Licence (L3) Année 2015/2016

ALGÈBRE

Exercices sur les ensembles, les relations et les structures

A. CHAMBERT-LOIR

EXERCICE 1

Soit A et B des ensembles.

1 Soit E l'ensemble des couples (S,f) où S est une partie de A et $f\colon S\to B$ une application injective. On munit E de la relation d'ordre pour laquelle $(S,f)\preceq(S',f')$ si $S\subset S'$ et $f'|_S=f$. Démontrer que l'ensemble ordonné E est inductif, donc possède un élément maximal.

2 En considérant un élément maximal de E, démontrer qu'il existe une injection de A dans B ou une injection de B dans A.

3 (Théorème de Cantor-Bernstein) On suppose qu'il existe des injections $f\colon A\to B$ et $g\colon B\to A$. On définit des ensembles (A_n) et (B_n) par récurrence sur n en posant $A_0=A$, $B_0=B$, et, pour $n\geqslant 0$, $A_{n+1}=g(B_n)$ et $B_{n+1}=f(A_n)$; on pose aussi $A_n^*=A_n - A_{n+1}$ et $B_n^*=B_n - B_{n+1}$; soit enfin $A_\infty=\bigcap_{n\in\mathbf N}A_n$ et $B_\infty=\bigcap_{n\in\mathbf N}B_n$. Démontrer que f et g induisent des bijections de A_n^* sur B_{n+1}^* et de B_n^* sur A_{n+1}^* respectivement ; démontrer que f induit une bijection de A_∞ sur B_∞. En déduire qu'il existe une bijection de A sur B.

EXERCICE 2

1 Soit A un ensemble et soit $f\colon A\to\mathfrak P(A)$ une application de A dans l'ensemble $\mathfrak P(A)$ des parties de A. Soit B l'ensemble des éléments $a\in A$ tels que $a\notin f(a)$. Démontrer que B n'appartient pas à l'image de f.

2 En déduire que l'ensemble $\mathfrak P(A)$ n'est pas équipotent à A.

EXERCICE 3 (Théorème de Knaster-Tarski)

On appelle treillis complet un ensemble ordonné A tel que toute partie de A possède une borne inférieure et une borne inférieure.

1 Démontrer que l'ensemble $[0,1]$ (muni de la relation d'ordre usuelle des nombre réels) est un treillis complet.

2 Démontrer que l'ensemble des parties d'un ensemble, muni de la relation d'inclusion, est un treillis complet.

3 Démontrer que l'ensemble des sous-groupes d'un groupe, muni de la relation d'inclusion, est un treillis complet.

4 Démontrer qu'un treillis complet possède un plus petit et un plus grand élément.

5 Soit A un treillis complet, soit a,b des éléments de A tels que $a\leqslant b$ et soit $B=[a,b]=\{x\in A\,;\,a\leqslant x\leqslant b\}$. Démontrer que B est un treillis

6 Démontrer que dans la définition d'un treillis complet, il suffit de supposer que toute partie de A possède une borne inférieure (*resp.* une borne supérieure).

7 Soit A un treillis complet et soit $f\colon A \to A$ une application monotone. Soit P l'ensemble des points-fixe de f, muni de la relation d'ordre induite par celle de A.
Soit S l'ensemble des $a \in A$ tels que $a \leqslant f(a)$; démontrer que $f(S) \subset S$. Soit s la borne supérieure de S ; démontrer que s est le plus grand point fixe de f.

8 (*suite*) Soit Q une partie de P, soit q sa borne supérieure de Q dans A et soit $a = \max(A)$. Démontrer que $f([q,a]) \subset [q,a]$. En déduire que f possède un plus petit point fixe appartenant $[q,a]$ qui est la borne supérieure de Q dans P.

9 (*suite*) Démontrer que P est un treillis complet.

EXERCICE 4 (Théorème de Zermelo)

Utiliser le théorème de Zorn pour démontrer le théorème de Zermelo : sur tout ensemble, il existe un bon ordre.

EXERCICE 5 (Ordinaux de von Neumann)

On dit qu'un ensemble bien ordonné A est un *ordinal* si pour tout $a \in A$, on a l'égalité $A_a = \{ x \in A ; x \prec a\} = a$.

