Feuille d'exercices n° 1

Langage mathématique : noms, objets, énoncés

Exercice 1. Précisez les variables libres et les variables liées qui interviennent dans les noms suivants:

(a) $3q + r$ (b) $f(x_1 + x_2 + x_3)$ (c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ est un nombre pair}\}$

(d) $\displaystyle\int_0^x (3t+1)^2\, dt$ (e) $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto ax\end{array}\right.$ (f) $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto g(ax)\end{array}\right.$

(g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} (i+j)^2$ (h) $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i}^{M} (i+j)^2$ (e) $\displaystyle\sum_{p \le i \le q} f(x_i)$

(j) $\#\{i \in \mathbb{Z} \mid a \le 2i < b\}$

Exercice 2. Décrire avec des symboles mathématiques les objets suivants, et précisez les variables libres:

1. L'ensemble des entiers relatifs multiples de m.
2. Dans un plan repéré par ses coordonnées cartésiennes: l'ensemble des points situés dans le quart de plan inférieur droit.
3. L'ensemble des solutions réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
4. L'ensemble des solutions complexes de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Exercice 3. Préciser les variables libres et liées des énoncés suivants. Si l'énoncé n'a pas de variable libre, donner sa valeur de vérité. Si l'énoncé a une variable libre, donner la valeur de vérité de l'énoncé en fonction des valeurs que peut prendre la variable libre.

1. $-3 \in \{x \in \mathbb{R} \mid 13 - 2x > 1\}$
2. $4 \in \{x \in \mathbb{R}_- \mid 13 - 2x > 1\}$
3. $5 \notin \{x \in \mathbb{R} \mid 13 - 2x > 1\}$
4. $5 \notin \{x \in \mathbb{R} \mid 13 - 2x > c\}$

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} i^2$ si $n > 0$ et $S_0 = 0$.

1. Montrer l'égalité suivante:
$$\sum_{i=1}^{n} (i+1)^2 = S_n + 2\sum_{i=1}^{n} i + n$$
2. Montrer l'égalité:
$$\sum_{i=1}^{n} (i+1)^2 = S_n + (n+1)^2 - 1$$
3. En déduire l'égalité suivante:
$$1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Exercice 5. Parmi les énoncés suivants, lesquels sont équivalents?

1. S'il pleut ou s'il neige, la compétition est annulée.
2. Si la compétition n'est pas annulée, alors il ne neige pas ni ne pleut.
3. Si la compétition est annulée, alors il pleut ou il neige.
4. S'il pleut alors la compétition est annulée, et s'il neige alors la compétition est annulée.
5. S'il ne neige pas ni ne pleut, alors la compétition n'est pas annulée.

Exercice 6. Traduire sous forme d'implication les énoncés suivants:

1. Si au moins 10 personnes sont présentes, alors la séance a lieu.
2. La séance a lieu seulement si au moins 10 personnes sont présentes.
3. La séance a lieu si au moins 10 personnes sont présentes.
4. La présence d'au moins 10 personnes est une condition suffisante pour que la séance ait lieu.
5. La présence d'au moins 10 personnes est une condition nécessaire pour que la séance ait lieu.

Exercice 7. Utiliser des connecteurs logiques pour traduire les énoncés suivants:

1. La compétition sera annulée si et seulement si il pleut ou il neige.
2. La présence d'au moins 10 personnes est une condition nécessaire et suffisante pour que la séance ait lieu.
3. Si Pierre est allé au magasin alors nous avons des œufs, et s'il n'est pas allé au magasin alors nous n'avons pas d'œufs.

Exercice 8. Préciser quelles implications peuvent être lues dans les énoncés suivants du langage courant :

1. “Deux paquets de biscuits achetés = 1 gratuit”
2. “100% des gagnants au loto ont tenté leur chance”
3. “Ceinture attachée = sécurité au volant”

Exercice 9. Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4 \; \ldots\ldots \; x = 2$;
2. $z \in \mathbb{C} \quad z = \overline{z} \; \ldots\ldots \; z \in \mathbb{R}$;
3. $x \in \mathbb{R} \quad x = \pi \; \ldots\ldots \; e^{2ix} = 1$.

Exercice 10. Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0\ ;$$

$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x.$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?

