(V \cap N) = \psi(V) \cap (\mathbf{R}^k \times \{0\})$ ; soit  $q: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n-k}$  la projection sur les dernières coordonnées. Quitte à remplacer  $M$  par  $M \cap f^{-1}(V)$  et  $f$  par  $q \circ \psi \circ f$ , on peut supposer que  $N = \mathbf{R}^n$  et  $b = 0$ . Soit alors  $V'$  un voisinage ouvert de 0 dans  $\mathbf{R}^n$  et  $\psi': V' \rightarrow \mathbf{R}^n$  un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $V'$  sur un voisinage de 0 dans  $\mathbf{R}^n$  tel que  $\psi'(b) = 0$  et  $\psi'(V \cap B) = \psi'(V) \cap (\mathbf{R}^{e-1} \times \mathbf{R}_+ \times \{0\})$ ; soit  $q': \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n-e+1}$  la projection sur les dernières coordonnées. On a alors  $A \cap V' = (q' \circ \psi' \circ f)^{-1}(\mathbf{R}_+ \times \{0\})$ . Cela permet de supposer que  $B = \mathbf{R}_+ \times \{0\}$  dans  $\mathbf{R}^n$ ; alors,  $\partial(B) = \{0\}$ .

Soit  $U_1$  un voisinage ouvert de  $a$  dans  $\mathbf{R}^m$  et  $F: U_1 \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application de classe  $\mathcal{C}^p$  qui coïncide avec  $f$  sur  $U_1 \cap M$ . Soit alors  $U$  un voisinage ouvert de  $a$  dans  $U_1$  et  $\varphi$

un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $U$  sur un voisinage ouvert de 0 dans  $\mathbf{R}^m$  tel que  $\varphi(a) = 0$  et  $\varphi(U \cap M) = \mathbf{R}^d \times \{0\}$ . Alors,  $\varphi(U \cap A) = (F \circ \varphi^{-1})(\mathbf{R}_+ \times \{0\}) \cap \varphi(U \cap M)$ , ce qui permet de supposer que  $M = U \cap (\mathbf{R}^d \times \{0\})$  et que  $f$  est la restriction à  $M$  d'une application  $F$  de classe  $\mathcal{C}^p$  définie sur  $U$ .

L'hypothèse que  $f$  est transverse à  $\partial(B)$  s'énonce  $T_a f(T_a(M)) + T_b(\partial(B)) = T_b(\mathbf{R}^n)$ . Comme on a  $T_a(M) = \mathbf{R}^d \times \{0\}$  et  $T_b(\partial(B)) = 0$ , il en découle que  $\partial_1 F(0), \dots, \partial_d F(0)$  engendrent  $\mathbf{R}^n$ . Quitte à renuméroter les coordonnées  $x_1, \dots, x_m$ , on peut supposer que  $\partial_1 F(0), \dots, \partial_n F(0)$  forment une base de  $\mathbf{R}^n$ . Alors, l'application  $\theta$  de  $U$  dans  $\mathbf{R}^m$  définie par

$$\theta(x_1, \dots, x_m) = (F(x), x_{n+1}, \dots, x_m)$$

est de classe  $\mathcal{C}^p$  et sa différentielle en l'origine est un isomorphisme. Quitte à diminuer  $U$ , elle induit donc un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $U$  sur un voisinage ouvert de 0 dans  $\mathbf{R}^n$ . Alors,  $\theta(M) = \theta(U) \cap \mathbf{R}^d \times \{0\}$ , tandis que  $\theta(A) = \theta(U) \cap (\mathbf{R}_+ \times \{0\}) \times \mathbf{R}^{d-n} \times \{0\}$ . Il en résulte que  $A$  est une sous-variété à bord de  $M$  de dimension  $d - n + 1 = \dim_a(M) - \dim_{f(a)}(N) + \dim_{f(a)}(B)$  en  $a$ , et de bord  $\theta^{-1}(\{0\} \times \mathbf{R}^{d-n} \times \{0\}) = f^{-1}(\partial(B))$ . En outre, on a  $T_a(M) = D\theta(0)^{-1}(\mathbf{R}^d \times \{0\})$  et

$$\begin{aligned} T_a(A) &= D\theta(0)^{-1}(\mathbf{R} \times \{0\} \times \mathbf{R}^{d-n} \times \{0\}) \\ &= DF(0)^{-1}(\mathbf{R} \times \{0\}) \cap D\theta(0)^{-1}(\mathbf{R}^n \times \{0\}) \\ &= Df(0)^{-1}(T_b(B)). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} T_a(\partial(A)) &= D\theta(0)^{-1}(\{0\} \times \{0\} \times \mathbf{R}^{d-n} \times \{0\}) \\ &= DF(0)^{-1}(0) \cap D\theta(0)^{-1}(\mathbf{R}^n \times \{0\}) \\ &= Df(0)^{-1}(T_b(\partial(B))). \end{aligned}$$

Cela conclut la démonstration du théorème. □

*Exercice 3.5.7.* — On pose  $M = \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ ,  $N = \mathbf{R}$  et  $B = \mathbf{R}_+$ . Soit  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  et soit  $f: M \rightarrow N$  l'application donnée par  $f(x, y) = y - g(x)$ .

Prouver que  $f$  est une submersion en tout point, et que  $f|_{\partial(M)}$  est une submersion en  $(x, 0)$  si et seulement si  $g'(x) \neq 0$ .

Donner un exemple d'application  $g$  telle que  $f^{-1}(B)$  ne soit pas une sous-variété.

En déduire que l'on ne peut omettre l'hypothèse que  $f^{-1}(\partial(B))$  soit disjointe de  $\partial(M)$ .



## CHAPITRE 4

### VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

---

#### § 4.1. Définition des variétés différentiables

La notion de variété différentiable que nous définissons maintenant abstrait des sous-variétés leur substantifique moëlle : un espace topologique raisonnable (variété topologique, métrisable et séparable) et la notion de fonction de classe  $\mathcal{C}^p$ .

DÉFINITION 4.1.1 (Faisceau de fonctions). — Soit  $M$  un espace topologique. Un faisceau de fonctions  $\mathcal{F}$  sur  $M$  est la donnée, pour tout ouvert  $U$  de  $M$ , d'un sous-ensemble  $\mathcal{F}(U)$  de l'ensemble des fonctions de  $U$  dans  $\mathbf{R}$  vérifiant les deux conditions suivantes :

- a) Si  $U$  et  $V$  sont des ouverts de  $M$  tels que  $V \subset U$ , et si  $f \in \mathcal{F}(U)$ , la restriction à  $V$  de  $f$  appartient à  $\mathcal{F}(V)$  ;
- b) Si  $U$  est un ouvert de  $M$ ,  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$  une application, alors  $f \in \mathcal{F}(U)$  si et seulement si tout point  $x \in U$  possède un voisinage  $V$  dans  $U$  tel que  $f|_V \in \mathcal{F}(V)$ .

Exemple 4.1.2. — a) Soit  $M$  un espace topologique. Pour tout ouvert  $U$  de  $M$ , soit  $\mathcal{C}_M(U)$  l'ensemble des fonctions continues de  $U$  dans  $\mathbf{R}$ . Alors  $\mathcal{C}_M$  est un faisceau de fonctions.

b) Soit  $M$  une sous-variété différentiable (à bord) de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $\mathbf{R}^n$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $M$ , soit  $\mathcal{C}_M^p(U)$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $U$ . Alors,  $\mathcal{C}_M^p$  est un faisceau de fonctions.

DÉFINITION 4.1.3. — Soit  $M$  un espace topologique et soit  $\mathcal{F}$  un faisceau de fonctions sur  $M$ . On dit que  $(M, \mathcal{F})$  est une variété différentiable (à bord) de classe  $\mathcal{C}^p$  si les conditions suivantes sont satisfaites :

- a) L'espace topologique  $M$  est métrisable et séparable ;
- b) Pour tout point  $a$  de  $M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $a$  dans  $M$ , un entier  $d$ , un ouvert  $V$  de  $\mathbf{H}_d$  et un homéomorphisme  $\varphi$  de  $U$  sur  $V$  tel que pour toute ouvert  $W$  contenu dans  $V$  et toute fonction  $f: W \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f \circ \varphi \in \mathcal{F}(\varphi^{-1}(W))$  si et seulement si  $f \in \mathcal{C}^k(W)$ .

La première condition est de nature globale et permet d'éviter d'avoir à considérer des espaces topologiques dont l'étude est compliquée et qui n'apparaissent pas en

pratique. La seconde est de nature locale ; elle entraîne déjà que  $M$  est une variété topologique à bord.

Soit  $(M, \mathcal{F})$  une variété différentiable (à bord) de classe  $\mathcal{C}^p$ . Le faisceau  $\mathcal{F}$  est appelé faisceau des fonctions de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $M$  et noté  $\mathcal{C}_M^p$ .

Un homéomorphisme  $\varphi$  comme dans la définition est appelé *carte* de classe  $\mathcal{C}^p$ . Comme les fonctions coordonnées sur  $\mathbf{R}^d$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$ , les composantes  $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$  d'une carte  $\varphi$  définie sur  $U$  appartiennent à  $\mathcal{C}_M^p(U)$ .

Soit  $\varphi: U \rightarrow V$  et  $\varphi': U' \rightarrow V'$  deux cartes, où  $V$  est un ouvert de  $\mathbf{H}_d$  et  $V'$  un ouvert de  $\mathbf{H}_{d'}$ . Soit  $\psi$  l'unique application de  $\varphi(U \cap U')$  sur  $\varphi'(U \cap U')$  tel que  $\psi(\varphi(x)) = \varphi'(x)$  pour tout  $x \in U \cap U'$ . Puisque  $\varphi$  et  $\varphi'$  induisent des homéomorphismes de  $U \cap U'$  sur  $\varphi(U \cap U')$  et  $\varphi'(U \cap U')$  respectivement, l'application  $\psi$  est un homéomorphisme, dit de *changement de cartes*.

LEMME 4.1.4. — Soit  $(M, \mathcal{C}_M^p)$  une variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^p$ . Soit  $\varphi: U \rightarrow V$  et  $\varphi': U' \rightarrow V'$  deux cartes et soit  $\psi: \varphi(U \cap U') \rightarrow \varphi'(U \cap U')$  l'homéomorphisme de changement de cartes. Alors,  $\psi$  est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^p$ .

*Démonstration.* — Posons  $W = U \cap U'$  ; les fonctions  $\varphi_1, \dots, \varphi_d$  appartiennent à  $\mathcal{C}_M^p(U)$ , donc leurs restrictions à  $W$  appartiennent à  $\mathcal{C}_M^p(W)$ . De même, les restrictions à  $W$  des fonctions  $\varphi'_1, \dots, \varphi'_{d'}$  appartiennent à  $\mathcal{C}_M^p(W)$ . Notons  $\psi_1, \dots, \psi_{d'}$  les composantes de  $\psi$ . Puisque l'on a l'égalité  $\varphi'_j = \psi_j \circ \varphi$  sur  $W$ , la définition d'une carte entraîne que  $\psi_j$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ . Ainsi,  $\psi$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ .

En échangeant les rôles de  $\varphi$  et  $\varphi'$ , le même argument prouve que  $\psi^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ . Il en résulte que  $\psi$  est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $V$  sur  $V'$ .  $\square$

Ce lemme fournit une autre approche des variétés différentiables que nous présentons comme une construction.

Soit  $M$  un espace topologique. Soit  $(U_i)$  un recouvrement de  $M$  par des ouverts  $U_i$  ; pour tout  $i$ , soit  $d_i \in \mathbf{N}$  et soit  $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$  un homéomorphisme de  $U_i$  sur un ouvert  $V_i$  de  $\mathbf{H}_{d_i}$ . On dit que la famille  $(U_i, \varphi_i)$  est un *atlas* de classe  $\mathcal{C}^p$  si pour tout couple  $(i, j)$ , l'application  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  de  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  sur  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$  est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^p$ .

PROPOSITION 4.1.5. — Soit  $M$  un espace topologique métrisable et séparable. Soit  $(U_i, \varphi_i)$  un atlas de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $M$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $M$ , soit  $\mathcal{C}_M^p(U)$  l'ensemble des fonctions  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$  telles que pour tout  $i$ , l'application  $f \circ \varphi_i^{-1}$  de  $\varphi_i(U \cap U_i)$  dans  $\mathbf{R}$  soit de classe  $\mathcal{C}^p$ .

Alors,  $(M, \mathcal{C}_M^p)$  est une variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^p$ .



*Démonstration.* — Soit  $U$  et  $V$  des ouverts de  $M$  tels que  $V \subset U$ . Soit  $f \in \mathcal{C}_M^p(U)$ . Pour tout  $i$ , l'application  $f|_V \circ \varphi_i^{-1}$  de  $\varphi_i(V \cap U_i)$  dans  $\mathbf{R}$  est la restriction à  $\varphi_i(U \cap U_i)$  de l'application  $f \circ \varphi_i^{-1}$  définie sur  $\varphi_i(U \cap U_i)$ , donc est de classe  $\mathcal{C}^p$ . Par suite,  $f|_V$  appartient à  $\mathcal{C}_M^p(V)$ .

Fixons un indice  $i$ ; soit  $W$  un ouvert de  $V_i$  et soit  $f: W \rightarrow \mathbf{R}$  une application. Si  $f \circ \varphi_i \in \mathcal{C}_M^p(\varphi_i^{-1}(W))$ , alors  $f \in \mathcal{C}^k(W)$ , par définition de  $\mathcal{C}_M^p$ . Inversement, supposons que  $f \in \mathcal{C}^k(W)$ . Pour tout  $j$ , l'application  $f \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  sur  $\varphi_j(U_j \cap \varphi_i^{-1}(W))$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  comme composée de  $f$  et de l'application  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  qui est de classe  $\mathcal{C}^p$ . Cela démontre que  $f \circ \varphi_i \in \mathcal{C}_M^p(\varphi_i^{-1}(W))$ .

Par suite,  $(M, \mathcal{C}_M^p)$  est une variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^p$ .  $\square$

Si  $q \leq p$ , un atlas de classe  $\mathcal{C}^p$  sur un espace topologique est aussi un atlas de classe  $\mathcal{C}^q$ . Par suite, toute variété différentiable  $(M, \mathcal{C}_M^p)$  de classe  $\mathcal{C}^p$  définit une variété différentiable  $(M, \mathcal{C}_M^q)$  de classe  $\mathcal{C}^q$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $M$ ,  $\mathcal{C}_M^q(U)$  est l'ensemble des fonctions  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$  telle que pour toute carte  $(W, \varphi)$  de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $M$ ,  $f \circ \varphi^{-1}$  soit de classe  $\mathcal{C}^q$  sur  $\varphi(W \cap U)$ . En particulier,  $\mathcal{C}_M^p(U) \subset \mathcal{C}_M^q(U)$ .

