Feuille d'exercices n° 3

Langage mathématiques, raisonnement, preuves

Exercice 1. Prouver que pour tout entier $n \geq 1$ on a $2^n \geq n$.

Exercice 2. Les intervalles considérés sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

1. Prouver que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right] = \{1\}$.
2. Prouver que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[1-n, n^2-n\right] = \mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit α un nombre réel. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a

$$|\sin(n\alpha)| \leqslant n|\sin\alpha|.$$

On rappelle la formule de trigonométrie $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y$.

Exercice 4. n étant une variable prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$, on considère l'énoncé $P(n)$ suivant : $2^n \geqslant (n+1)^2$

1. Prouver que $\forall n \geq 2 \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
2. Calculer les premières valeurs de $P(n)$.
3. Prouver que $\forall n \geq 1 \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
4. Prouver que $\forall n \geq 6 \quad P(n)$.

Exercice 5.
Soit a, b et c des réels strictement positifs vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & abc > 1 \\ \text{(ii)} & a+b+c < \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \end{array}$$

En raisonnant par l'absurde, prouver chacune des trois propriétés suivantes :

(1) Aucun des réels a, b, c ne peut être égal à 1.

(2) L'un au moins des réels a, b, c est strictement supérieur à 1.

(3) L'un au moins des réels a, b, c est strictement inférieur à 1.

Exercice 6. Prouver que, pour tout entier naturel n, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$.

Exercice 7. Prouver qu'un nombre qui est un carré est divisible par 4 ou bien est le successeur d'un nombre divisible par 4.

Exercice 8. Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$. Démontrer que tous ses termes sont positifs à partir d'un certain rang.

Exercice 9. Le but de l'exercice est de prouver le théorème suivant : *Il existe des nombres irrationnels strictement positifs a et b tels que le nombre a^b soit rationnel.*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation d'inconnue t : $\left(\sqrt{2}\right)^t = 2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation d'inconnue u : $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^u = 2$.
3. Démontrer qu'il existe un nombre irrationnel x tel que $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^x$ soit un nombre rationnel.
4. Démontrer le théorème annoncé (distinguer deux cas : $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ rationnel ou non).

Exercice 10. Dans les propositions ci-dessous, toutes les variables prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$.

A_1	$\exists x \quad xy = 1$
A_2	$\exists x \quad xy = 0$
A_3	$\forall x \quad xy = 1$
A_4	$\forall x \quad xy = 0$
A_5	$\exists x \quad xy \geqslant 0$
A_6	$\exists x \quad xy > 0$
A_7	$\forall x \quad xy \geqslant 0$
A_8	$\forall x \quad xy \geqslant x$
A_9	$\forall x \quad xy \geqslant y$
A_{10}	$\exists x \quad y = \cos x$
A_{11}	$\exists x \quad x = \cos y$
A_{12}	$\exists x \quad y = \tan x$
A_{13}	$\exists x \quad x = \tan y$
A_{14}	$\exists x \quad e^{xy} = e^x e^y$
A_{15}	$\forall x \quad e^{xy} = e^x e^y$

B_1	$y = y$
B_2	$y \neq y$
B_3	$y = 0$
B_4	$y \neq 0$
B_5	$y = 1$
B_6	$y \neq 1$
B_7	$x = y$
B_8	$x \neq y$
B_9	$y \geqslant 0$
B_{10}	$y > 0$
B_{11}	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
B_{12}	$y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
B_{13}	$x \in [-1, 1]$
B_{14}	$y \in [-1, 1]$
B_{15}	$\forall k \in \mathbb{Z}\ y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

Pour chaque proposition A_i du tableau de gauche, trouver une proposition B_j du tableau de droite qui soit synonyme de A_i. Justifier.
NB : Il est possible qu'une même proposition du tableau de droite soit synonyme de plusieurs propositions du tableau de gauche et que certaines propositions du tableau de droite ne soient synonymes d'aucune des propositions du tableau de gauche.

Exercice 11. Où est la faille dans le raisonnement suivant ?
Nous allons prouver par récurrence le fait que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, quel que soit le paquet de n crayons, tous les crayons de ce paquet ont la même couleur.
Pour $n = 1$ c'est évidemment vrai.
On suppose maintenant la propriété vraie pour un certain entier a (quel que soit le paquet de a crayons, tous les crayons de ce paquet sont de la même couleur), on va monter la propriété au rang $a + 1$.
On considère un paquet de $a + 1$ crayons, on numérote les crayon de 1 à $a + 1$. Les crayons numérotés de 1 à a ont tous la même couleur (ils forment un paquet de a crayon), les crayons numérotés de 2 à $n+1$ ont tous la même couleurs (ils forment aussi un paquet de a crayons), tous les crayons ont donc la même couleur.
On a donc bien montré l'hérédité de la propriété.
On a donc bien prouvé la propriété par récurrence (propriété vraie pour $n = 1$ et hérédité).

Exercice 12. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de réels est *finalement constante* si:

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies u_n = u_N)$$

1. Premières propriétés
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est finalement constante si et seulement si:
   $$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall q \in \mathbb{N} \quad \big((p \geq N \wedge q \geq N) \implies u_p = u_q\big)$$
   (b) Montrer que toute suite finalement constante est bornée. Réciproquement, toute suite bornée est-elle finalement constante ?
   (c) Montrer que la somme et le produit de deux suites finalement constantes sont des suites finalement constantes.
2. Prouver que toute suite croissante majorée et à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est finalement constante.
3. On étend la définition des suites finalement constantes aux suites à valeurs complexes. Montrer qu'une suite à valeurs complexes est finalement constante si et seulement si les parties réelle et imaginaire de la suite sont finalement constantes.

Exercice 13. Soit x une variable prenant ses valeurs dans un ensemble A. Soit $P(x)$ une propriété avec x comme unique variable libre. On dit que $P(x)$ a la propriété d'*existence et unicité* si les deux énoncés suivants sont vrais:

(a) $\exists y \in A \quad P(y)$

(b) $\forall y \in A \quad \forall z \in A \quad \big(P(y) \wedge P(z)\big) \implies y = z.$

Montrer que $P(x)$ a la propriété d'existence et d'unicité si et seulement l'énoncé suivant est vrai:

$$\exists x_0 \in A \quad \big(P(x_0) \wedge (\forall x \in A \quad P(x) \implies x = x_0)\big)$$

Exercice 14. Soit a, b, c trois réels. Discuter suivant les valeurs de a, b et c l'existence et l'unicité de solutions à l'équation $ax + b = c$.
Même question pour le système d'équations à deux inconnues x et y :

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases}$$

à discuter en fonction de a, b, c, d, u, v.

Exercice 15. Soit A, B, C trois points non alignés d'un plan euclidien. Montrer qu'il existe un unique point équidistant de A, B et C.

Exercice 16. Soit P un plan vectoriel. Si M et N sont deux éléments du plan (vus comme les points “à la pointe” des vecteurs), on considère le vecteur $\overrightarrow{MN}$ défini par :

$$\overrightarrow{MN} = M - N.$$

Soit α, β deux réels, et A et B deux points d'un plan. Discuter l'existence et l'unicité d'un point G du plan tel que:

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = 0\,,$$

en fonction de la valeur de $\alpha + \beta$.

Exercice 17. Soit a un réel. Montrer qu'il existe une unique suite de réels $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que:

$$\begin{cases} & x_0 = a \\ \forall n \geq 0 & x_{n+1} = 2x_n + 3 \end{cases}$$