

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Algèbre linéaire — formes réduites échelonnées

A. CHAMBERT-LOIR

- 1 a) Pour $1 \leq i \neq j \leq m$ et $a \in K$, on note $E_{i,j}(a)$ la matrice de diagonale 1, dont le coefficient (i, j) est égal à a et dont tous les autres coefficients sont nuls.
 Démontrer la formule, pour $a, b \in K$:

$$E_{i,j}(a)E_{i,j}(b) = E_{i,j}(a + b).$$

En déduire que $E_{i,j}(a)$ est inversible, d'inverse $E_{i,j}(-a)$.

- b) Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_m$, on note P_σ la matrice dont le coefficient (i, j) est égal à 1 si $i = \sigma(j)$, et 0 sinon.

Démontrer que l'on a $P_{\sigma\tau} = P_\sigma P_\tau$ et $P_{\text{id}} = I_n$. En déduire que l'ensemble W des matrices P_σ est un sous-groupe de $\text{GL}_n(K)$.

- c) Pour $i \in \{1, \dots, m\}$ et $a \in K$, on note $D_i(a) \in \text{Mat}_m(K)$ la matrice diagonale dont tous les coefficients sont égaux à 1, sauf le coefficient (i, i) qui est égal à a .

Démontrer que l'on a

$$D_i(a)D_i(b) = D_i(ab)$$

pour $a, b \in K$. En déduire que les matrices $D_i(a)$, pour $a \in K^\times$, sont inversibles.

- 2 On note $\text{GE}_m(K)$ le sous-groupe de $\text{GL}_m(K)$ engendré par les « matrices élémentaires » $E_{i,j}(a)$ (pour $a \in K$ et $1 \leq i \neq j \leq m$), P_σ (pour $\sigma \in \mathfrak{S}_m$) et $D_i(a)$ (pour $1 \leq i \leq m$ et $a \in K^\times$).
 Soit $A \in \text{Mat}_{m,n}(K)$.

- a) Démontrer que $E_{i,j}(a)A$ est obtenue en remplaçant dans la matrice A la ligne L_i par la combinaison $L_i + aL_j$.

- b) Démontrer que la ligne d'indice i de A est la ligne d'indice $\sigma(i)$ de $P_\sigma A$.

- c) Démontrer que $D_i(a)A$ est obtenue en remplaçant dans la matrice A la ligne L_i par son multiple aL_i .

- d) On dit que deux matrices A et A' sont équivalentes par lignes s'il existe une matrice $E \in \text{GE}_m(K)$ telle que $A' = EA$. Observer qu'alors les systèmes $AX = 0$ et $A'X = 0$ (d'inconnue $X \in K^n$) sont équivalents.

Plus généralement, on écrit $A = [A_1 Y_1]$ et $A' = [A'_1 Y'_1]$, avec $A_1, A'_1 \in \text{Mat}_{m,n-1}(K)$ et $Y_1, Y'_1 \in K^m$. Observer que les systèmes $A_1 X_1 = Y_1$ et $A'_1 X_1 = Y'_1$, d'inconnue $X_1 \in K^{n-1}$, sont équivalents.

- 3 Soit K un corps. On dit qu'une matrice $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m,n}(K)$ est sous forme réduite échelonnée par lignes s'il existe un entier naturel $r \leq m$ et une suite (j_1, \dots, j_r) d'entiers tels que $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$ de sorte que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$, les conditions suivantes soient vérifiées :

- (1) Si $1 \leq i \leq r$, on a $a_{i,j_i} = 1$;

- (2) Si $1 \leq i \leq r$ et $j < j_i$, alors $a_{i,j} = 0$;
- (3) Si $1 \leq i \leq r$, alors $a_{i,j_k} = 0$ si $i < k \leq r$;
- (4) Si $r < i \leq m$, alors $a_{i,j} = 0$.

On suppose que A est réduite échelonnée par lignes. Les entiers j_i sont appelés indices de pivot; l'entier r est appelé rang des lignes de A .

a) Vérifier que $0 \leq r \leq \min(m, n)$.

b) Soit $Y \in K^m$. Suivant Y , décrire l'ensemble des solutions du système linéaire $AX = Y$, d'inconnue $X \in K^n$.

c) Soit $p \leq n$. Démontrer que la matrice $A' \in \text{Mat}_{m,p}(K)$ constituée des p premières colonnes de A est réduite échelonnée par lignes.

d) On écrit $A = [A'Y]$, où $A' \in \text{Mat}_{m,n-1}(K)$ et $Y \in K^m$. Décrire l'ensemble des solutions du système linéaire $A'X = Y$, d'inconnue $X \in K^{n-1}$.