**PROPOSITION 4.1.6.** — *Soit  $M$  une sous-variété différentiable (à bord) de  $\mathbf{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^p$ . Alors,  $(M, \mathcal{C}_M^p)$  est une variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^p$ .*

*Démonstration.* — Comme  $M$  est un sous-espace de  $\mathbf{R}^n$ , c'est automatiquement un espace topologique métrisable et séparable.

Pour tout point  $a$  de  $M$ , il existe un entier  $d \geq 0$ , un ouvert  $V$  de  $\mathbf{H}_d$  et une immersion  $i: V \rightarrow \mathbf{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^p$  qui induit un homéomorphisme de  $V$  sur un voisinage  $U$  de  $a$  dans  $M$ . On a démontré qu'une fonction  $f$  sur  $U$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  si et seulement si la fonction  $f \circ i^{-1}$  sur  $V$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ . Plus généralement, si  $W$  est un ouvert de  $M$  contenu dans  $U$ , une fonction  $f$  sur  $W$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  si et seulement si la fonction  $f \circ i^{-1}|_W$  sur  $W$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ . Cela prouve que  $(M, \mathcal{C}_M^p)$  vérifie la seconde condition de la définition d'une variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^p$ .

La proposition est ainsi démontrée.  $\square$

*Exemple 4.1.7.* — Soit  $M$  une variété différentiable (à bord) et soit  $U$  un ouvert de  $M$ . Muni de la restriction à  $U$  du faisceau  $\mathcal{C}_M^p$ ,  $U$  est une variété différentiable à bord.

**DÉFINITION 4.1.8.** — *Soit  $M$  et  $N$  des variétés différentiables (à bord) de classe  $\mathcal{C}^p$ . On dit qu'une application  $f: M \rightarrow N$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  si elle est continue et si pour tout ouvert  $U$  de  $N$  et toute fonction  $u \in \mathcal{C}_N^p(U)$  de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $U$ , la fonction  $u \circ f$  sur l'ouvert  $f^{-1}(U)$  de  $M$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ .*

Un isomorphisme de variétés est une application  $f$  entre ces variétés qui est de classe  $\mathcal{C}^p$ , bijective, et dont l'inverse est de classe  $\mathcal{C}^p$ .

*Exemples 4.1.9.* — a) Pour tout ouvert  $U$  et toute suite finie  $(f_1, \dots, f_n)$  d'éléments de  $\mathcal{C}_M^p(U)$ , l'application de  $U$  dans  $\mathbf{R}^n$  donnée par  $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ .

b) Une carte  $(U, \varphi)$  d'une variété différentiable est un isomorphisme de variétés de  $U$  sur  $\varphi(U)$ .

LEMME 4.1.10. — Soit  $M$  et  $N$  des variétés différentiables (à bord) de classe  $\mathcal{C}^p$ , soit  $f$  une application de  $M$  dans  $N$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) L'application  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  ;
- b) Pour tout  $a \in M$ , toute carte  $(U, \varphi)$  sur  $M$  dont le domaine de définition est un voisinage ouvert de  $a$  et toute carte  $(V, \psi)$  sur  $N$  dont le domaine de définition est un voisinage ouvert de  $f(a)$ , il existe un voisinage  $U'$  de  $a$  contenu dans  $U$  tel que  $f(U') \subset V$  et que l'application  $\psi \circ f \circ (\varphi|_{U'})^{-1}$  de  $\varphi(U')$  dans  $\psi(V)$  soit de classe  $\mathcal{C}^p$  ;
- c) Pour tout  $a \in M$ , il existe une carte  $(U, \varphi)$  sur  $M$  dont le domaine de définition est un voisinage ouvert de  $a$  et une carte  $(V, \psi)$  sur  $N$  dont le domaine de définition est un voisinage ouvert de  $f(a)$  telles que  $f(U) \subset V$  et que l'application  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  de  $\varphi(U)$  dans  $\psi(V)$  soit de classe  $\mathcal{C}^p$ .

## § 4.2. Partitions de l'unité

DÉFINITION 4.2.1. — Soit  $X$  un espace topologique et soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . On appelle partition continue de l'unité faiblement subordonnée au recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$  toute famille  $(f_i)_{i \in I}$  vérifiant les deux propriétés suivantes :

- a) Pour tout  $i \in I$ ,  $f_i$  est une fonction continue de  $X$  dans  $[0, 1]$  telle que  $f_i(x) = 0$  pour  $x \notin U_i$  ;
- b) Pour tout  $x \in X$ , on a  $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$ .

On dit qu'une telle partition de l'unité est subordonnée au recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$  si pour tout  $i$ , le support de  $f_i$  est contenu dans  $U_i$ .

On dit qu'elle est localement finie si pour tout  $a \in X$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $a$  dans  $X$  et un ensemble  $J \subset I$  tel que  $\text{supp}(f_i) \cap U = \emptyset$  pour tout  $i \in I \setminus J$ .

THÉORÈME 4.2.2 (Stone). — Soit  $X$  un espace topologique métrisable. Pour tout recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$ , il existe une partition de l'unité subordonnée à  $(U_i)_{i \in I}$  qui est localement finie.

PROPOSITION 4.2.3. — Soit  $X$  un espace topologique métrisable. Pour tout recouvrement ouvert de  $X$ , il existe une partition continue de l'unité qui lui est faiblement subordonnée.

*Démonstration.* — Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $X$  ; on suppose que  $I$  n'est pas vide. Soit  $d$  une distance sur  $X$  qui définit sa topologie. Quitte à composer  $d$  avec

l'application  $t \mapsto t/(1+t)$ , on peut supposer que  $d(x, y) \leq 1$  pour tous  $x, y \in X$ . Pour tout  $i \in I$  et tout  $x \in X$ , posons

$$f_i(x) = d(x, \complement U_i) = \inf_{y \in \complement U_i} d(x, y).$$

Comme  $\complement U_i$  est fermé dans  $X$ , on a  $f_i(x) = 0$  si et seulement si  $x \notin U_i$ . Pour tous  $x, y \in X$  et tout  $z \in X$ , on a  $f_i(x) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , donc  $f_i(x) \leq d(x, y) + f_i(y)$ ; de même,  $f_i(y) \leq d(x, y) + f_i(x)$ , si bien que  $|f_i(x) - f_i(y)| \leq d(x, y)$ . Cela prouve que  $f_i$  est continue sur  $X$ , et même uniformément continue.

Fixons un bon ordre  $<$  sur l'ensemble  $I$ , c'est-à-dire un ordre (nécessairement total) pour lequel toute partie non vide de  $I$  possède un plus petit élément; l'existence d'un tel ordre est un axiome de la théorie des ensembles qui équivaut au lemme de Zorn ou à l'axiome du choix. Il sera commode de supposer que  $I$  a un plus grand élément  $\omega$  (fixer a priori un élément  $\omega$  de  $I$ , se donner un bon ordre sur l'ensemble complémentaire, décréter que tout élément  $i \in I$  tel que  $i \neq \omega$  vérifie  $i < \omega$ ; constater que l'on a défini un bon ordre sur  $I$ ).

Pour tout  $i \in I$  et tout  $x \in X$ , on pose

$$g_i(x) = \sup_{j < i} f_j(x), \quad h_i(x) = \sup_{j \leq i} f_j(x).$$

(Si  $i$  est le plus petit élément de  $I$ , on pose  $g_i(x) = 0$ ; cela revient à prendre les bornes supérieures dans l'intervalle  $[0; 1]$ .) Observons que  $h_\omega(x) = \sup_{i \in I} h_i(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ .

Soit  $i \in I$ ; soit  $x, y \in X$ . En passant à la borne supérieure dans l'inégalité  $f_j(x) \leq f_j(y) + d(x, y)$  pour tout  $j < i$ , on obtient  $g_i(x) \leq g_i(y) + d(x, y)$ ; par symétrie, on a aussi  $g_i(y) \leq g_i(x) + d(x, y)$ , d'où  $|g_i(x) - g_i(y)| \leq d(x, y)$ . Cela prouve que  $g_i$  est uniformément continue. Le même argument prouve que  $h_i$  est uniformément continue, ainsi que  $h$ . Par définition,  $h_i(x) = \sup(f_i(x), g_i(x))$ .

Pour tout  $x \in X$  et tout  $i \in I$ , posons alors  $u_i(x) = h_i(x) - g_i(x)$ . Si  $x \notin U_i$ ,  $f_i(x) = 0$ , donc  $h_i(x) = g_i(x)$  puisque  $g_i(x) \geq 0$ ; par suite,  $u_i(x) = 0$ .

Démontrons par récurrence transfinie que pour tout  $i \in I$ , la famille  $(u_j(x))_{j \leq i}$  est sommable, de somme  $h_i(x)$ . Supposons cette relation vérifiée pour tout  $j \in I$  tel que  $j < i$ . Par définition de la somme d'une famille de termes positifs,

$$\begin{aligned} \sum_{j \leq i} u_j(x) &= \sup_{\substack{J \leq i \\ J \text{ fini}}} \sum_{j \in J} u_j(x) \\ &= u_i(x) + \sup_{\substack{J < i \\ J \text{ fini}}} \sum_{j \in J} u_j(x) \\ &= u_i(x) + \sup_{j < i} \sup_{\substack{J \leq j \\ J \text{ fini}}} \sum_{j \in J} u_j(x) \\ &= u_i(x) + \sup_{j < i} \left( \sum_{k \leq j} u_k(x) \right), \end{aligned}$$

où l'on a noté  $J < i$  pour signifier que tout élément  $j$  de  $J$  vérifie  $j < i$ , et de même pour  $J \leq i$ . Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$\sum_{j \leq i} u_j(x) = u_i(x) + \sup_{j < i} h_j(x) = u_i(x) + \sup_{j < i} f_j(x) = u_i(x) + g_i(x) = h_i(x).$$

La relation est donc vérifiée pour tout  $i \in I$ . En l'appliquant au plus grand élément  $\omega$  de  $I$ , on obtient

$$\sum_{i \in I} u_i(x) = h_\omega(x).$$

Pour tout  $x \in X$ , il existe  $i \in I$  tel que  $x \in U_i$ ; alors,  $f_i(x) > 0$ , d'où  $h_\omega(x) > 0$ . La famille  $(u_i/h_\omega)_{i \in I}$  est alors une partition continue de l'unité faiblement subordonnée au recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$ .  $\square$

**PROPOSITION 4.2.4.** — *Soit  $X$  un espace topologique, soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert et soit  $(f_i)_{i \in I}$  une partition continue de l'unité qui est faiblement subordonnée au recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$ . Il existe alors une partition continue de l'unité subordonnée au recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$  qui est localement finie.*

*Démonstration.* — Pour tout  $x \in X$ , posons  $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ . Démontrons que la fonction  $f$  est continue sur  $X$ . Soit  $x \in X$ . Comme  $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$ , il existe  $i \in I$  tel que  $f_i(x) > 0$ , si bien que  $f(x) > 0$ . Alors, l'ensemble des  $i \in I$  tels que  $f_i(x) > \frac{1}{2}f(x)$  est fini et il existe  $k \in I$  tel que  $f_k(x) = f(x)$ . Soit alors  $\varepsilon > 0$  tel que  $4\varepsilon < f(x)$ . Par définition d'une famille sommable, il existe une partie finie  $J \subset I$  telle que  $\sum_{j \in J} f_j(x) > 1 - \varepsilon/2$ . Comme les fonctions  $f_j$ , pour  $j \in J$ , sont continues et que l'ensemble  $J$  est fini il existe un voisinage  $V$  de  $x$  tel que pour tout  $y \in V$ , on ait  $\sum_{j \in J} f_j(y) \geq 1 - \varepsilon$  et  $|f_j(y) - f_j(x)| \leq \varepsilon$ . Puisque  $\sum_{j \in I} f_j(y) = 1$ , cela entraîne l'inégalité  $f_j(y) \leq \varepsilon$  pour tout  $j \in I \setminus J$  et tout  $y \in V$ . En particulier,  $k \in J$ , si bien que  $f_k(y) \geq f_k(x) - \varepsilon \geq 3\varepsilon \geq f_j(y)$  si  $j \in I \setminus J$ . Par suite, pour tout  $y \in V$ , on a

$$f(y) = \sup_{i \in I} f_i(y) = \sup_{j \in J} f_j(y).$$

Cela entraîne que  $f$  est continue dans  $V$  ainsi que l'inégalité  $f(y) \geq f(x) - \varepsilon \geq 3\varepsilon$  pour tout  $y \in V$ .

Pour tout  $i \in I$  et tout  $x \in X$ , posons

$$g_i(x) = \sup(0, f_i(x) - \frac{1}{2}f(x)).$$

Posons aussi  $g(x) = \sum_{i \in I} g_i(x)$  (la famille est sommable en tout point puisque  $g_i(x) \leq f_i(x)$ ). Pour tout  $i$ ,  $g_i$  est continue.

Démontrons que le support de  $g_i$  est contenu dans  $U_i$  et que  $g$  est continue et strictement positive en tout point.

Soit  $x \in X$ . Soit  $k, J$  et  $V$  comme au début de la démonstration.

On a  $f(x) = f_k(x) > 0$ , si bien que  $g_k(x) = \frac{1}{2}f(x) > 0$ .

Pour  $j \in I \setminus J$  et  $y \in V$ , on a vu que  $f_j(y) \leq \varepsilon \leq \frac{1}{3}f(y)$ , si bien que  $g_j(y) = 0$ . Cela prouve que pour tout  $y \in V$ , on a  $g(y) = \sum_{j \in J} g_j(y)$ . Par conséquent,  $g$  est continue sur  $V$ .

De plus, si  $x \notin U_i$ , on a  $f_i(x) = 0$ ; si l'on a  $i \in J$ , la définition de  $V$  entraîne que  $f_i(y) \leq \varepsilon$  pour  $y \in V$ ; sinon,  $i \notin J$  et on a démontré que  $f_i(y) \leq \varepsilon \leq \frac{1}{3}f(y)$ , puis  $g_i(y) = 0$ . Autrement dit, le support de  $g_i$  ne rencontre pas  $\complement U_i$ .

