Université Paris Diderot
UFR de mathématiques

Licences de mathématiques et d'informatique
L1 – *Raisonnement mathématique*

Feuille d'exercices n$^\text{o}$ 2

Langage mathématique, ensembles

Exercice 1.
Compléter, **quand c'est possible**, avec les symboles $\in$ ou $\subseteq$.

(a) 0 .... $[0,1]$

(b) $\{a\}$ .... $\{a,b,c\}$

(c) $\{3\}$ .... $\mathbb{N}$

(d) $\{0,1\}$ .... $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

(e) 0 .... $\mathcal{P}(\{0,1\})$

(f) $[0;1]$ .... $\mathcal{P}([0,1])$

(g) $\mathbb{N}$ .... $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

(h) $[0,1]$ .... $[0,1]\cup[3,4]$

(i) $\emptyset$ .... $\{1,2,3\}$

(j) $\{\emptyset\}$ .... $\{1,2,3\}$

(k) 3 .... $[0,1]\cup\{3\}$

(l) $\{4\}$ .... $\{0,1\}\cup[3,4]$

Exercice 2.
Dans cet exercice A, B, C désignent des parties d'un ensemble E. Reformuler les énoncés suivants en termes de propriétés de leurs éléments.
Exemple : $A = B$ peut se reformuler en $\forall x\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

(a) $A \subseteq B$

(b) $A \nsubseteq B$

(c) $A \subsetneq (E \setminus B)$

(d) $A \cup B \subseteq C$

(e) $A \subseteq B \cap C$

(f) $A \neq B$

(g) $A \cap B = \emptyset$

(h) $A = \emptyset$

Exercice 3.

(a) Décrire $\mathcal{P}(\{a\})$, $\mathcal{P}(\{a,b\})$ et $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$ en extension.

(b) Décrire $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$ en extension.

(c) Décrire $\mathcal{P}(\{a,\{a\}\})$ en extension.

Exercice 4.
Le tableau de la page suivante propose, par ligne, plusieurs descriptions d'un même ensemble. Compléter les cases vides **lorsque c'est possible**.

Exercice 5. Donner les négations des propositions suivantes (toutes les variables prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$). Illustrer les énoncés sur la droite réelle.

(a) $x \geq 2$

(b) $(x \geq 2) \vee (x \leq -3)$

(c) $\exists x \geq 2 \quad y > x$

(d) $\forall \varepsilon > 0 \quad x < \varepsilon$

(e) $\forall x > 2 \quad \exists \varepsilon > 0 \quad x + \varepsilon < y$

Exercice 6.

(a) Prouver:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq x \leq \varepsilon\} = \{0\}\,.$$

(b) Déterminer l'ensemble des réels x tels que:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad 0 \leq x \leq \varepsilon\,.$$

Phrase	*Extension*	*Compréhension*	*Extension généralisée*	*Image d'une fonction*
	$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$			
L'image de la fonction cos (définie sur $\mathbb{R}$)				
		$\{x \in \mathbb{R}^+ \mid \sin x = 1\}$		
			$\{1, 3, ..., 2k+1, ...\}$	
				$\left\{10^k \mid k \in \mathbb{N}\right\}$
$\mathbb{Q}$				
$]0, 1]$				

Exercice 7. Soit les deux propriétés “porter un pull rayé et un pantalon vert” (que l’on appellera A) et “porter un pull rayé” (que l’on appellera B).

(a) Quelle relation logique peut-on établir entre A et B ?

(b) Soit X l’ensemble des étudiants portant un pull rayé et un pantalon vert, soit Y l’ensemble des étudiants ayant un pull rayé. Quelle relation ensembliste peut-on établir entre X et Y ?

(c) Peut-on généraliser ce lien entre inclusion d’ensembles définis en compréhension et implication entre les propriétés caractéristiques de ces ensembles ?

Exercice 8.
Étant donné A, B deux parties de E, montrer que :

$$A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B.$$

Exercice 9. Soit x une variable prenant ses valeurs parmi les entiers relatifs, et soit P une variable prenant ses valeurs parmi les parties de $\mathbb{Z}$.

1. Quelles sont les variables libres et liées des deux énoncés suivants:

$$(a)\ \forall x \in \mathbb{Z} \quad x \in P\,, \qquad\qquad (b)\ \exists x \in \mathbb{Z} \quad x \in P\,.$$

2. Quelles sont les valeurs de P pour lesquelles l’énoncé (a) est vrai ?
3. Quelles sont les valeurs de P pour lesquelles l’énoncé (b) est vrai ?

Exercice 10. Soit $A(x, y)$ un énoncé ayant deux variables libres x et y, prenant leurs valeurs dans E et dans F respectivement. Prouver l’équivalence suivante :

$$\big(\forall x \in E \quad \forall y \in F \quad A(x, y)\big) \iff \big(\forall (x, y) \in E \times F \quad A(x, y)\big)$$

Si $E = F$, justifier la notation:

$$\forall x, y \in E \quad A(x, y)$$

comme raccourci pour une notation plus rigoureuse qu’on énoncera.

Exercice 11. E est un ensemble. Prouver les assertions suivantes :

(a) $\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad A \cup A^c = E$

(b) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cup B = A) \iff B \subseteq A$

(c) $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(d) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Pour (c) et (d), énoncer un énoncé dual pour chacun.

Exercice 12.
E est un ensemble. Prouver les assertions suivantes :

(a) $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C)$

(b) $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad [(A \cap B = A \cap C \ \text{ et } \ A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C]$

Exercice 13.
Soient A, B deux parties d’un ensemble E.

(a) Discuter et résoudre l’équation $A \cup X = B$ d’inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

(b) Même chose avec l’intersection

Exercice 14.
On prend $I = \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = [0, n] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant n\}$. Prouver que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}_+ \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$$

Exercice 15.
Montrez que chacun des ensembles suivants est un intervalle que vous calculerez.

$$I = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right[\qquad \text{et} \qquad J = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, n\right] .$$

Indications à propos de I :

- Soit n un entier non nul. Caractériser par des inégalités les éléments de $\left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right[$.
- Les éléments de I doivent-ils vérifier ces inégalités pour un n donné ou pour tout n non nul ?
- Caractériser par des inégalités les éléments de I.
- Pour vérifier : les nombres suivants sont-ils éléments de I : -1, 0, 2, $5/2$?

Exercice 16.
Première partie
Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

(a) Rappeler la définition de l'image directe d'un sous-ensemble de X par f et la définition de l'image réciproque d'un sous-ensemble de Y par f.

(b) Soient $A, B \subset X$, montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, puis prouver que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.

(c) Soient $A, B \subset Y$. Prouver que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, puis que $f^{-1}(Y \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

Deuxième partie
On considère f une application d'un ensemble E dans un ensemble F, $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ et $(B_j)_{j\in J}$ une famille d'éléments de $\mathcal{P}(F)$. Quelles sont les relations d'inclusion ou d'égalité entre les ensembles suivants :

(a) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$ et $\bigcup_{i\in I} f(A_i)$,

(b) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$ et $\bigcap_{i\in I} f(A_i)$,

(c) $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)$ et $\bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$,

(d) $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)$et $\bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$?