ALGÈBRE

A. CHAMBERT-LOIR

Examen du jeudi 5 novembre 2015 (2 heures)

Le partiel se compose de quatre exercices à résoudre sans document, ni téléphone, ni calculatrice, ni aide des voisins.

EXERCICE 1

1 Soit G un groupe opérant dans un ensemble fini X. Pour $x \in X$, on note G_x son stabilisateur et O_x son orbite. Démontrer que $\operatorname{Card}(O_x) = (G : G_x)$.

2 Dans l'énoncé « Soit A et B des groupes ; le groupe $A \times B$ est cyclique si et seulement si les groupes A et B sont cycliques. », quelles implications sont vraies ? (Justifier votre réponse par une preuve ou un contre-exemple.)

3 Soit G un groupe et soit A, B des sous-groupes de G. Est-ce que $AB = \{ab\,;\ a \in A,\ b \in B\}$ est un sous-groupe de G ? Donner une condition suffisante non triviale portant sur le sous-groupe B pour que ce soit le cas. Justifier votre réponse.

4 Soit G un groupe simple commutatif. Démontrer qu'il existe un nombre premier p tel que $G \simeq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

EXERCICE 2

Soit G un groupe.

1 On suppose que l'ensemble des sous-groupes de G est fini. Démontrer que G est fini.

2 Soit n un entier $\geqslant 1$; on suppose que $G = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Quels sont les sous-groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$? Combien y en a-t-il ? (Exprimer votre réponse en fonction de la décomposition en facteurs premiers de n.)

3 On suppose que G contient au plus quatre sous-groupes. Démontrer que G est cyclique et que son cardinal est de la forme $1, p, p^2, p^3, pq$, où p et q sont des nombres premiers distincts.

4 Donner un exemple de groupe non cyclique qui possède cinq sous-groupes.

EXERCICE 3

1 Soit G un groupe. On note $Z(G)$ son centre et l'on suppose que le groupe quotient $G/Z(G)$ est un groupe monogène. Démontrer que G est commutatif.

2 Énoncer et démontrer l'équation aux classes dans un groupe fini.

3 Soit p un nombre premier et soit G un p-groupe. Démontrer que $Z(G) \neq \{e\}$.

4 Soit p un nombre premier et soit G un groupe de cardinal p^2. Démontrer que G est commutatif.

5 Soit G un groupe fini. Soit A et B des sous-groupes distingués de G tels que $A \cap B = \{e\}$. Démontrer que $ab = ba$ pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$.

6 Soit G un groupe de cardinal 45. Soit P un 3-sylow de G et soit Q un 5-sylow de G.

a) Démontrer que P et Q sont des sous-groupes distingués de G.

b) Démontrer que P et Q sont abéliens.

c) Démontrer que G est isomorphe à $P \times Q$ et est commutatif.

d) Expliciter un ensemble de groupes de cardinal 45 tel que tout groupe de cardinal 45 soit isomorphe à exactement l'un d'entre eux.

EXERCICE 4

Soit G un groupe fini. Pour $g \in G$, on note $C_G(g)$ sa classe de conjugaison dans G et $Z_G(g)$ son centralisateur.

1 Démontrer que pour tout $g \in G$, on a $\mathrm{Card}(C_G(g)) = \mathrm{Card}(G)/\mathrm{Card}(Z_G(g))$.

2 Soit H un sous-groupe de G tel que $(G : H) = 2$. Démontrer que H est un sous-groupe distingué de G.

3 Soit $g \in H$. On suppose que $C_H(g) \neq C_G(g)$. Démontrer que $\mathrm{Card}(C_G(g)) = 2\,\mathrm{Card}(C_H(g))$.

4 On suppose que $G = \mathfrak{S}_n$. Soit $g \in \mathfrak{S}_n$ une permutation et soit $O_1, \dots, O_p$; pour tout i, on pose $m_i = \mathrm{Card}(O_i)$ et on note g_i la permutation de $\mathfrak{S}_n$ de support contenu dans O_i qui coïncide avec g sur O_i.

a) Démontrer que $Z_G(g)$ contient $\{g_1, \dots, g_p\}$.

b) Soit $h \in Z_G(g)$. Démontrer que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, il existe $j \in \{1, \dots, p\}$ tel que $h(O_i) = O_j$.

c) Démontrer que $Z_G(g)$ est égal au sous-groupe engendré par $\{g_1, \dots, g_p\}$ si et seulement si les entiers m_i sont deux à deux distincts.

Dans ce cas, en déduire que l'on a $Z_G(g) \simeq \prod_{i=1}^{p} (\mathbf{Z}/m_i\mathbf{Z})$.

5 On conserve les notations de la question précédente. On pose $H = \mathfrak{A}_n$ et on suppose en outre que $g \in H$. Démontrer que $C_{\mathfrak{S}_n}(g) \neq C_{\mathfrak{A}_n}(g)$ si et seulement si les m_i sont impairs et deux à deux distincts.