Cela démontre que la famille  $(g_i/g)_{i \in I}$  est une partition continue de l'unité, localement finie, subordonnée au recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$ .  $\square$

**THÉORÈME 4.2.5.** — *Soit  $M$  une variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^p$ . Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $M$ . Il existe une partition continue de l'unité  $(f_i)$  subordonnée au recouvrement  $(U_i)$  telle que, pour tout  $i \in I$ ,  $f_i$  soit de classe  $\mathcal{C}^p$ .*

*Démonstration.* — Pour tout  $x \in M$ , on choisit un voisinage ouvert  $U_x$ , un entier  $d_x$ , un indice  $i(x) \in I$  tel que  $U_x \subset U_{i(x)}$  et une carte  $\varphi_x: U_x \rightarrow V_x$ , où  $V_x$  est un ouvert de  $\mathbf{H}_{d_x}$ ; on choisit alors un voisinage  $U'_x$  de  $x$  dont l'adhérence est contenue dans  $U_x$  et tel que  $\varphi_x(\overline{U'_x})$  soit compact. Soit  $D$  une partie infinie dénombrable de  $M$  telle que la famille  $(U'_x)_{x \in D}$  soit un recouvrement de  $M$ ; fixons une bijection  $n \mapsto x_n$  de  $\mathbf{N}$  sur  $D$ . Soit  $(f'_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une partition continue de l'unité subordonnée au recouvrement  $(U'_{x_n})_{n \in \mathbf{N}}$ . Soit  $\varepsilon$  un nombre réel tel que  $0 < \varepsilon < 1/2$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , soit  $f_n$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $U_{x_n}$ , positive ou nulle et à support compact, telle que  $\|f_n - f'_n\| \leq \varepsilon 2^{-n}$ . La série de terme général  $(f_n)$  converge, sa somme  $h = \sum_{n \in \mathbf{N}} f_n$  est  $\mathcal{C}^p$  car localement tous ses termes sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux, et l'on a  $|h - 1| \leq 2\varepsilon$ . Par suite,  $h > 0$  en tout point et la famille  $(f_n/h)$  est une partition de l'unité de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $M$ . Pour tout  $n$ , le support de  $f_n/h$  est contenu dans  $U_{i(x_n)}$ , d'où le théorème.  $\square$

### § 4.3. Dérivations et fibré tangent

Nous allons maintenant définir l'espace tangent d'une variété différentiable en un point. Pour motiver la définition, revenons sur le cas des sous-variétés.

Soit  $M$  une sous-variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbf{R}^n$ , soit  $a \in M$ .

Si  $r > 0$  et si  $\gamma: [0, r[ \rightarrow M$  est une courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\gamma(0) = a$ , alors  $\gamma'(0) \in C_a(M)$ .

Soit  $U$  un voisinage de  $a$  dans  $M$ . Pour toute fonction  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , notons  $D_\gamma f(a)$  la dérivée en 0 de l'application  $f \circ \gamma$ . L'application  $f \mapsto D_\gamma f(a)$  est  $\mathbf{R}$ -linéaire. De plus, pour toutes fonctions  $f, g$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ , on a

$$D_\gamma(fg)(a) = f(a)D_\gamma g(a) + D_\gamma f(a)g(a).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
 D_\gamma(fg)(a) &= ((fg) \circ \gamma)'(0) \\
 &= ((f \circ \gamma)(g \circ \gamma))'(0) \\
 &= (f \circ \gamma)'(0)(g \circ \gamma)'(0) + (f \circ \gamma)(0)(g \circ \gamma)'(0) \\
 &= f(a)D_\gamma g(a) + D_\gamma f(a)g(a).
 \end{aligned}$$

On dit que c'est une *dérivation* en  $a$  sur l'anneau des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .

PROPOSITION 4.3.1. — Soit  $M$  une sous-variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbf{R}^n$ , soit  $a \in M$ .

a) Pour tout vecteur  $u \in C_a(M)$ , il existe  $r > 0$  et une courbe paramétrée  $\gamma: [0, r[ \rightarrow M$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\gamma'(0) = u$ .

b) Soit  $\gamma, \theta$  deux courbes paramétrées de classe  $\mathcal{C}^1$ . Les dérivations  $D_\gamma$  et  $D_\theta$  en  $a$  sont égales si et seulement si les vecteurs  $\gamma'(0)$  et  $\theta'(0)$  sont égaux.

*Démonstration.* — a) Soit  $d = \dim_a(M)$ , soit  $V$  un ouvert de  $\mathbf{H}_d$  et soit  $i: V \rightarrow \mathbf{R}^n$  une immersion qui induit un homéomorphisme de  $V$  sur un voisinage de  $a$  dans  $M$ . Posons  $b = i^{-1}(a)$ . L'application linéaire  $Di(a)$  induit un isomorphisme et soit  $w$  l'unique vecteur de  $C_b(\mathbf{H}_d)$  tel que  $u = Di(b)(w)$ . L'application de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathbf{R}^d$  donnée par  $t \mapsto b + wt$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et applique  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbf{H}_d$ ; il existe donc  $r > 0$  tel que  $b + wt$  appartienne à  $V$  pour  $t \in [0, r]$ . La courbe  $t \mapsto i(b + wt)$  convient.

Si  $b \in \text{Int}(\mathbf{H}_d)$ , il existe même  $r > 0$  tel que  $b + wt$  appartienne à  $V$  pour tout  $t \in [-r, r]$ . Ainsi,  $u$  est le vecteur tangent en l'origine d'une courbe paramétrée définie sur un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$ .

b) Reprenons les notations du a). Soit  $\gamma \in [0, r[ \rightarrow M$  une courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^1$ . Quitte à diminuer  $r$ , posons  $\bar{\gamma} = i^{-1} \circ \gamma$ , de sorte que  $\gamma = i \circ \bar{\gamma}$ . On a  $\gamma'(0) = Di(b)(\bar{\gamma}'(0))$ . On a

$$D_\gamma f(a) = (f \circ (i \circ \bar{\gamma}))'(0) = ((f \circ i) \circ \bar{\gamma})'(0) = D(f \circ i)(b)(\bar{\gamma}'(0)).$$

Étant données deux courbes paramétrées  $\gamma$  et  $\theta$ , définissons  $\bar{\gamma} = i^{-1} \circ \gamma$  et  $\bar{\theta} = i^{-1} \circ \theta$ . Comme  $Di(b)$  induit un isomorphisme d'espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^d = T_b(\mathbf{H}_d)$  sur  $T_a(M)$ , les conditions  $\gamma'(0) = \theta'(0)$  et  $\bar{\gamma}'(0) = \bar{\theta}'(0)$  sont équivalentes.

La formule précédente pour  $D_\gamma f(a)$  montre alors que si  $\gamma'(0) = \theta'(0)$ , alors  $D_\gamma f(a) = D_\theta f(a)$  pour toute fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  au voisinage de  $a$ .

Inversement, si l'on prend pour fonction  $f$  la fonction  $f_j$  telle que  $f_j \circ i: V \rightarrow \mathbf{R}$  soit la coordonnée d'indice  $j$ , on obtient  $D_\gamma f_j(a) = \bar{\gamma}'_j(0)$ , où  $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_d$  sont les composantes de  $\bar{\gamma}$ . Alors, si  $D_\gamma f(a) = D_\theta f(a)$  pour toute fonction  $f$ , on a  $\bar{\gamma}'(0) = \bar{\theta}'(0)$ , d'où  $\gamma'(0) = \theta'(0)$ . □

Plus généralement, soit  $M$  une variété de classe  $\mathcal{C}^p$  ( $p \geq 1$ ) et soit  $a \in M$ .

DÉFINITION 4.3.2. — On appelle *dérivation en  $a$*  sur l'anneau  $\mathcal{C}^p(M)$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^p$  toute forme linéaire  $D: \mathcal{C}^p(M) \rightarrow \mathbf{R}$  vérifiant

$$D(fg) = f(a)D(g) + D(f)g(a)$$

pour tous  $f, g \in \mathcal{C}^p(M)$ .

L'ensemble  $\text{Der}_a(M)$  des dérivations en  $a$  est un espace vectoriel réel.

Remarques 4.3.3. — a) Si  $D$  est une dérivación en  $a$  et si  $f \in \mathcal{C}^p(M)$  est nulle au voisinage de  $a$ , alors  $D(f) = 0$ .

En effet, soit  $U$  un voisinage de  $a$  sur lequel  $f$  est identiquement nulle, soit  $g \in \mathcal{C}^p(M)$  une fonction qui vaut 1 au voisinage de  $a$  et qui est nulle hors de  $U$ . On a donc  $f(x)g(x) = 0$  pour tout  $x \in M$ , c'est-à-dire  $fg = 0$ . On a donc  $0 = D(fg) = f(a)D(g) + D(f)g(a) = D(f)$ .

On peut alors prolonger  $D$  à l'anneau  $\mathcal{C}_{M,a}^p$  des germes en  $a$  de fonctions de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $M$  : c'est l'ensemble des classes d'équivalence de couples  $(U, f)$ , où  $U$  est un voisinage ouvert de  $a$  et  $f \in \mathcal{C}_M^p(U)$ , pour la relation qui identifie  $(U, f)$  et  $(V, g)$  si  $f$  et  $g$  coïncident sur un voisinage de  $a$  contenu dans  $U \cap V$ . Pour un tel couple  $(U, f)$ , on choisit une fonction  $\theta$  qui vaut 1 au voisinage de  $a$  et dont le support est contenu dans  $U$ ; on pose alors  $D((U, f)) = D(\theta f)$ ; cela ne dépend pas du choix de  $\theta$  et définit une dérivación en  $a$  sur l'anneau  $\mathcal{C}_{M,a}^p$ .

b) L'espace  $\text{Der}_a(M)$  dépend du choix de  $p$  et est de dimension infinie si  $p < \infty$  (à vérifier). En revanche, si  $p = \infty$ ,  $\text{Der}_a(M)$  est un espace vectoriel de dimension  $\dim_a(M)$ .

Soit  $a \in M$ . Toute application  $\gamma: [0, r[ \rightarrow M$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\gamma(0) = a$  (« arc en  $a$  sur  $M$  ») définit une dérivación  $D_\gamma$  en  $a$  sur l'espace  $\mathcal{C}^1(M)$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $M$ , par la formule  $f \mapsto (f \circ \gamma)'(0)$ .

DÉFINITION 4.3.4. — Soit  $M$  une variété de classe  $\mathcal{C}^p$ , soit  $a \in M$ . Le cône tangent  $C_a(M)$  est l'ensemble des dérivations en  $a$  de la forme  $D_\gamma$  sur l'espace  $\mathcal{C}^1(M)$ . L'espace tangent  $T_a(M)$  est le sous-espace vectoriel engendré par  $C_a(M)$  dans l'espace  $\text{Der}_a(M)$ .

Soit  $f: M \rightarrow N$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ . Elle induit une application linéaire  $T_a(f)$  de  $\text{Der}_a(M)$  dans  $\text{Der}_{f(a)}(N)$ , donnée par la formule  $T_a(f)(D) = D(u \circ f)$  pour  $u \in \mathcal{C}^1(N)$ . Si  $\gamma$  est un arc en  $a$  sur  $M$ , on a

$$D_\gamma(u \circ f) = (u \circ f \circ \gamma)'(0) = D_{f \circ \gamma}(u).$$

Par suite,  $T_a(f)$  applique  $C_a(M)$  dans  $C_{f(a)}(N)$  et  $T_a(M)$  dans  $T_a(N)$ .

LEMME 4.3.5. — Soit  $M$  une variété de classe  $\mathcal{C}^p$  (avec  $p \geq 1$ ), soit  $a \in M$ .

a) Si  $U$  est un ouvert contenant  $a$ , l'injection  $i$  de  $U$  dans  $M$  induit un isomorphisme  $T_a(i)$  de  $C_a(U)$  sur  $C_a(M)$ , et un isomorphisme de  $T_a(U)$  sur  $T_a(M)$ .

b) Soit  $f: M \rightarrow N$  un morphisme de classe  $\mathcal{C}^1$  qui induit un isomorphisme d'un voisinage ouvert  $U$  de  $a$  sur un voisinage ouvert  $V$  de  $f(a)$ . Alors,  $T_a(f)$  est un isomorphisme de  $C_a(M)$  sur  $C_{f(a)}(N)$  et de  $T_a(M)$  sur  $T_{f(a)}(N)$ .

c) Soit  $(U, \varphi)$  une carte de  $M$  telle que  $a \in U$ . Alors,  $T_a(\varphi)$  induit un isomorphisme de  $C_a(M)$  sur  $C_a(\varphi(U))$  et un isomorphisme de  $T_a(M)$  sur  $T_a(\varphi(U))$ .

COROLLAIRE 4.3.6. — Soit  $M$  une variété de classe  $\mathcal{C}^p$  (avec  $p \geq 1$ ). Soit  $a \in M$ .

a) L'espace tangent  $T_a(M)$  est un espace vectoriel de dimension  $\dim_a(M)$ .

b) Si  $a \in \text{Int}(M)$ , alors  $C_a(M) = T_a(M)$ .

c) Si  $a \in \partial(M)$ , alors  $C_a(M)$  est un demi-espace fermé de  $C_a(M)$ . De plus, l'injection de  $\partial(M)$  dans  $M$  identifie  $T_a(\partial(M))$  à la frontière de  $C_a(M)$  dans  $T_a(M)$ .

#### § 4.4. Le théorème de Sard

DÉFINITION 4.4.1. — Soit  $f: M \rightarrow N$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  entre variétés différentiables.

a) On dit qu'un point  $a \in M$  est un point critique si  $T_a(f): T_a(M) \rightarrow T_{f(a)}(N)$  n'est pas surjective; on dit que c'est un point régulier sinon.

b) On dit qu'un point  $b \in N$  est une valeur critique s'il existe un point critique  $a \in M$  tel que  $b = f(a)$ , autrement dit si c'est l'image par  $f$  d'un point critique de  $f$ . On dit que c'est une valeur régulière sinon.

Il convient d'insister sur une ambiguïté de la terminologie : si un point  $b \in N$  n'appartient pas à l'image de  $f$ , ce n'est pas l'image d'un point critique, c'est ainsi une valeur régulière bien que ce ne soit pas une valeur de  $f$  !

DÉFINITION 4.4.2. — Soit  $N$  une variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^p$ . On dit qu'une partie  $A$  de  $N$  est localement négligeable si pour tout point  $a$  de  $N$ , il existe une carte  $(U, \varphi)$  de  $N$  telle que  $\varphi(A \cap U)$  soit de mesure nulle dans  $\varphi(U)$ .

On verra que si  $N$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , alors une partie  $A$  de  $N$  est localement négligeable si et seulement si elle est de mesure nulle comme partie de  $\mathbf{R}^n$ .

THÉORÈME 4.4.3 (Sard). — Soit  $p \geq 1$ . Soit  $M$  et  $N$  des variétés différentiables de classe  $\mathcal{C}^p$ , soit  $f: M \rightarrow N$  une application de classe  $\mathcal{C}^p$ . On suppose que pour tout point  $a \in M$ ,  $p \geq 1 + \dim_{f(a)}(N) - \dim_a(M)$ . Alors, l'ensemble des valeurs critiques de  $f$  est localement négligeable dans  $N$ .

On va d'abord ramener cet énoncé au cas où  $M$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^m$  et  $N = \mathbf{R}^n$ . L'hypothèse (implicite) que  $M$  est métrisable et séparable intervient de façon cruciale dans cette réduction.

Nous démontrons ensuite cet énoncé dans les deux cas les plus faciles : lorsque  $m < n$  (corollaire 4.4.9, où il suffit de demander que  $f$  soit localement lipschitzienne)



et lorsque  $m = n$  (proposition 4.4.10). On le prouvera enfin dans lorsque  $m > n$  en suivant Milnor (1965); Guillemin & Pollack (2010) qui font l'hypothèse supplémentaire que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Le cas général est démontré dans le livre (Sternberg, 1983).

Auparavant, nous avons besoin de quelques rappels concernant les ensembles de mesure nulle dans  $\mathbf{R}^n$ .