1 Soit A un ordinal ; soit a, b des éléments de A. Démontrer que l'on a $a \preceq b$ si et seulement si $a \subset b$.

2 Soit A un ordinal. Démontrer que $A^+ = A \cup \{A\}$, muni de la relation d'inclusion, est un ordinal.

3 Soit A et B deux ordinaux. Démontrer que l'on a $A \subset B$ ou $B \subset A$.

4 Démontrer que toute famille non vide d'ordinaux possède un plus petit élément. (« Pour la relation d'inclusion, les ordinaux sont bien ordonnés. »)

5 Démontrer que toute famille d'ordinaux possède une borne supérieure.

6 Démontrer que $\emptyset$ est un ordinal. Quels sont les ordinaux finis ? Quel est le plus petit ordinal infini ?

7 Soit S un ensemble bien ordonné. Démontrer qu'il existe une unique ordinal qui est isomorphe à S.

EXERCICE 6

Soit $(A, \cdot)$ un monoïde.

1 Démontrer que la loi de composition donnée par $a * b = ba$ fait de A un monoïde ; on l'appelle le monoïde opposé et on le note A^{o}.

2 Si A est un groupe, démontrer que A^{o} est un groupe et que l'application $a \mapsto a^{-1}$ est un isomorphisme du groupe A sur le groupe opposé A^{o}.

3 Donner un exemple de monoïde qui n'est pas isomorphe au monoïde opposé.

EXERCICE 7

Soit M un monoïde.

Démontrer que le produit de deux éléments inversibles à droite (*resp.* à gauche) est inversible à droite (*resp.* à gauche) et donner une formule pour un tel inverse.

EXERCICE 8

Dans chacun des monoïdes suivants, identifier l'ensemble des éléments inversibles à droite (*resp.* à gauche).

1 Le monoïde des applications d'un ensemble A dans lui-même.

2 Le monoïde des applications linéaires d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E dans lui-même. Cas de la dimension finie ?

3 Le monoïde des applications polynomiales de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

4 Le monoïde multiplicatif d'une K-algèbre associative de dimension finie, K étant un corps fixé ($K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, si l'on veut).

EXERCICE 9

Soit M un monoïde commutatif ; on note $+$ sa loi de composition et 0 son élément neutre.

1 Soit $\sim$ la relation dans $M \times M$ donnée par $(a,b) \sim (c,d)$ s'il existe $u \in M$ tel que $a+d+u = b+c+u$. Démontrer que c'est une relation d'équivalence.

2 On note A l'ensemble quotient et $[a,b]$ la classe d'un couple (a,b). Démontrer qu'il existe une unique loi de composition de A telle que $[a,b]+[c,d] = [a+c,b+d]$ pour $a,b,c,d \in M$. Démontrer que A est un groupe abélien et que l'application $j\colon M \to A$ donnée par $a \mapsto [a,0]$ est un homomorphisme de monoïdes. Démontrer aussi que tout élément de A est la différence de deux éléments de $j(M)$.

3 Soit B un groupe et soit $f\colon M \to B$ un homomorphisme de monoïdes. Démontrer qu'il existe un unique homomorphisme de groupes $\varphi\colon A \to B$ tel que $\varphi \circ j = f$.

EXERCICE 10

Soit M un monoïde (non nécessairement commutatif).

1 Soit A un groupe et soit $j\colon M \to A$ un morphisme de monoïdes tel que $j(M)$ engendre A. Démontrer que $\operatorname{Card}(A) \leqslant \sup(\operatorname{Card}(\mathbf{N}), \operatorname{Card}(M))$.

2 Démontrer qu'il existe un ensemble Φ dont les éléments sont des couples (j,A), où A est un groupe et $j\colon M \to A$ un morphisme de monoïdes tel que $j(M)$ engendre A, qui vérifie la propriété suivante : Pour tout couple (f,B), où B est un groupe et $f\colon M \to B$ est un morphisme de monoïdes, il existe un couple $(j,A) \in \Phi$ et un morphisme $\varphi\colon A \to B$ tel que $\varphi \circ j = f$.

3 Démontrer qu'il existe un groupe A et un homomorphisme de monoïdes $j\colon M \to A$ vérifiant la propriété universelle : Pour tout groupe B et tout morphisme de monoïdes $f\colon M \to B$, il existe un unique morphisme de groupes $\varphi\colon A \to B$ tel que $\varphi \circ j = f$.