2. Donner leur négation.

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^2$, on définit les ensembles $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \leq 0\}$ et $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \geq 1,\ x \geq 0\}$. On note M_1M_2 la distance usuelle entre deux points M_1 et M_2 de $\mathbb{R}^2$. Évaluer les propositions suivantes :

1. $\forall \epsilon \in]0, +\infty[\quad \exists M_1 \in F_1 \quad \exists M_2 \in F_2 \qquad M_1M_2 < \epsilon$
2. $\exists M_1 \in F_1 \quad \exists M_2 \in F_2 \quad \forall \epsilon \in]0, +\infty[\qquad M_1M_2 < \epsilon$
3. $\exists \epsilon \in]0, +\infty[\quad \forall M_1 \in F_1 \quad \forall M_2 \in F_2 \qquad M_1M_2 < \epsilon$
4. $\forall M_1 \in F_1 \quad \forall M_2 \in F_2 \quad \exists \epsilon \in]0, +\infty[\qquad M_1M_2 < \epsilon$

Quand elles sont fausses, donner leur négation.

Exercice 12. On rappelle qu'un entier x *divise* un entier y s'il existe un entier k tel que $y = kx$. On le note: $x|y$. Quels sont les entiers naturels p pour lesquels les énoncés suivants sont vrais :

1. $\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad x|p$
2. $\exists x \in \mathbb{N} \quad x > p$
3. $\exists x \in \mathbb{N} \quad x < p$
4. $p \neq 1 \wedge \big(\forall n \in \mathbb{N} \quad n|p \implies (n = 1) \vee (n = p)\big)$
5. $\forall n \in \mathbb{N} \quad (p|n \implies 2|n)$
6. $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n|p \implies 2|n)$

Exercice 13. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *paire* si l'énoncé suivant est vrai :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(-x)$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par:
$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$
est paire.
2. On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *impaire* si:
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -f(-x)$$
Étant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)$ est impaire.
3. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et posons:
$$\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ est paire}\} \qquad \mathcal{I} = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ est impaire}\}$$
Montrer que l'énoncé suivant est vrai :
$$\forall f \in \mathcal{F} \quad \exists f_1 \in \mathcal{P} \quad \exists f_2 \in \mathcal{I} \quad f = f_1 + f_2\,.$$

Exercice 14. Examiner si les raisonnements suivants sont valides. Utiliser les tables de vérité si besoin.

1. L'alarme se déclenche si et seulement si à la fois la pression dépasse le seuil critique et la vanne est obstruée. La vanne n'est pas obstruée. Donc, l'alarme se déclenche si et seulement si la pression dépasse le seuil critique.
2. Si les impôts et le taux de chômage augmentent, il y a récession. Si le PIB augmente, il n'y a pas de récession. Le PIB et les impôts augmentent. Donc, le taux de chômage n'augmente pas.

Exercice 15. Soit P et Q deux énoncés. Montrer que les deux énoncés (a) et (b) sont équivalents dans les cas suivants:

1. (a) $P \iff Q$ $\quad (b)$ $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
2. (a) $(P \implies R) \wedge (Q \implies R)$ $\quad (b)$ $(P \vee Q) \implies R$

Exercice 16. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des personnes ayant vécu sur Terre jusqu'à aujourd'hui, et soit $P(x, y)$ l'énoncé "x est un ascendant de y", avec x et y des variables prenant leurs valeurs dans $\mathcal{P}$. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux?

1. $\exists x \in \mathcal{P} \quad \forall y \in \mathcal{P} \quad P(x, y)$
2. $\forall x \in \mathcal{P} \quad \exists y \in \mathcal{P} \quad P(x, y)$
3. $\neg(\exists x \in \mathcal{P} \quad \exists y \in \mathcal{P} \quad P(x, y))$
4. $\exists x \in \mathcal{P} \quad \neg(\exists y \in \mathcal{P} \quad P(x, y))$
5. $\exists x \in \mathcal{P} \quad \exists y \in \mathcal{P} \quad \neg P(x, y)$

Exercice 17. Déterminer la valeur de vérité des énoncés suivants.

1. $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad 2x - y = 0$
2. $\exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad 2x - y = 0$
3. $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad x - 2y = 0$
4. $\forall x \in \mathbb{N} \quad \big(x < 10 \implies \forall y \in \mathbb{N} \quad (y < x \implies y < 9)\big)$
5. $\exists y \in \mathbb{N} \quad \exists z \in \mathbb{N} \quad y + z = 100$
6. $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \big(y > x \wedge \exists z \in \mathbb{N} \quad (y + z = 100)\big)$

Exercice 18. Déterminer les valeurs de vérité des énoncés de l'exercice 17, en remplaçant $\mathbb{N}$ par $\mathbb{R}$; puis en remplaçant $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Z}$.