PROPOSITION 4.4.4. — *Soit  $A$  une partie de  $\mathbf{R}^n$ . Alors,  $A$  est de mesure nulle si et seulement s'il existe, pour tout  $\varepsilon > 0$ , une suite dénombrable  $(A_i)_{i \geq 1}$  de parties de  $A$  recouvrant  $A$  telle que  $\sum_{i \geq 1} \text{diam}(A_i)^n \leq \varepsilon$ .*

*Démonstration.* — Observons que si  $A$  est une partie de  $\mathbf{R}^n$  de diamètre  $d$ , son adhérence est une partie fermée de  $\mathbf{R}^n$  de même diamètre et de mesure de Lebesgue au plus égale à  $cd^n$ , où  $c$  est le volume de la boule unité de  $\mathbf{R}^n$ . (C'est évident si  $A$  est vide ; sinon, on a  $\bar{A} \subset \bar{B}(b, d)$  pour tout point  $b$  de  $A$ .)

Par suite, si la famille  $(A_i)$  recouvre  $A$  et vérifie  $\sum \text{diam}(A_i)^n \leq \varepsilon$ , l'inclusion  $A \subset \bigcup_{i \geq 1} \bar{A}_i$  entraîne que la mesure de  $A$  est au plus  $c\varepsilon$ . S'il existe une telle famille pour tout  $\varepsilon > 0$ , la mesure de  $A$  est donc nulle.

Démontrons maintenant la réciproque. Soit  $A$  une partie de  $\mathbf{R}^n$  de mesure nulle. Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme la mesure de Lebesgue est extérieurement régulière, il existe un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^n$  contenant  $A$  et de mesure  $\leq \varepsilon$ . Soit  $(B_i)_{i \geq 0}$  un recouvrement dénombrable de  $U$  par des boules ouvertes de diamètres  $\leq 1$  contenues dans  $U$  ; pour tout  $i$ , notons  $F'_i$  la boule de même centre et de rayon égal à 6 fois le rayon de  $B_i$ . D'après le lemme de recouvrement de Vitali (lemme 4.4.5), il existe une partie  $I$  de  $\mathbf{N}$  telle que les boules  $B_i$ , pour  $i \in I$ , soient deux à deux disjointes, et telle que les boules  $F'_i$ , pour  $i \in I$ , recouvrent  $U$ . Alors, on a

$$\leq \mu\left(\bigcup_{i \in I} F'_i\right) \leq 6^n \sum_{i \in I} \mu(B_i) \leq 6^n \mu(U) \leq 6^n \mu(\varepsilon).$$

Cela conclut la preuve de la proposition. □

LEMME 4.4.5 (Vitali). — *Soit  $X$  un espace métrique. Soit  $(B_i)_{i \geq 0}$  une famille de boules  $B(a_i, r_i)$  de  $X$  dont les rayons  $r_i$  appartiennent à  $]0, 1]$  ; pour tout  $i$ , notons  $B'_i$  la boule de même centre  $a_i$  et de rayon  $6r_i$ . Il existe une partie  $I$  de  $\mathbf{N}$  telle que les boules  $B_i$ , pour  $i \in I$ , soient deux à deux disjointes, et telle que*

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i \subset \bigcup_{i \in I} B'_i.$$

*Démonstration.* — On construit par récurrence une suite  $(I_k)_{k \geq 1}$  de parties de  $\mathbf{N}$  vérifiant les propriétés suivantes, dans lesquelles on a posé  $I = \bigcup_{k \geq 1} I_k$  : pour tout entier  $k \geq 1$  et tout  $i \in I_k$ ,

- le rayon de la boule  $B_i$  appartient à  $]2^{-k}, 2^{1-k}]$  ;
- pour tout entier  $\ell < k$  et tout  $j \in I_\ell$ , les boules  $B_i$  et  $B_j$  sont disjointes ;

– pour tout  $j \in I_k$  tel que  $j < i$ , les boules  $B_i$  et  $B_j$  sont disjointes ;

et la partie  $I_k$  est maximale parmi celles qui vérifient les propriétés précédentes. On commence par construire une partie  $I_1$  de  $\mathbf{N}$ , maximale, telle que pour tout  $i \in I_1$ , le rayon de  $B_i$  soit  $> 1/2$ , et telle que les boules  $B_i$ , pour  $i \in I_1$ , soient deux à deux disjointes. Pour cela, on décide par récurrence sur  $i \in \mathbf{N}$  de son appartenance à  $I_1$  : on sélectionne la boule  $B_i$  si son rayon est  $> 1/2$  et si elle est disjointe des boules précédemment sélectionnées. Ensuite, supposant  $I_1, \dots, I_{k-1}$  construites, on décide par récurrence sur  $i \in \mathbf{N}$  de son appartenance à  $I_k$  en sélectionnant la boule  $B_i$  si son rayon appartient à  $]2^{-k}, 2^{1-k}]$  et si elle est disjointe des boules précédemment sélectionnées (c'est-à-dire les boules  $B_j$ , pour  $j \in I_1 \cup \dots \cup I_{k-1}$ , ou pour  $j \in I_k$  et  $j < i$ ).

Prouvons que la partie  $I = \bigcup_{k \geq 1} I_k$  convient. Soit  $j$  un entier et démontrons que  $B_j$  est contenue dans la réunion des boules  $B'_i$ , pour  $i \in I$ . Soit  $k$  l'unique entier  $\geq 1$  tel que le rayon de  $B_j$  appartienne à  $]2^{-k}, 2^{1-k}]$ . Si  $j$  appartient à  $I_k$ , l'assertion à démontrer est évidente puisque  $B_j$  est contenue dans  $B'_j$ . Sinon, la partie  $I'_k = I_k \cup \{j\}$  ne vérifie pas les hypothèses précédentes. Il existe donc  $\ell \leq k$  et  $i \in I_\ell$  tels que  $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ . Soit  $a$  un point de  $B_i \cap B_j$  ; alors, pour tout  $x \in B_j$ ,

$$d(x, a_i) \leq d(x, a) + d(a, a_i) \leq 2r_j + r_i \leq 2 \cdot 2^{1-\ell} + 2^{1-k} \leq 6 \cdot 2^{-\ell} \leq 6r_i.$$

Ainsi,  $x \in B'_i$ , d'où l'inclusion souhaitée  $B_j \subset B'_j$ .  $\square$

**COROLLAIRE 4.4.6.** — *Soit  $N$  une variété de classe  $\mathcal{C}^1$  et soit  $A$  une partie de  $N$ . Alors,  $A$  est localement négligeable si et seulement si pour toute carte  $(U, \varphi)$  sur  $N$ , où  $\varphi: U \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $\varphi(A \cap U)$  est de mesure nulle dans  $\mathbf{R}^n$ .*

*Démonstration.* — Pour tout  $x \in U$ , soit  $(U_x, \varphi_x)$  une carte de  $N$  dont le domaine de définition  $U_x$  est contenu dans  $U$  et tel que  $\varphi_x(A \cap U_x)$  soit de mesure nulle dans  $\mathbf{R}^n$ . Soit  $\psi_x: \varphi_x(U_x) \rightarrow \varphi(U_x)$  le difféomorphisme de changement de carte ; comme  $\psi_x$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\varphi(A \cap U_x) = \psi(\varphi_x(A \cap U_x))$  est de mesure nulle dans  $\mathbf{R}^n$ . Comme  $U$  est métrisable et séparable, il existe une partie (au plus) dénombrable  $D$  de  $U$  telle que la réunion des  $U_x$ , pour  $x \in D$ , soit égale à  $U$ . Alors,  $\varphi(A \cap U)$  est la réunion des  $\varphi(A \cap U_x)$ , pour  $x \in D$ , donc est de mesure nulle.  $\square$

**LEMME 4.4.7.** — *Il suffit de démontrer le théorème 4.4.3 sous l'hypothèse supplémentaire que  $M$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^m$  et que  $N = \mathbf{R}^n$ .*

*Démonstration.* — Soit  $b \in N$ , soit  $(V, \psi)$  une carte de  $N$  telle que  $b \in V$ . Alors, un point  $y \in V$  est une valeur critique de  $f$  si et seulement si c'est une valeur critique de  $f_V: f^{-1}(V) \rightarrow V$ , ce qui équivaut aussi à ce que  $\psi(y)$  soit une valeur critique de  $\psi \circ f_V: f^{-1}(V) \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Cela permet de supposer que  $N = \mathbf{R}^n$ .

Soit  $((U_i, \varphi_i))_{i \in I}$  une famille de cartes de  $M$  telle que  $M$  soit la réunion des  $U_i$ . Comme  $M$  est métrisable et séparable, il existe une partie (au plus) dénombrable  $I_0$  de  $I$  telle que  $M$  soit la réunion des  $U_i$ , pour  $i \in I_0$ . Quitte à remplacer  $I$  par  $I_0$ , on

suppose donc que  $I$  est dénombrable. Si  $i \in I$  et  $a \in U_i$ ,  $a$  est point critique de  $f$  si et seulement si c'est un point critique de l'application  $f_i = f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi(U_i) \rightarrow N$ . Ainsi, l'ensemble  $\text{Crit}(f)$  des valeurs critiques de  $f$  est la réunion des ensembles  $\text{Crit}(f_i)$ , pour  $i \in I$ . Puisque  $I$  est dénombrable, il suffit de démontrer que chacun d'eux est de mesure nulle.  $\square$

PROPOSITION 4.4.8. — Soit  $A$  une partie de  $\mathbf{R}^m$  et soit  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application localement lipschitzienne. Supposons  $n \geq m$ . Si  $A$  est de mesure nulle dans  $\mathbf{R}^m$ , alors  $f(A)$  est de mesure nulle dans  $\mathbf{R}^n$ .

*Démonstration.* — Pour tout  $a \in A$ , soit  $U_a$  un voisinage de  $a$  dans  $\mathbf{R}^m$  qui est une boule dont le centre appartient à  $\mathbf{Q}^m$  et dont le rayon est un nombre rationnel, et soit  $k_a$  un entier tel que  $f|_{A \cap U_a}$  soit lipschitzienne de rapport  $L_a$ . Comme l'ensemble des tels voisinages est dénombrable, il existe une suite  $(A_k)_{k \geq 1}$  de parties de  $A$  qui recouvrent  $A$  et une suite  $(L_k)$  de nombres réels  $\geq 1$  telles que pour tout  $k$ ,  $f|_{A_k}$  soit lipschitzienne de rapport  $L_k$ .

Soit  $\varepsilon$  un nombre réel tel que  $0 < \varepsilon < 1$ . Pour tout  $k$ , soit  $(B_{k,i})$  une famille dénombrable de boules de rayons  $\leq 1$  recouvrant  $A_k$  telle que  $\sum_i \text{diam}(B_{k,i})^m \leq \varepsilon 2^{-k} / (2L_k)^m$ ; en particulier, on a  $\text{diam}(B_{k,i}) \leq 1/2L_k$ . Pour tout  $k$  et tout  $i$ , on a donc  $\text{diam}(f(B_{k,i}) \cap A_k) \leq L_k \text{diam}(B_{k,i} \cap A_k)$ , si bien que  $f(B_{k,i} \cap A_k)$  est contenu dans une boule  $C_{k,i}$  de diamètre  $\leq 2L_k \text{diam}(B_{k,i}) \leq 1$ . On a alors

$$f(A) \subset \bigcup_{k \geq 1} \bigcup_i f(B_{k,i} \cap A_k) \subset \bigcup_{k \geq 1} \bigcup_i C_{k,i}.$$

Comme  $n \geq m$ , il vient alors

$$\begin{aligned} \sum_{k,i} \text{diam}(C_{k,i})^n &\leq \sum_{k,i} \text{diam}(C_{k,i})^m \leq \sum_{k,i} (2L_k)^m \text{diam}(B_{k,i})^m \\ &\leq \sum_k (2L_k)^m \sum_i \text{diam}(B_{k,i})^m \leq \sum_k \varepsilon 2^{-k} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme  $\varepsilon$  est arbitraire, cela prouve que  $f(A)$  est de mesure nulle dans  $\mathbf{R}^n$ .  $\square$

COROLLAIRE 4.4.9. — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^m$ , soit  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application localement lipschitzienne. Si  $n > m$ ,  $f(U)$  est de mesure nulle dans  $\mathbf{R}^n$ .

Puisqu'une application de classe  $\mathcal{C}^1$  est localement lipschitzienne, ce corollaire entraîne le théorème de Sard lorsque  $n > m$ .

*Démonstration.* — Soit  $A$  la partie  $U \times \{0\}$  de  $\mathbf{R}^n$  identifié à  $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{n-m}$  et soit  $g$  l'application de  $A$  dans  $\mathbf{R}^n$  telle que  $g(x,0) = f(x)$  pour tout  $x \in U$ . Elle est localement lipschitzienne. De plus, comme  $n > m$ , l'ensemble  $A$  est de mesure nulle dans  $\mathbf{R}^n$ , si bien que  $g(A) = f(U)$  est de mesure nulle.  $\square$

PROPOSITION 4.4.10 (Théorème de Sard pour  $m = n$ ). — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , soit  $f: U \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $A$  l'ensemble des points critiques de  $f$ . Alors,  $f(A)$  est de mesure nulle.

*Démonstration.* — En écrivant  $U$  comme réunion dénombrable de pavés ouverts relativement compacts dans  $U$ , on se ramène au cas où  $U$  est l'intérieur d'un pavé compact  $\bar{U}$  sur lequel  $f$  se prolonge en une application de classe  $\mathcal{C}^1$ . Alors,  $Df$  est uniformément continue sur  $\bar{U}$  et il existe une fonction  $\eta: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ , telle que  $\eta(t)/t$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow 0$  et telle que

$$\|Df(y) - Df(x)\| \leq \eta(\|y - x\|)$$

pour tous  $x, y \in U$ .

Pour  $x, y \in U$ , l'inégalité des accroissements finis s'écrit alors

$$\|f(y) - f(x) - Df(x)(y - x)\| \leq \eta(\|y - x\|).$$

Le pavé  $\bar{U}$  est réunion de  $N^n$  pavés homothétiques  $\bar{U}_k$  à  $N^{-1}\bar{U}$ . Prouvons que pour tout  $k$ , on a

$$\mu(f(A \cap \bar{U}_k)) \leq c_{n-1}(L \operatorname{diam}(\bar{U}))^{n-1} N^{1-n} \eta(\operatorname{diam}(U)/N),$$

où  $c_{n-1}$  est le volume de la boule de diamètre 1 dans  $\mathbf{R}^{n-1}$  et  $L$  un majorant de  $\|Df\|$  sur  $\bar{U}$ . C'est évident si  $A \cap \bar{U}_k = \emptyset$ . Sinon, soit  $a \in A \cap \bar{U}_k$  et soit  $\bar{V}_k$  l'image de  $\bar{U}_k$  par l'application  $x \mapsto a + Df(a)(x - a)$ ; c'est une partie de  $\mathbf{R}^n$  de diamètre  $\leq L \operatorname{diam}(U_k)$  contenue dans un hyperplan de  $\mathbf{R}^n$ . De plus, la distance de  $f(x)$  à  $\bar{V}_k$  est  $\leq \eta(\operatorname{diam}(\bar{U})/N)$ , si bien que

$$\mu(\bar{V}_k) \leq c_{n-1}(L \operatorname{diam}(U_k))^{n-1} \eta(\operatorname{diam}(\bar{U})/N).$$

L'inégalité voulue en résulte immédiatement.