4 a) Décrire un algorithme qui, pour toute matrice $A \in \text{Mat}_{m,n}(K)$, fournit une matrice $A' \in \text{Mat}_{m,n}(K)$, équivalente par lignes à A et réduite échelonnée par lignes.

b) Soit A et A' des matrices réduites échelonnées par lignes qui sont équivalentes par lignes. Démontrer que $A = A'$. (Prouver par récurrence sur p que les matrices A_p et A'_p formées des p premières colonnes de A et A' sont égales; pour cela, comparer les solutions des systèmes linéaires $A_p X = Y$ et $A'_p X = Y'$, où Y et Y' sont les $(p+1)$ -èmes colonnes de A et A' .)

c) En déduire qu'une matrice $A \in \text{Mat}_{m,n}(K)$ est équivalente par lignes à exactement une matrice réduite échelonnée par lignes. On appellera rang des lignes de A , et indices de pivot de A , ceux de cette matrice réduite échelonnée par lignes.

d) En déduire que dans toute orbite du groupe $\text{GE}_m(K)$ agissant par multiplication à gauche dans $\text{Mat}_{m,n}(K)$, il existe une matrice réduite échelonnée par lignes, et une seule.

5 Soit $f: K^n \rightarrow K^m$ une application linéaire de matrice $A \in \text{Mat}_{m,n}(K)$. Soit r le rang des lignes de A et j_1, \dots, j_r ses indices de pivot.

a) Démontrer que f est injective si et seulement si $r = n$.

b) Démontrer que f est surjective si et seulement si $r = m$.

c) En déduire que f est bijective si et seulement si $r = m = n$.

d) En déduire que $\text{GL}_m(K) = \text{GE}_m(K)$.

e) En déduire que dans toute orbite du groupe $\text{GL}_m(K)$ agissant par multiplication à gauche dans $\text{Mat}_{m,n}(K)$, il existe une matrice réduite échelonnée par lignes et une seule.

6 Soit Y_1, \dots, Y_n des vecteurs de K^m , soit A la matrice $[Y_1 \dots Y_n] \in \text{Mat}_{m,n}(K)$ et soit V le sous-espace engendré par les Y_j . Soit r le rang des lignes de A et j_1, \dots, j_r les indices de pivot de A .

a) Démontrer que Y_{j_1}, \dots, Y_{j_r} est une base de V .

b) Soit Y le vecteur colonne d'indéterminées (y_1, \dots, y_m) . En calculant une matrice $[A'Y']$ équivalente par lignes à $[AY]$ telle que A' soit réduite échelonnée par lignes, décrire une famille d'équations linéaires définissant V .

- 7 Soit V un sous-espace vectoriel de K^m .
- Démontrer que toute famille libre (Y_1, \dots, Y_p) dans V est de cardinal $\leq m$.
 - Démontrer qu'il existe une famille libre (Y_1, \dots, Y_p) dans V qui engendre V .
 - Démontrer que V possède une base, et que deux bases de V ont même cardinal.
- 8
- Répondre aux questions de la question 2 lorsqu'on considère les produits AE , pour $E \in \text{GE}_n(K)$ des différents types.
 - Définir une notion de matrice réduite échelonnée par colonnes, de matrices équivalentes par colonnes, et démontrer un analogue de la question 4.
 - Soit $A \in \text{Mat}_{m,n}(K)$, de forme réduite échelonnée par colonnes $A' = [Y'_1 \dots Y'_n]$, notons s le rang des colonnes de A . Démontrer que le sous-espace V de K^m engendré par les Y_i coïncide avec le sous-espace V' de K^m engendré par Y'_1, \dots, Y'_s .
 - En déduire que le rang des colonnes et le rang des lignes d'une matrice $A \in \text{Mat}_{m,n}(K)$ coïncident.
 - Notons i_1, \dots, i_s les indices de pivot de la matrice A' . Soit $j \in \{0, \dots, s\}$ et soit $i \in \{0, \dots, m\}$ tels que $i_j \leq i < i_{j+1}$. On pose $W_i = \{0\}^i \times K^{m-i}$. Démontrer que $W_i \cap V$ est engendré par Y'_1, \dots, Y'_j et que $\dim(W_i \cap V) = j$.