Alors,

$$\mu(f(A)) \leq \sum_{k=1}^{N^n} \mu(f(A \cap \bar{U}_k)) \leq c_{n-1}(L \operatorname{diam}(\bar{U}))^{n-1} N \eta(\operatorname{diam}(U)/N).$$

Quand  $N$  tend vers  $+\infty$ , le membre de droite tend vers 0. Par suite,  $\mu(f(A)) = 0$ .  $\square$

Nous démontrons maintenant le théorème 4.4.3 dans le cas général, mais en faisant l'hypothèse supplémentaire que  $f$  est indéfiniment dérivable. Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^m$ ,  $f: U \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et soit  $A$  l'ensemble des points critiques de  $f$ . Pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$ , soit  $A_k$  l'ensemble des points  $a \in U$  tels que  $Df(a) = D^2f(a) = \dots = D^k f(a) = 0$ .

Le théorème est évident lorsque  $m = 0$  : alors  $U$  est vide, ou un point. Si  $n = 0$ , alors  $A = \emptyset$ ; si  $n > 0$ ,  $A = U$  et son image est un point, donc est de mesure nulle dans  $\mathbf{R}^n$ . Par récurrence, on suppose ainsi le théorème démontré pour toute application  $f: U' \rightarrow \mathbf{R}^{n'}$  qui est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  où  $U'$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^{m'}$ , avec  $m' < m$ .

LEMME 4.4.11. — a) L'ensemble  $f(A \setminus A_1)$  est de mesure nulle dans  $\mathbf{R}^n$ .

- b) Pour tout entier  $p \geq 1$ , l'ensemble  $f(A_p \setminus A_{p+1})$  est de mesure nulle dans  $\mathbf{R}^n$ .  
 c) Si  $p$  est un entier tel que  $pn \geq m$ , l'ensemble  $f(A_p)$  est de mesure nulle dans  $\mathbf{R}^n$ .

*Démonstration.* — Soit  $B$  l'un de ces ensembles  $A \setminus A_1, A_p \setminus A_{p+1}, A_p$ . Comme  $U$  possède une base dénombrable de voisinages, pour démontrer que  $f(B)$  est de mesure nulle, il suffit de prouver que tout point  $b \in B$  possède un voisinage  $V$  dans  $U$  tel que  $f(B \cap V)$  soit de mesure nulle. On se ramène ainsi directement au cas où  $\bar{U}$  est un pavé compact et  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de  $\bar{U}$ . En particulier, on suppose que pour tout entier  $p$ , la différentielle  $D^p f$  est bornée sur  $U$  et est uniformément continue.

On démontre maintenant ces trois propriétés dans l'ordre inverse de l'énoncé.

c) Soit  $N$  un entier  $\geq 1$ . Le pavé  $\bar{U}$  est réunion de  $N^m$  pavés  $\bar{U}_i$  qui sont isométriques à  $\frac{1}{N}\bar{U}$ . On va majorer la mesure de  $f(A_p \cap \bar{U}_i)$ . C'est évident si  $A_p \cap \bar{U}_i$  est vide ; sinon, soit  $a \in A_p \cap \bar{U}_i$ . Comme toutes les différentielles de  $f$  jusqu'à l'ordre  $p$  s'annulent en  $a$ , la formule de Taylor entraîne que pour tout  $x \in A_p \cap \bar{U}_i$ , on a

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \eta(\|x - a\|) \|x - a\|^p,$$

où  $\eta$  est le module de continuité de  $D^p f$ . Par suite,  $f(A_p \cap \bar{U}_i)$  est contenu dans une boule de centre  $f(a)$  et de rayon  $\eta(\delta/N)(\delta/N)^p$ , où  $\delta$  est le diamètre de  $\bar{U}$ . Soit  $c$  le volume de la boule unité de  $\mathbf{R}^n$ , on a donc  $\mu(f(A_p \cap \bar{U}_i)) \leq cN^{-pn}\eta(\delta/N)^n$  et

$$\mu(f(A_p)) \leq N^{m-pn}\eta(\delta/N)^n c.$$

Par hypothèse,  $pn \geq m$  ; par suite, lorsque  $N$  tend vers l'infini,  $\eta(\delta/N)$  tend vers 0 et le membre de droite également. Cela entraîne que  $\mu(f(A_p)) = 0$ .

b) Soit  $p$  un entier  $\geq 1$ , soit  $a \in A_p \setminus A_{p+1}$  ; autrement dit,  $D^p f(a) = 0$  mais  $D^{p+1} f(a) \neq 0$ . Il existe donc un  $(k_1, \dots, k_m) \in \mathbf{N}^m$  tel que  $k_1 + \dots + k_m = p + 1$  tels que  $\partial^{p+1} f / \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_m^{k_m}(a) \neq 0$ . Quitte à changer l'ordre des coordonnées, supposons  $k_1 \geq 1$  et  $\partial^{p+1} f_1 / \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_m^{k_m}(a) \neq 0$ . Posons alors  $h = \partial^p f_1 / \partial x_1^{k_1-1} \dots \partial x_m^{k_m}$  ; c'est une application de classe  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de  $\bar{U}$ , et  $\partial_1 h(a) \neq 0$ . Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^m$  l'application donnée par  $\varphi(x) = (h(x), x_2, \dots, x_m)$ . Elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $U$  et la matrice de sa différentielle en  $a$  est triangulaire, de diagonale  $(\partial_1 h(a), 1, 1, \dots, 1)$ , donc est inversible. D'après le théorème d'inversion locale (théorème 3.1.1), il existe alors un voisinage ouvert  $V$  de  $a$  dans  $U$  et un voisinage ouvert  $W$  de  $0 = \varphi(a)$  dans  $\mathbf{R}^m$  tels que  $\varphi(V) = W$  et  $\varphi$  réalise un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $V$  sur  $W$ .

Par construction,  $h$  s'annule sur  $A_p$ , donc  $\varphi(A_p \cap V) \subset \{0\} \times \mathbf{R}^{m-1}$ . Soit  $U'$  l'ensemble des points  $x \in \mathbf{R}^{m-1}$  tels que  $(0, x) \in W$  et soit  $f' : U' \rightarrow \mathbf{R}^n$  l'application  $x \mapsto f(\varphi^{-1}(0, x))$ . Elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Pour tout point  $x \in A_p \cap V$ , on a  $h(x) = 0$ , donc  $\varphi(x)$  est de la forme  $(0, x')$ . Puisque  $\varphi$  est un difféomorphisme en  $x$ ,  $(0, x')$  est un point critique de l'application  $f \circ \varphi^{-1}$  et  $x'$  est un point critique de  $f'$ . Par l'hypothèse de récurrence, l'ensemble des valeurs critiques de  $f'$  est de mesure nulle ; par suite,  $f'(A_p \cap V)$  est de mesure nulle.

a) Soit  $a \in A \setminus A_1$ ; autrement dit,  $a$  est un point critique de  $f$  mais  $Df(a) \neq 0$ . Quitte à changer l'ordre des coordonnées sur  $\mathbf{R}^m$  et sur  $\mathbf{R}^n$ , supposons que  $\partial f_1 / \partial x_1(a) \neq 0$  et soit alors  $\varphi: U \rightarrow \mathbf{R}^m$  l'application donnée par  $\varphi(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), x_2, \dots, x_m)$ . Elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et sa différentielle en  $a$  est triangulaire, de diagonale  $(\partial_1 f_1(a), 1, \dots, 1)$ , donc est inversible. D'après le théorème d'inversion locale (théorème 3.1.1), il existe alors un voisinage ouvert  $V$  de  $a$  dans  $U$  et un voisinage ouvert  $W$  de  $0 = \varphi(a)$  dans  $\mathbf{R}^n$  tels que  $\varphi(V) = W$  et  $\varphi$  réalise un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $V$  sur  $W$ .

Soit  $g: V \rightarrow \mathbf{R}^n$  l'application  $f \circ \varphi^{-1}$ . Par construction de  $\varphi$ , on a

$$g(x_1, \dots, x_m) = (x_1, g_2(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)).$$

Par conséquent, pour qu'un point  $x = (x_1, \dots, x_m) \in V$  soit un point critique de  $g$  il faut et il suffit que  $(x_2, \dots, x_m)$  soit un point critique de l'application

$$g'_{x_1}: (x_2, \dots, x_m) \mapsto (g_2(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m))$$

de l'ensemble  $V_{x_1} = \{x \in \mathbf{R}^{m-1}; (x_1, x) \in V\}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^{n-1}$ . Par l'hypothèse de récurrence,  $g'_{x_1}(V_{x_1})$  est de mesure nulle dans  $\mathbf{R}^{n-1}$ ; puisque

$$g(\{x_1\} \times V_{x_1}) = \{x_1\} \times g'(V_{x_1}) = g(V) \cap (\{x_1\} \times \mathbf{R}^{n-1}),$$

le théorème de Fubini entraîne que  $g(V)$  est de mesure nulle dans  $\mathbf{R}^n$ .  $\square$

*Conclusion de la démonstration du théorème 4.4.3.* — Soit  $p$  un entier assez grand de sorte que  $pn \geq nm$ . On a

$$f(A) = f(A \setminus A_1) \cup \bigcup_{k=1}^{p-1} f(A_k \setminus A_{k+1}) \cup f(A_p).$$

D'après le lemme précédent, tous ces ensembles sont de mesure nulle dans  $\mathbf{R}^n$ . Par suite,  $f(A)$  est de mesure nulle.  $\square$

#### § 4.5. Le théorème de plongement de Whitney

On a vu qu'une sous-variété d'un espace  $\mathbf{R}^n$  est naturellement munie d'une structure de variété différentiable. La réciproque est un énoncé fondamental, dû à Whitney (1935). Bien sûr, si  $M$  possède une infinité de composantes connexes de dimensions arbitrairement grandes, il ne peut exister de sous-variété d'un espace  $\mathbf{R}^n$  qui soit isomorphe à  $M$ .

**THÉORÈME 4.5.1.** — *Soit  $M$  une variété de classe  $\mathcal{C}^p$ . Supposons  $d = \dim(M) < \infty$ . Il existe une immersion injective et propre de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $M$  dans  $\mathbf{R}^{2d+1}$ .*

**LEMME 4.5.2.** — *Soit  $M$  une variété à bord de classe  $\mathcal{C}^p$ . Soit  $A$  une partie compacte de  $M$ . Il existe un entier  $n \geq 0$ , un voisinage  $U$  de  $A$  dans  $M$  et une immersion injective de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $U$  dans  $\mathbf{R}^n$ .*

Si  $M$  est compacte, on peut prendre  $A = M$ , de sorte que  $U = M$  également. Une telle immersion est alors automatiquement propre et induit donc un homéomorphisme de  $M$  sur son image. Ainsi, toute variété à bord compacte est une sous-variété d'un espace  $\mathbf{R}^n$ .

*Démonstration.* — Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $M$  par des domaines de cartes de classe  $\mathcal{C}^k$ ; pour tout  $i$ , soit  $\psi_i: U_i \rightarrow \mathbf{R}^{n_i}$  une immersion injective qui induit un homéomorphisme de  $U_i$  sur son image. Comme  $A$  est compact, il est recouvert par un sous-famille finie de  $(U_i)$ . On peut ainsi supposer que l'ensemble d'indices  $I$  est fini; posons  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ . Soit  $(f_i)$  une partition de l'unité de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $U$  subordonnée au recouvrement  $(U_i)$ . Pour tout  $i \in I$ , soit  $\psi_i: U_i \rightarrow \mathbf{R}^{1+n_i}$  l'application donnée par  $x \mapsto (f_i(x), f_i(x)\varphi_i(x))$ . Comme le support de  $f_i$  est contenu dans  $U_i$ , la fonction qui coïncide avec  $\psi_i$  sur  $U_i$  et est nulle hors de  $U_i$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ ; notons-la encore  $\psi_i$ . On définit alors  $\psi: U \rightarrow \prod_i \mathbf{R}^{1+n_i}$  par  $x \mapsto (\psi_i(x))_i$ . Elle est de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Soit  $V_i$  l'ouvert de  $U_i$  défini par l'inégalité  $f_i(x) \neq 0$ . Pour tout  $x \in V_i$ , on a  $\varphi_i(x) = q_i(\psi(x))/f_i(x)$ , où  $q_i$  est la projection de  $\prod_i \mathbf{R}^{1+n_i}$  sur le facteur  $\mathbf{R}^{1+n_i}$ , composée avec la projection sur le facteur  $\mathbf{R}^{n_i}$ . Comme  $\varphi_i$  est une immersion, cela entraîne que  $\psi$  est une immersion sur  $V_i$ . Puisque les ouverts  $V_i$  recouvrent  $U$ ,  $\psi$  est une immersion.

Démontrons que  $\psi$  est injective. Soit  $x, y$  des points de  $U$  tels que  $\psi(x) = \psi(y)$ . Par projection, on en déduit que  $f_i(x) = f_i(y)$  pour tout  $i$ . Soit  $i \in I$  tel que  $f_i(x) \neq 0$ . Ainsi,  $x$  et  $y$  appartiennent tous deux à  $V_i$ . Par suite,  $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$ . Puisque  $\varphi_i$  est injective sur  $U_i$ , on a donc  $x = y$ .  $\square$

LEMME 4.5.3. — Soit  $M$  une sous-variété de  $\mathbf{R}^n$ , de classe  $\mathcal{C}^p$  où  $p \geq 2$ . On suppose que  $n > 2 \dim(M) + 1$ . Pour presque tout  $a \in \mathbf{S}_{n-1}$ , la projection orthogonale  $p_a$  de  $\mathbf{R}^n$  sur l'orthogonal de  $a$  dans  $\mathbf{R}^n$  induit une immersion injective de  $M$  sur son image.

*Démonstration.* — Notons  $\Delta_M$  la diagonale de  $M \times M$  et soit  $f: M \times M \setminus \Delta_M \rightarrow \mathbf{S}_{n-1}$  l'application donnée par  $(x, y) \mapsto (y - x) / \|y - x\|$ . Elle est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Puisque  $n - 1 > 2 \dim(M) = \dim(M \times M)$ , son image  $F$  est donc de mesure nulle dans  $\mathcal{S}_{n-1}$ .

Soit  $TM$  le fibré tangent de  $M$ , c'est-à-dire la sous-variété de  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$  formée des couples  $(x, v)$  tels que  $x \in M$  et  $v \in T_x M$ . Notons  $TM^*$  l'ouvert de  $TM$  formé des couples  $(x, v) \in TM$  tels que  $v \neq 0$ . Soit  $g: TM^* \rightarrow \mathbf{S}_{n-1}$  l'application donnée par  $(x, v) \mapsto v / \|v\|$ . Comme  $p \geq 2$ , elle est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Puisque  $n - 1 > 2 \dim(M) = \dim(TM^*)$ , l'image  $G$  de  $g$  est de mesure nulle dans  $\mathbf{S}_{n-1}$ .

Ainsi,  $F \cup G$  est de mesure nulle dans  $\mathbf{S}_{n-1}$ . Soit  $A$  son complémentaire et soit  $a \in A$ .

Soit  $x, y$  des éléments de  $M$  tels que  $x \neq y$ . Comme  $a$  n'appartient pas à l'image de  $f$ ,  $y - x$  n'est pas un multiple positif de  $a$ ; de même,  $x - y$  n'est pas un multiple positif de  $a$ . Ainsi,  $x - y$  n'est pas colinéaire au vecteur  $a$  et  $p_a(x) \neq p_a(y)$ . Nous avons prouvé que  $p_a|_M$  est injective.

Soit  $x \in M$  et soit  $v \in T_x M$  tel que  $v \neq 0$ . Par construction encore,  $v$  n'est pas colinéaire à  $a$ , si bien que  $p_a(v) \neq 0$ . Cela entraîne que  $T_x p_a(v) = p_a(v) \neq 0$ . Autrement dit,  $p_a|_M$  est une immersion en  $x$ .

Le lemme est ainsi démontré.  $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 4.5.1.

*Démonstration.* — Le cas où  $M$  est compacte est une conséquence immédiate des deux lemmes précédents<sup>(1)</sup>.

Pour traiter le cas général, on commence par construire une fonction *propre*  $f: M \rightarrow \mathbf{R}_+$  de classe  $\mathcal{C}^p$ . Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $M$  par des ouverts relativement compacts dans  $M$ . Soit  $(f_i)_{i \in I}$  une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Nécessairement, l'ensemble des indices  $i$  tels que  $f_i \neq 0$  est au plus dénombrable et on peut donc supposer que  $I = \mathbf{N}$ . Soit alors  $f: M \rightarrow \mathbf{R}_+$  l'application donnée par  $x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} i f_i(x)$ . Hors de  $\bigcup_{i=0}^n U_i$ , on a  $f_j(x) = 0$  pour  $j > i$ , d'où

$$f(x) \leq \sum_{i=0}^n i f_i(x) \leq n \sum_{i=0}^n f_i(x) \leq n.$$

Cela entraîne que  $f^{-1}([0, n])$  est contenu dans la réunion des  $\overline{U}_i$ , pour  $0 \leq i \leq n$ . En particulier,  $f^{-1}([0, n])$  est compact. Cela prouve que  $f$  est propre.

Pour tout entier  $i \geq 0$ , posons  $F_i = f^{-1}([i - \frac{1}{3}, i + \frac{4}{3}])$  et  $V_i = f^{-1}([i - \frac{1}{4}, i + \frac{5}{4}])$ . Les ouverts  $V_i$  recouvrent  $M$ ; de plus, si  $i$  et  $j$  sont des entiers distincts mais de même parité,  $|i - j| \geq 2$  si bien que  $F_i$  et  $F_j$  sont disjoints. Soit  $(u_i)$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $M$  qui vaut 1 sur un voisinage de  $\overline{V}_i$  et est nulle hors de  $F_i$ .

Soit  $i \in \mathbf{N}$ . Soit  $V'_i$  un voisinage de  $F_i$  dans  $M$ , soit  $n_i$  un entier et soit  $\varphi_i: V'_i \rightarrow \mathbf{R}^{n_i}$  une immersion injective (lemme 4.5.2). Comme  $F_i$  est compact, la restriction de  $\varphi_i$  à  $F_i$  induit un homéomorphisme sur son image. Par suite,  $\varphi_i(V'_i)$  est une sous-variété de  $\mathbf{R}^{n_i}$ . D'après le lemme 4.5.3, il existe une application linéaire  $p_i$  telle que  $p_i \circ \varphi_i: V'_i \rightarrow \mathbf{R}^{2d+1}$  soit une immersion injective. L'application  $\psi_i: M \rightarrow \mathbf{R}^{2d+1}$  donnée par  $\psi_i(x) = 0$  si  $x \notin F_i$  et  $\psi_i(x) = u_i(x) p_i \circ \varphi_i(x)$  si  $x \in F_i$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ . Sa restriction à un voisinage de  $\overline{V}_i$  sur lequel  $u_i$  est identiquement égal à 1 coïncide avec  $p_i \circ \varphi_i$ , donc est une immersion injective. Comme  $\overline{V}_i$  est compact, elle induit un homéomorphisme de  $\overline{V}_i$  sur son image. Quitte à composer  $\psi_i$  avec un difféomorphisme de  $\mathbf{R}^{2d+1}$  sur la boule ouverte  $\mathbf{B}_{2d+1}^\circ$ , on suppose enfin que  $\psi_i$  est bornée.

Pour tout  $x \in M$ , on pose alors

$$\theta_0(x) = \sum_{i \text{ pair}} \psi_i(x), \quad \theta_1(x) = \sum_{i \text{ impair}} \psi_i(x),$$

et

$$\theta(x) = (\theta_0(x), \theta_1(x), f(x)).$$

<sup>(1)</sup> ... au moins si  $p \geq 2$ , le cas  $p = 1$  échappant étrangement à l'argument.



L'application  $\theta$  ainsi définie de  $M$  dans  $\mathbf{R}^{2d+1} \times \mathbf{R}^{2d+1} \times \mathbf{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ . Si  $x \in F_i$ , alors  $x$  n'appartient pas à  $F_j$  pour  $|j - i| \geq 2$ . Si  $i$  est pair, on a donc  $\theta_0(x) = \psi_i(x)$ ; si  $i$  est impair,  $\theta_1(x) = \psi_i(x)$ ; les applications  $\theta_0$  et  $\theta_1$  sont ainsi bornées. Cela entraîne que  $\theta$  est une immersion. Par ailleurs, si  $\theta(x) = \theta(y)$ , alors  $f(x) = f(y)$ ; alors, si  $x \in V_i$ , cela entraîne que  $y \in V_i$  aussi; il s'ensuit de plus que  $u_i(x) = u_i(y)$ . Si l'on choisit  $i$  de sorte que  $u_i(x) \neq 0$ , on conclut que  $\psi_i(x) = \psi_i(y)$ , d'où  $x = y$ . Enfin, l'application  $f$  est la composée de  $\theta$  et de la dernière projection. Comme  $f$  est propre,  $\theta$  est elle-même propre.

Nous avons ainsi construit une application  $\theta: M \rightarrow \mathbf{R}^n$  qui est une immersion injective telle que la composée  $q \circ \theta$  avec la dernière projection  $q$  soit une application propre. Si  $n > 2d + 1$ , le lemme 4.5.3 garantit l'existence d'un élément  $a \in \mathbf{S}_{n-1}$  distinct des vecteurs  $\pm(0, \dots, 0, 1)$  tel que la composée  $p_a \circ \theta$  soit une immersion injective. Par récurrence, il en résulte qu'il existe une application linéaire surjective  $p: \mathbf{R}^{2d+1} \times \mathbf{R}^{2d+1} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{2d+1}$  telle que  $p \circ \theta$  soit une immersion injective et telle que  $p(0, \dots, 0, 1) \neq 0$ .

En particulier, une des composantes de  $p$  est de la forme

$$(x_1, \dots, x_{2d+1}, y_1, \dots, y_{2d+1}, t) \mapsto \sum_{i=1}^{2d+1} a_i x_i + \sum_{i=1}^{2d+1} b_i y_i + ct,$$

où  $c \neq 0$ . Soit  $C$  une partie compacte de  $\mathbf{R}^{2d+1}$  et soit  $x \in M$  tel que  $p(\theta(x)) \in C$ . Comme  $\theta_0(M)$  et  $\theta_1(M)$  sont bornées par 1, il en résulte une majoration de  $f(x)$  par un nombre réel ne dépendant que de  $C$  (et des constantes  $a_i, b_i, c$  intervenant dans  $p$ ). Comme  $f$  est propre,  $x$  appartient à une partie compacte de  $M$ . Cela prouve que  $p \circ \theta$  est propre et conclut la preuve du théorème 4.5.1.  $\square$

### § 4.6. Le lemme de Morse

**THÉORÈME 4.6.1 (Lemme de Morse).** — *Soit  $E$  un espace de Banach réel, soit  $U$  un ouvert convexe de  $E$ , soit  $p$  un entier tel que  $p \geq 3$  et soit  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^p$ . Soit  $a \in E$  un point critique non dégénéré : on a  $Df(a) = 0$  et  $D^2 f(a) \in \mathcal{L}(E \times E; \mathbf{R})$  induit un isomorphisme de  $E$  sur  $E^*$ . Alors, il existe un voisinage  $V$  de 0 dans  $E$ , un  $\mathcal{C}^p$ -difféomorphisme  $\varphi: V \rightarrow U$  tel que  $\varphi(0) = a$ ,  $D\varphi(0) = \text{id}_E$  et pour tout  $x \in V$ ,*

$$f(x) = a + \frac{1}{2} D^2 f(a)(\varphi(x), \varphi(x)).$$

Pour simplifier les notations, on pose  $A = \frac{1}{2} D^2 f(a)$ . On note aussi  $\mathcal{L}_s(E; E^*)$  le sous-espace de  $\mathcal{L}(E; E^*)$  formé des applications linéaires continues  $u$  telles que  $tu: E^{**} \rightarrow E^*$  coïncide avec  $u$  sur  $E$ . Explicitons cette condition. Soit  $i: E \rightarrow E^{**}$  l'injection canonique de  $E$  dans son bidual; pour tout  $x \in E$ ,  $i(x)$  est l'application d'évaluation en  $x$ ,

donnée par  $i(x)(\varphi) = \varphi(x)$  pour tout  $\varphi \in E^*$ . Ainsi, pour  $x \in E$ ,  $tu(i(x)) = i(x) \circ u$  applique  $y$  sur  $u(y)(x)$ . Autrement dit,  $u \in \mathcal{L}_s(E; E^*)$  si et seulement si  $u(x)(y) = u(y)(x)$  pour tous  $x, y \in E$ . Observons aussi que  $\mathcal{L}_s(E; E^*)$  est fermé dans  $\mathcal{L}(E; E^*)$ .

Soit  $\alpha: E \rightarrow E^*$  l'application linéaire définie par  $\alpha(x)(y) = A(x, y)$  pour tous  $x, y \in E$ . Par définition d'une forme bilinéaire inversible, c'est un isomorphisme. Comme  $A$  est symétrique, on a  $\alpha \in \mathcal{L}_s(E; E^*)$ .

Soit enfin  $\mathcal{L}_s(E; E)$  le sous-espace de  $\mathcal{L}(E; E)$  formé des endomorphismes continus  $u$  tels que  $A(u(x), y) = A(x, u(y))$  pour tous  $x, y \in E$ . Il est fermé.

LEMME 4.6.2. — *L'application  $u \mapsto \alpha \circ u$  de  $\mathcal{L}(E; E)$  dans  $\mathcal{L}(E; E^*)$  est un isomorphisme d'espaces de Banach. Elle applique  $\mathcal{L}_s(E; E)$  sur  $\mathcal{L}_s(E; E^*)$ .*

*Démonstration.* — La première partie du lemme résulte immédiatement de ce que  $\alpha$  est un isomorphisme. Pour  $x \in E$  et  $u \in \mathcal{L}(E; E)$ , l'application linéaire  $\alpha \circ u(x) = \alpha(u(x))$  applique  $y \in E$  sur  $A(u(x), y)$ . Ainsi,  $\alpha \circ u$  appartient à  $\mathcal{L}_s(E; E^*)$  si et seulement si  $(\alpha \circ u)(x)(y) = (\alpha \circ u)(y)(x)$  pour tous  $x, y \in E$ , c'est-à-dire si et seulement si  $A(u(x), y) = A(x, u(y))$ . Autrement dit,  $\alpha \circ u$  appartient à  $\mathcal{L}_s(E; E^*)$  si et seulement si  $u$  appartient à  $\mathcal{L}_s(E; E)$ .  $\square$

LEMME 4.6.3. — *Soit  $\Phi: \mathcal{L}_s(E; E) \rightarrow \mathcal{L}_s(E; E^*)$  l'application définie par*

$$\Phi(u)(x)(y) = A(u(x), u(y))$$

*pour  $u \in \mathcal{L}_s(E; E)$ ,  $x \in E$  et  $y \in E$ . Elle est  $\mathcal{C}^\infty$  et l'on a  $\Phi(\text{id}_E) = \alpha$ . De plus, il existe un voisinage  $V$  de  $\text{id}_E$  dans  $\mathcal{L}_s(E; E)$  et un voisinage  $W$  de  $\alpha$  dans  $\mathcal{L}_s(E; E^*)$  tels que  $\Phi$  induise un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $V$  sur  $W$ .*

*Démonstration.* — Pour  $u, v \in \mathcal{L}_s(E; E)$  et  $x, y \in E$ , on a

$$\begin{aligned} (\Phi(u+v) - \Phi(u))(x)(y) &= A(u(x) + v(x), u(y) + v(y)) - A(u(x), u(y)) \\ &= A(u(x), v(y)) + A(v(x), u(y)) + A(v(x), v(y)), \end{aligned}$$

si bien que  $\Phi$  est différentiable en  $u$ , et

$$D\Phi(u)(v)(x, y) = A(u(x), v(y)) + A(v(x), u(y)).$$

En particulier,  $D\Phi$  est linéaire continue, donc  $\Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Observons aussi que pour  $v \in S$ ,  $x, y \in E$ , on a

$$D\Phi(\text{id}_E)(v)(x)(y) = A(v(x), y) + A(x, v(y)) = 2A(v(x), y) = 2\alpha \circ v(x)(y).$$

Autrement dit,  $D\varphi(\text{id}_E)(v) = 2\alpha \circ v$ .

D'après le lemme précédent,  $D\varphi(\text{id}_E)$  est un isomorphisme de  $\mathcal{L}_s(E; E)$  sur  $\mathcal{L}_s(E; E^*)$ . Le lemme découle alors du théorème d'inversion locale.  $\square$

*Preuve du théorème 4.6.1.* — Comme  $U$  est convexe, le segment  $[a, b]$  est contenu dans  $U$  pour tout  $b \in U$  et on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \int_0^1 Df(a + t(b-a))(b-a) dt \\ &= f(a) + Df(a)(b-a) + \int_0^1 (1-t)D^2f(a + t(b-a))(b-a, b-a) du. \end{aligned}$$

Par hypothèse,  $Df(a) = 0$ . Soit  $g: U \rightarrow \mathcal{L}_s(E; E^*)$  l'application telle que

$$g(b)(x)(y) = \int_0^1 (1-t)D^2f(a + t(b-a))(x, y) dt$$

pour tous  $x, y \in E$ . Elle est de classe  $\mathcal{C}^{p-2}$  et  $g(a)(x)(y) = \frac{1}{2}D^2f(a)(x, y) = A(x, y) = \alpha(x)(y)$ , c'est-à-dire  $g(a) = \alpha$ .

Soit  $V, W, \Phi$  comme dans le lemme précédent ; soit  $U_1$  l'ensemble des points  $b \in U$  tels que  $g(b) \in V$  et notons  $\gamma: U_1 \rightarrow \mathcal{L}_s(E; E)$  l'application  $\Phi^{-1} \circ g$ . Autrement dit, pour tout  $b \in U_1$  et tous  $x, y \in E$ ,

$$g(b)(x)(y) = A(\gamma(b)(x), \gamma(b)(y)).$$

En particulier, pour tout  $b \in U_1$ , on a

$$f(b) = f(a) + g(b)(b-a)(b-a) = f(a) + A(\gamma(b)(b-a), \gamma(b)(b-a)).$$

Soit  $\varphi: U_1 \rightarrow E$  l'application donnée par  $b \mapsto \gamma(b)(b-a)$ , de sorte que

$$f(b) = f(a) + A(\varphi(b), \varphi(b))$$

pour tout  $b \in U_1$ . Comme  $\Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et  $g$  de classe  $\mathcal{C}^{p-2}$ ,  $\gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^{p-2}$  et  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^{p-2}$  également. Puisque  $p \geq 3$ ,  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et l'on a

$$D\varphi(b) = D\gamma(b)(b-a) + \gamma(b)$$

pour tout  $b \in U_1$  ; en particulier,  $D\varphi(a) = \gamma(a) = \text{id}_E$ . En outre,  $\varphi(a) = 0$ .

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert  $U'$  de  $a$  contenu dans  $U_1$  et un voisinage ouvert  $V'$  de 0 dans  $E$  tels que  $\varphi$  induise un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^{p-3}$  de  $U'$  sur  $V'$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$



## CHAPITRE 5

# CHAMPS DE VECTEURS, ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

---

### § 5.1. Le fibré tangent d'une variété différentiable

PROPOSITION 5.1.1. — Soit  $M$  une sous-variété de classe  $\mathcal{C}^p$  d'un espace  $\mathbf{R}^n$ . Le sous-ensemble  $TM$  de  $M \times \mathbf{R}^n$  formé des couples  $(x, v)$  tels que  $v$  appartient au sous-espace  $T_x M$  est une sous-variété de classe  $\mathcal{C}^{p-1}$  de  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ . Sa dimension en un point  $(a, v)$  de  $TM$  est égale à  $2 \dim_a(M)$  ; son bord est l'ensemble des points  $(a, v)$  tels que  $a \in \partial M$  et  $v \in T_a M$ .

*Démonstration.* — Soit  $a \in M$ , posons  $m = \dim_a(M)$ , soit  $U$  un voisinage de  $a$  dans  $\mathbf{R}^n$ , soit  $V$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , soit  $\varphi: U \rightarrow V$  un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^p$  tel que  $\varphi(U \cap M) = \mathbf{H}_m \times \{0, \dots, 0\}$ . Soit  $\psi: U \times \mathbf{R}^n \times V \times \mathbf{R}^n$  l'application donnée par  $(x, v) \mapsto (\varphi(x), D_x \varphi(v))$ . Elle est de classe  $\mathcal{C}^{p-1}$ . Elle est bijective et son inverse est donnée par  $(y, w) \mapsto (\varphi^{-1}(y), D_y \varphi^{-1}(w))$ . Par suite,  $\psi$  est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^{p-1}$ .

Notons  $f: TM \rightarrow M$  l'application donnée par  $(x, v) \mapsto x$ . Elle est continue (et même de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ). Pour  $(x, v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ , on a  $(x, v) \in f^{-1}(U)$  si et seulement si  $\varphi(x) \in \mathbf{H}_m \times \{0\}$  et  $D_x \varphi(v) \in \mathbf{R}^m \times \{0\}$ . Ainsi,  $f^{-1}(U)$  est égal à l'image réciproque de  $\mathbf{H}_m \times \{0\} \times \mathbf{R}^m \times \{0\}$  par  $\psi$ . Cela démontre que  $TM$  est une sous-variété de classe  $\mathcal{C}^{p-1}$  de  $\mathbf{R}^{2n}$ . Son bord est  $f^{-1}(\partial(M))$ .  $\square$

Soit  $M$  une variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^p$ . Soit  $TM$  l'ensemble des couples  $(x, v)$ , où  $x \in M$  et  $v \in T_x M$  ; on note  $f: TM \rightarrow M$  l'application  $(x, v) \mapsto x$ .

THÉORÈME 5.1.2. — Il existe une unique structure de variété différentiable (de classe  $\mathcal{C}^{p-1}$ ) sur  $TM$  pour laquelle  $f$  est continue et telle que tout ouvert  $U$  de  $M$  et toute carte  $\varphi: U \rightarrow \mathbf{R}^m$  de classe  $\mathcal{C}^p$ , l'application de  $f^{-1}(U)$  dans  $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$  donnée par  $(x, v) \mapsto (\varphi(x), T_x \varphi(v))$  soit une carte de classe  $\mathcal{C}^{p-1}$ .

*Démonstration.* — Soit  $a$  un point de  $M$ , posons  $m = \dim_a(M)$ , soit  $U$  un ouvert de  $M$ ,  $V$  un ouvert de  $\mathbf{H}_m$  et soit  $\varphi: U \rightarrow \mathbf{R}^m$  une carte de classe  $\mathcal{C}^p$  telle que  $\varphi(U) = V$ . L'application  $T\varphi$  de  $f^{-1}(U)$  sur  $V \times \mathbf{R}^m$  donnée par  $(x, v) \mapsto (\varphi(x), T_x \varphi(v))$  est bijective. Si

$TM$  est munie d'une structure de variété différentiable comme prescrit par l'énoncé,  $f^{-1}(U)$  est ouvert dans  $TM$  et  $T\varphi$  est une carte sur  $f^{-1}(U)$ . Cela entraîne qu'il existe au plus une structure de variété différentiable vérifiant la condition de l'énoncé.

Inversement, pour prouver l'existence d'une telle structure, il suffit de vérifier que les applications  $T\varphi$  comme ci-dessus forment un atlas sur  $TM$ . Soit donc  $\varphi, \varphi'$  deux cartes définies sur des ouverts  $U$  et  $U'$  respectivement, de buts des ouverts  $\varphi(U)$  de  $\mathbf{H}_m$  et  $\varphi'(U')$  de  $\mathbf{H}_{m'}$ . Posons  $V = U \cap U'$  et soit  $\psi: \varphi(V) \rightarrow \varphi'(V)$  le difféomorphisme de changement de cartes. On peut supposer que  $V \neq \emptyset$ ; alors,  $m = m'$ . L'application de changement de cartes associée aux cartes  $T\varphi$  et  $T\varphi'$  est donnée par

$$T\psi: \varphi(V) \times \mathbf{R}^m \rightarrow \varphi'(V) \times \mathbf{R}^m, \quad (x, v) \mapsto (\psi(x), D_x\psi(v)).$$

C'est une application de classe  $\mathcal{C}^{p-1}$ . C'est en fait un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^{p-1}$ , son inverse étant l'application  $T(\psi^{-1})$  associée à  $\psi^{-1}$ .

Il reste à vérifier que  $TM$  est métrisable et séparable. □

PROPOSITION 5.1.3. — *Soit  $f: M \rightarrow N$  un morphisme de classe  $\mathcal{C}^p$  entre variétés différentiables. L'application  $Tf: TM \rightarrow TN$  est de classe  $\mathcal{C}^{p-1}$ .*

DÉFINITION 5.1.4. — *Soit  $M$  une variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^p$ . Un champ de vecteurs (de classe  $\mathcal{C}^q$ , où  $q \leq p-1$ ) sur un ouvert  $U$  de  $M$  est une application  $X$  de classe  $\mathcal{C}^q$  de  $U$  dans  $TM$  telle que  $X(a) \in T_aM$  pour tout  $a \in U$ .*

PROPOSITION 5.1.5. — *Soit  $U$  un ouvert de  $M$ , soit  $X$  et  $X'$  des champs de vecteurs sur  $U$ , de classe  $\mathcal{C}^q$ , soit  $u$  et  $u'$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^q$  sur  $U$ . Alors l'application  $a \mapsto u(a)X(a) + u'(a)X'(a)$  est un champ de vecteurs sur  $U$ .*

DÉFINITION 5.1.6. — *On dit qu'une variété différentiable  $M$  est parallélisable s'il existe des champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_m$  sur  $M$  tels que pour tout  $a \in M$ ,  $(X_1(a), \dots, X_m(a))$  soit une base de  $T_a(M)$ .*

## CHAPITRE 6

### FORMES DIFFÉRENTIELLES

---

#### § 6.1. L'algèbre des formes multilinéaires alternées

DÉFINITION 6.1.1. — Soit  $k$  un anneau, soit  $V$  un  $k$ -module, soit  $p$  un entier  $\geq 0$ . Une forme  $p$ -linéaire sur  $V$  est une application  $\omega: V^p \rightarrow k$  qui est linéaire en chaque variable. On dit qu'elle est alternée si  $\omega(v_1, \dots, v_p) = 0$  dès qu'il existe  $i \neq j$  dans  $\{1, \dots, p\}$  tels que  $v_i = v_j$ .

Remarque 6.1.2. — Soit  $p$  un entier  $\geq 0$ . On rappelle que le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_p$  est le groupe des permutations de  $\{1, \dots, p\}$ . Son cardinal est  $p!$ .

Ce groupe est engendré par les transpositions, c'est-à-dire les permutations qui échangent deux éléments et fixent tous les autres. Il est même engendré par les transpositions de la forme  $(i, i+1)$ , pour  $1 \leq i < p$ .

Si  $\sigma \in \mathfrak{S}_p$  est une permutation, on note  $\varepsilon(\sigma)$  sa signature. C'est un élément de  $\{\pm 1\}$  donné par

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq p} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Si  $\sigma = (i, i+1)$ , plus généralement si  $\sigma$  est une transposition, on constate que  $\varepsilon(\sigma) = -1$ . L'application  $\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$  est un morphisme de groupes.

LEMME 6.1.3. — Soit  $\omega$  une forme  $p$ -linéaire alternée sur un  $k$ -module  $V$ . Pour tous  $v_1, \dots, v_p \in V$  et tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ , on a

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\omega(v_1, \dots, v_p).$$

Démonstration. — On traite d'abord le cas où  $\sigma = (i, i+1)$ . Dans ce cas, on calcule

$$\omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + v_{i+1}, v_i + v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_p).$$

Puisque  $\omega$  est alternée, ce nombre vaut 0. Puisque  $\omega$  est  $p$ -linéaire, il vaut aussi

$$\begin{aligned} & \omega(v_1, \dots, v_i, v_i, v_{i+2}, \dots, v_p) + \omega(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_p) + \\ & + \omega(v_1, \dots, v_{i+1}, v_i, v_{i+2}, \dots, v_p) + \omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_p); \end{aligned}$$

dans cette expression, le premier et le dernier termes sont nuls, car  $\omega$  est alternée. On a donc

$$\omega(v_1, \dots, v_{i+1}, v_i, v_{i+2}, \dots, v_p) = -\omega(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_p),$$

comme il fallait démontrer.

L'ensemble des permutations  $\sigma$  pour lesquelles la formule est vraie est un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_p$ ; il contient les permutations de la forme  $(i, i+1)$ , donc il contient le sous-groupe qu'elles engendrent, c'est-à-dire  $\mathfrak{S}_p$ . Le lemme est ainsi démontré.  $\square$

Soit  $k$  un anneau, soit  $V$  un  $k$ -module. Pour tout entier  $p \geq 0$ , on note  $A^p(V)$  l'ensemble des formes  $p$ -linéaires alternées sur  $V$ ; c'est un sous- $k$ -module de l'ensemble des applications de  $V^p$  dans  $k$ .

Le cas  $p = 0$  est amusant. Le module  $V^0$  est le module nul; une application  $\omega: V^0 \rightarrow k$  est donc un élément de  $k$ . La condition de linéarité en chaque variable est vide, puisqu'il n'y a pas de variable; il en est de même de la condition d'alternance. Ainsi,  $A^0(V) = k$ .

On pose enfin  $A(V)$  la somme directe de ces  $k$ -modules, lorsque  $p$  parcourt  $\mathbf{N}$ ; c'est un  $k$ -module *gradué*, au sens où il est présenté comme somme directe d'une famille de modules indexée par les éléments d'un groupe abélien (en l'occurrence  $\mathbf{Z}$ ).

Nous allons le munir d'une structure d'algèbre dont le produit sera noté  $\wedge$ . Cette algèbre sera *graduée commutative* au sens suivant : si  $\omega \in A^p(V)$  et  $\eta \in A^q(V)$ , alors  $\omega \wedge \eta \in A^{p+q}(V)$  et

$$\eta \wedge \omega = (-1)^{pq} \omega \wedge \eta.$$

Pour  $p, q \in \mathbf{N}$ , notons  $S(p, q)$  l'ensemble des permutations  $\sigma$  de  $\{1, \dots, p+q\}$  qui vérifient

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(p) \quad \text{et} \quad \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q).$$

Une telle permutation est déterminée par la partie  $\{\sigma(1), \dots, \sigma(p)\}$ , et toute partie à  $p$  éléments de  $\{1, \dots, p+q\}$  et ainsi obtenue. Par suite, le cardinal de  $S(p, q)$  est égal à  $\binom{p+q}{p}$ .

**DÉFINITION 6.1.4.** — Soit  $k$  un anneau, soit  $V$  un  $k$ -module, soit  $p, q$  des entiers naturels. Soit  $\omega \in A^p(V)$ ,  $\eta \in A^q(V)$ . Si  $p, q \geq 1$ , on définit une application  $\omega \wedge \eta: V^{p+q} \rightarrow k$  par la formule

$$(6.1.5) \quad \omega \wedge \eta(v_1, \dots, v_{p+q}) = \sum_{\sigma \in S(p, q)} \varepsilon(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \eta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}).$$

**Exemple 6.1.6.** — a) Si  $p = 0$ , on a  $S(0, q) = \{\text{id}\}$ ; de plus,  $\omega$  est un élément de  $k$  et l'on a  $\omega \wedge \eta = \omega\eta$ . De même, si  $q = 0$ , alors  $S(p, q) = S(p, 0) = \{\text{id}\}$ ,  $\eta$  est un élément de  $k$  et l'on a  $\omega \wedge \eta = \eta\omega$ .

b) Supposons  $p = q = 1$ . L'ensemble  $S(1, 1)$  est égal à  $\mathfrak{S}_2$ , donc on a

$$\omega \wedge \eta(v, w) = \omega(v)\eta(w) - \omega(w)\eta(v).$$



c) Plus généralement, supposons  $p = 1$  mais prenons  $q \geq 1$  est arbitraire. Pour tout  $i \in \{1, \dots, q+1\}$ , l'unique permutation  $\sigma \in S(1, q)$  telle que  $\sigma(1) = i$  applique  $2, \dots, i$  sur  $1, \dots, i-1$ , et  $i+1, \dots, q+1$  sur eux-mêmes. C'est un cycle de longueur  $i$  et elle a donc pour signature  $(-1)^{i-1}$ . Ainsi,

$$\omega \wedge \eta(v_1, \dots, v_{q+1}) = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i-1} \omega(v_i) \eta(v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{p+1}),$$

où le symbole  $\widehat{\phantom{x}}$ , signifie que ce terme est omis.

PROPOSITION 6.1.7. — *L'application  $\omega \wedge \eta$  est  $(p+q)$ -linéaire alternée.*

*Démonstration.* — La linéarité de  $\omega \wedge \eta$  en chaque variable se vérifie immédiatement en inspectant chaque terme de la formule. Il reste à montrer que  $\omega \wedge \eta$  est alternée. Soit  $i \in \{1, \dots, p+q-1\}$ , soit  $v_1, \dots, v_{p+q}$  des éléments de  $V$  tels que  $v_i = v_{i+1}$ ; démontrons que  $\omega \wedge \eta(v_1, \dots, v_{p+q}) = 0$ . Soit  $\sigma \in S(p, q)$ ; si  $\{\sigma(1), \dots, \sigma(p)\}$  contient à la fois  $i$  et  $i+1$ , alors  $\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) = 0$ ; de même, s'il ne contient ni  $i$  ni  $i+1$ ,  $\{\sigma(p+1), \dots, \sigma(p+q)\}$  contient à la fois  $i$  et  $i+1$ , donc  $\eta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) = 0$ . Notons  $S(p, q)_i$  l'ensemble des éléments  $\sigma \in S(p, q)$  tels que  $\{\sigma(1), \dots, \sigma(p)\}$  contienne  $i$  mais pas  $i+1$ ; notons  $S(p, q)_{i+1}$  l'ensemble des éléments  $\sigma \in S(p, q)$  tels que  $\{\sigma(1), \dots, \sigma(p)\}$  contienne  $i+1$  mais pas  $i$ . Si  $\sigma \in S(p, q)_i$ , on note  $\sigma'$  l'élément de  $S(p, q)_{i+1}$  qui coïncide avec  $\sigma$  sauf là où  $\sigma$  prend les valeurs  $i$  et  $i+1$ . Autrement dit,  $\sigma' = (i, i+1) \circ \sigma$ . Comme  $\sigma$  ne prend pas la valeur  $i$  (resp.  $i+1$ ) sur  $\{1, \dots, p\}$ ,  $\sigma'$  appartient effectivement à  $S(p, q)_{i+1}$  (resp. à  $S(p, q)_i$ ). Les applications  $\sigma \mapsto \sigma'$  sont des bijections de  $S(p, q)_i$  sur  $S(p, q)_{i+1}$  et de  $S(p, q)_{i+1}$  sur  $S(p, q)_i$ ; elles vérifient  $\sigma'' = \sigma$ . De plus,  $\varepsilon(\sigma') = -\varepsilon(\sigma)$ . Puisque  $v_i = v_{i+1}$ , les termes de la définition de  $\omega \wedge \eta(v_1, \dots, v_n)$  correspondant à  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont donc opposés. Par suite,  $\omega \wedge \eta(v_1, \dots, v_{p+q}) = 0$ , comme il fallait démontrer.  $\square$

Il est évident sur les formules que l'application  $(\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta$  de  $A^p(V) \times A^q(V)$  dans  $A^{p+q}(V)$  est bilinéaire.

PROPOSITION 6.1.8. — *Soit  $\omega \in A^p(V)$ ,  $\eta \in A^q(V)$ ,  $\theta \in A^r(V)$ . Alors :*

$$(6.1.9) \quad \omega \wedge (\eta \wedge \theta) = (\omega \wedge \eta) \wedge \theta,$$

$$(6.1.10) \quad \eta \wedge \omega = (-1)^{pq} \omega \wedge \eta.$$

*Démonstration.* — La seconde formule résulte de ce que la permutation de  $\{1, \dots, p+q\}$  qui applique  $1, \dots, p$  sur  $q+1, \dots, q+p$  et  $p+1, \dots, p+q$  sur  $1, \dots, p$  a pour signature  $(-1)^{pq}$ . Pour la première, notons  $S(p, q, r)$  l'ensemble des permutations  $\sigma$  de  $\{1, \dots, p+q+r\}$  telles que

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(p), \quad \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q), \quad \sigma(p+q+1) < \dots < \sigma(p+q+r).$$

$$\begin{aligned}
\omega \wedge (\eta \wedge \theta) &= \sum_{\sigma \in S(p, q+r)} \varepsilon(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) (\eta \wedge \theta)(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q+r)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S(p, q+r)} \varepsilon(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \times \\
&\quad \times \sum_{\tau \in S(q, r)} \varepsilon(\tau) \eta(v_{\sigma(p+\tau(1))}, \dots, v_{\sigma(p+\tau(q))}) \theta(v_{\sigma(p+\tau(q+1))}, \dots, v_{\sigma(p+\tau(q+r))}).
\end{aligned}$$

Pour  $\sigma \in S(p, q+r)$  et  $\tau \in S(q, r)$ , on définit  $\psi \in S(p, q, r)$  par  $\psi(i) = \sigma(i)$  si  $i \leq p$  et  $\psi(p+i) = \sigma(p+\tau(i))$  si  $i \geq p+1$ . Autrement dit,  $\psi = \sigma \circ \tau'$ , où  $\tau'$  est la permutation de  $\{1, \dots, p+q+r\}$  donnée par  $i \mapsto i$  sur  $\{1, \dots, p\}$  et par  $i+p \mapsto \tau(i)+p$  sur  $\{p+1, \dots, p+q+r\}$ . On a  $\varepsilon(\tau') = \varepsilon(\tau)$ , donc  $\varepsilon(\psi) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ . De plus, toute permutation de  $S(p, q, r)$  s'écrit sous la forme  $\sigma \circ \tau'$  pour un unique couple  $(\sigma, \tau)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\omega \wedge (\eta \wedge \theta)(v_1, \dots, v_{p+q+r}) \\
&= \sum_{\sigma \in S(p, q, r)} \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \eta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) \theta(v_{\sigma(p+q+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q+r)}).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
(\omega \wedge \eta) \wedge \theta &= \sum_{\sigma \in S(p+q, r)} \varepsilon(\sigma) (\omega \wedge \eta)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) \theta(v_{\sigma(p+q+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q+r)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S(p+q, r)} \varepsilon(\sigma) \sum_{\tau \in S(p, q)} \varepsilon(\tau) \omega(v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(p)}) \eta(v_{\sigma\tau(p+1)}, \dots, v_{\sigma\tau(p+q)}) \times \\
&\quad \times \theta(v_{\sigma(p+q+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q+r)}).
\end{aligned}$$

Pour  $\sigma \in S(p+q, r)$  et  $\tau \in S(p, q)$ , on définit  $\psi \in S(p, q, r)$  par  $\psi(i) = \sigma\tau(i)$  si  $i \leq p+q$  et  $\psi(i) = \sigma(i)$  si  $i \geq p+q+1$ . Autrement dit,  $\psi = \sigma \circ \tau''$ , où  $\tau''$  est la permutation de  $\{1, \dots, p+q+r\}$  donnée par  $\tau$  sur  $\{1, \dots, p+q\}$  et par l'identité sur  $\{p+1, \dots, p+q+r\}$ . On a  $\varepsilon(\tau'') = \varepsilon(\tau)$ , donc  $\varepsilon(\psi) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ . De plus, toute permutation de  $S(p, q, r)$  s'écrit sous la forme  $\sigma \circ \tau''$  pour un unique couple  $(\sigma, \tau)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
&(\omega \wedge \eta) \wedge \theta(v_1, \dots, v_{p+q+r}) \\
&= \sum_{\sigma \in S(p, q, r)} \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \eta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) \theta(v_{\sigma(p+q+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q+r)}).
\end{aligned}$$

La proposition en résulte. □

**DÉFINITION 6.1.11.** — Soit  $k$  un anneau et soit  $V$  un  $k$ -module. On appelle algèbre des formes multi-linéaires alternées sur  $V$  la somme directe  $A(V) = \bigoplus_{p \in \mathbf{N}} A^p(V)$ , munie du produit  $\wedge$ .

C'est une  $k$ -algèbre graduée (on dit que les éléments de  $A^p(V)$  sont de degré  $p$ ), associative, et anti-commutative (formule (6.1.10)).

**PROPOSITION 6.1.12.** — On suppose que  $V$  est un module libre de rang fini  $n$ . Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $V$ , soit  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  la base duale de  $V^*$ . Pour tout entier  $p \in \mathbf{N}$ , la

famille  $(\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}$  est une base de  $A^p(V)$ . Par suite, on a  $A^p(V)$  est un  $k$ -module libre de rang  $\binom{n}{p}$ . On a donc  $A^p(V) = 0$  pour  $p > n$ .

*Démonstration.* — Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 6.1.13. — Soit  $\omega_1, \dots, \omega_p$  des formes linéaires sur  $V$ , soit  $(v_1, \dots, v_p)$  des éléments de  $V$ . Alors,

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p(v_1, \dots, v_p) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \omega_1(v_2) & \cdots & \omega_1(v_p) \\ \omega_2(v_1) & \omega_2(v_2) & \cdots & \omega_2(v_p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_p(v_1) & \omega_p(v_2) & \cdots & \omega_p(v_p) \end{pmatrix}$$

*Démonstration.* — Le cas  $p = 1$  est évident, de même que le cas  $p = 0$  (un produit de 0 facteur est égal à 1, de même que le déterminant d'une matrice carrée de taille nulle). Démontrons l'assertion par récurrence sur  $p$ . Par définition, on a

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p(v_1, \dots, v_p) &= \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(v_1, \dots, v_p) \\ &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \omega_1(v_i) (\omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p) \\ &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \omega_1(v_i) \det \begin{pmatrix} \omega_2(v_1) & \omega_2(v_2) & \cdots & \omega_2(v_p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_p(v_1) & \omega_p(v_2) & \cdots & \omega_p(v_p) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \omega_1(v_2) & \cdots & \omega_1(v_p) \\ \omega_2(v_1) & \omega_2(v_2) & \cdots & \omega_2(v_p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_p(v_1) & \omega_p(v_2) & \cdots & \omega_p(v_p) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

comme on le voit en développant ce dernier déterminant suivant la première ligne.  $\square$

Revenons maintenant à la preuve de la proposition **??**. Soit  $(a_1, \dots, a_p)$  et  $(b_1, \dots, b_p)$  des suites croissantes d'entiers de  $\{1, \dots, n\}$ . D'après le lemme précédent, on a

$$\omega_{a_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{a_p}(e_{b_1}, \dots, e_{b_p}) = \det(\omega_{a_i}(e_{b_j})).$$

Si deux termes de la suite  $(a_i)$  sont égaux, ou si deux termes de la suite  $(b_j)$  sont égaux, ce déterminant est nul. Supposons donc les entiers  $a_i$  tous distincts, de même que les entiers  $b_j$ . S'il existe  $i$  tel que  $a_i$  n'appartienne pas à  $\{b_1, \dots, b_p\}$ , la ligne  $i$  est identiquement nulle; il en est de même s'il existe  $j$  tel que  $b_j$  n'appartienne pas à  $\{a_1, \dots, a_p\}$ ; ce déterminant est donc nul si  $\{a_1, \dots, a_p\} \neq \{b_1, \dots, b_p\}$ . Supposons que ces deux ensembles soient égaux et soit  $\sigma$  la permutation telle que  $\sigma(a_i) = b_i$ ; on a alors  $\det(\omega_{a_i}(e_{b_j})) = \varepsilon(\sigma)$ .

Soit maintenant  $\eta$  une forme  $p$ -linéaire alternée sur  $V$ . Pour tout vecteur  $v \in V$ , on a  $v = \sum_{a=1}^n \omega_a(v) e_a$ . Par suite, pour toute famille  $(v_1, \dots, v_p)$  de vecteurs de  $V$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \eta(v_1, \dots, v_p) &= \sum_{a_1=1}^n \dots \sum_{a_p=1}^n \eta(\omega_{a_1}(v_1) e_{a_1}, \dots, \omega_{a_p}(v_p) e_{a_p}) \\ &= \sum_{a_1=1}^n \dots \sum_{a_p=1}^n \omega_{a_1}(v_1) \dots \omega_{a_p}(v_p) \eta(e_{a_1}, \dots, e_{a_p}) \\ &= \sum_{a \in S(p, n-p)} \eta(e_{a_1}, \dots, e_{a_p}) (\omega_{a_1} \wedge \dots \wedge \omega_{a_p})(v_1, \dots, v_p). \end{aligned}$$

Cela prouve que la famille indiquée engendre  $A^p(V)$ . Inversement, soit  $(\lambda_a)_{a \in S(p, n-p)}$  une famille d'éléments de  $k$  telle que  $\sum \lambda_a \omega_{a_1} \wedge \dots \wedge \omega_{a_p} = 0$ . Évaluons cette forme  $p$ -linéaire alternée en  $(e_{a_1}, \dots, e_{a_p})$ , pour  $a \in S(p, n-p)$ , on trouve  $\lambda_a = 0$ . Cette famille est donc libre.  $\square$

**6.1.14. Functorialité.** — Soit  $f: V \rightarrow W$  une application linéaire entre  $k$ -modules et soit  $\omega$  une forme  $p$ -linéaire alternée sur  $W$ . Alors, l'application  $(v_1, \dots, v_p) \mapsto \omega(f(v_1), \dots, f(v_p))$  est une forme  $p$ -linéaire alternée sur  $V$ , que l'on note  $f^*(\omega)$ . L'application  $f^*: A^p(W) \rightarrow A^p(V)$  est linéaire. L'application  $f^*: A(W) \rightarrow A(V)$  est un morphisme d'algèbres graduées : pour  $\omega \in A^p(W)$  et  $\eta \in A^q(W)$ , on a  $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$ .

## BIBLIOGRAPHIE

---

- D. GALE (1987), « The Teaching of Mathematics : The Classification of 1-Manifolds : A Take-Home Exam ». *Amer. Math. Monthly*, **94** (2), p. 170–175. URL <http://dx.doi.org/10.2307/2322421>.
- V. GUILLEMIN & A. POLLACK (2010), *Differential topology*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI. Reprint of the 1974 original.
- W. KULPA (1998), « Poincaré and domain invariance theorem ». *Acta Univ. Carolin. Math. Phys.*, **39** (1-2), p. 127–136.
- P. D. LAX (1999), « Change of variables in multiple integrals ». *Amer. Math. Monthly*, **106** (6), p. 497–501. URL <http://dx.doi.org/10.2307/2589462>.
- J. MILNOR (1965), *Topology from the Differentiable Viewpoint*. Princeton Univ. Press.
- S. STERNBERG (1983), *Lectures on differential geometry*. Chelsea Publishing Co., New York, second édition. With an appendix by Sternberg and Victor W. Guillemin.