ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Algèbre linéaire — formes quadratiques et hermitiennes

A. CHAMBERT-LOIR

EXERCICE 1. — Procédé d'orthogonalisation de Gram–Schmidt

Soit E un espace euclidien (resp. hermitien) de dimension n.

1 Soit E un espace euclidien ou un espace hermitien. Soit $(v_1,\dots,v_n)$ une suite linéairement indépendante de vecteurs de E. Démontrer qu'il existe une unique suite *orthonormale* $(e_1,\dots,e_n)$ de vecteurs de E vérifiant la condition suivante : pour tout $m\in\{1,\dots,n\}$, on a $e_m\in\operatorname{vect}(v_1,\dots,v_m)$ et $\langle v_m,e_m\rangle\in\mathbf{R}_+^\times$. (Raisonner par récurrence sur n.)

2 Démontrer que pour tout $m\in\{1,\dots,n\}$, on a $d(v_m,\operatorname{vect}(e_1,\dots,e_{m-1}))=\langle v_m,e_m\rangle$.

3 On suppose que $n=\dim(E)$. Démontrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E. On notera $\det(\cdot)$ le déterminant d'une suite de m vecteurs dans cette base. Démontrer que $|\det(v_1,\dots,v_n)|=\prod_{m=1}^{n}\langle v_m,e_m\rangle$.

4 En déduire l'inégalité de Hadamard : si $(v_1,\dots,v_n)$ est une base de E, on a $|\det(v_1,\dots,v_n)|\leqslant\prod_{m=1}^{n}\|v_m\|$, avec égalité si et seulement si $(v_1,\dots,v_n)$ est orthogonale.

EXERCICE 2. — Procédé de Gram-Schmidt et décomposition d'Iwasawa

1 Soit $M\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe un unique triplet (Q,A,N) tel que $M=QAN$, où $Q\in\mathrm{O}(n,\mathbf{R})$, A est une matrice diagonale à coefficients strictement positifs et N est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1.

2 Soit $M\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$. Démontrer qu'il existe un unique triplet (Q,A,N) tel que $M=QAN$, où $Q\in\mathrm{U}(n,\mathbf{R})$, A est une matrice diagonale à coefficients strictement positifs et N est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1.

3 On note D l'espace des matrices diagonales à coefficients réels strictement positifs et T l'espace des matrices triangulaires supérieures (à coefficients réels ou complexes, respectivement) dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 Démontrer que l'application $(Q,A,N)\mapsto QAN$ définit un homéomorphisme de $\mathrm{O}(n,\mathbf{R})\times D\times T$ dans $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$, respectivement un homéomorphisme de $\mathrm{U}(n,\mathbf{R})\times D\times T$ dans $\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$.

EXERCICE 3. — Racine carrée d'une matrice symétrique

1 Soit $M\in\mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique positive. Démontrer qu'il existe une unique matrice symétrique positive S telle que $M=S^2$. (Commencer par démontrer l'unicité ; pour cela, observer qu'une telle matrice S commute à M puis qu'il existe une base orthonormée dans laquelle M et S sont simultanément diagonalisables. Démontrer alors l'existence.)

2 Soit $M\in\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ une matrice hermitienne positive. Démontrer qu'il existe une unique matrice hermitienne positive S telle que $M=S^2$.

3 Démontrer que l'ensemble Ω des matrices symétriques (resp. hermitiennes) définies positives est un ouvert de l'espace V des matrices symétriques (resp. hermitiennes). Démontrer que l'application $S \mapsto S^2$ est un difféomorphisme de Ω sur lui-même. (Prouver qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$, vérifier que sa différentielle est inversible en tout point, puis que c'est un homéomorphisme.)

EXERCICE 4. — Décomposition polaire, décomposition de Cartan

1 Soit $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe un unique couple (Q, S) tel que $M = QS$, où $Q \in \mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ et S est une matrice symétrique définie positive (*décomposition polaire.*)

2 Soit $P \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ l'espace des matrices symétriques définies positives ; c'est un ouvert de l'espace vectoriel des matrices symétriques. Démontrer que l'application $(Q, S) \mapsto QS$ réalise un homéomorphisme de $O(n, \mathbf{R}) \times P$ sur $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$. (Justifier qu'elle est continue ; pour démontrer que sa réciproque est continue, utiliser le fait que $O(n, \mathbf{R})$ est compact.)

3 Soit $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe un triplet (Q, A, Q') tel que $M = QAQ'$, où $Q, Q' \in \mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ et A est une matrice diagonale à coefficients strictement positifs.

4 Soit $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$. Démontrer qu'il existe un unique couple (Q, S) tel que $M = QS$, où $Q \in \mathrm{U}(n, \mathbf{C})$ et S est une matrice hermitienne définie positive (*décomposition polaire*).

5 Interpréter le résultat de la question précédente lorsque $n = 1$ et justifier la terminologie de décomposition polaire.

6 Soit $P \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ l'espace des matrices hermitiennes définies positives ; c'est un ouvert de l'espace vectoriel des matrices hermitiennes. Démontrer que l'application $(Q, S) \mapsto QS$ réalise un homéomorphisme de $\mathrm{U}(n, \mathbf{R}) \times P$ sur $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$.

7 Soit $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$. Démontrer qu'il existe un triplet (Q, A, Q') tel que $M = QAQ'$, où $Q, Q' \in \mathrm{U}(n, \mathbf{C})$ et A est une matrice diagonale à coefficients réels strictement positifs (*décomposition de Cartan*).

8 On rappelle que $M \mapsto \mathrm{Tr}(M^* M)^{1/2}$ est une norme hermitienne sur $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$. Soit $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ et soit $M = QS$ sa décomposition polaire. Démontrer que $\|M - Q\|$ est la distance de M à $\mathrm{U}(n, \mathbf{C})$. (Traiter d'abord le cas où S est diagonale ; pour en déduire le cas général, utiliser que la norme indiquée est invariante par l'action de $\mathrm{U}(n, \mathbf{C})$.)

EXERCICE 5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K de caractéristique $\neq 2$.

1 Démontrer que l'application $u \mapsto \mathrm{Tr}(u^2)$ est une forme quadratique sur $\mathrm{End}(E)$. Quelle est la forme bilinéaire associée ?

2 Calculer son rang. Lorsque $K = \mathbf{R}$, quelle est sa signature ?

EXERCICE 6

1 Soit E un espace vectoriel euclidien (resp. hermitien) et soit $p \in \mathrm{End}(E)$ un projecteur. Démontrer que $p^* = p$ si et seulement si $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p)^\perp$.

2 Soit E et F des espaces vectoriels euclidiens (resp. hermitiens) et soit $u\colon E \to F$ un homomorphisme. Démontrer qu'il existe un unique homomorphisme $v\colon F \to E$ vérifiant les conditions suivantes : $uvu = u$, $vuv = v$, $uv = (uv)^*$ et $vu = (vu)^*$. On le note $u^\sharp$ (*pseudo-inverse de Moore-Penrose* de u).

3 Démontrer que pour tout $y \in F$, on a

$$\left\| u(u^\sharp(y)) - y \right\| = \inf_{x\in E} \| u(x) - y \| .$$

EXERCICE 7. — Inégalité de Hadamard

1 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique positive. Déduire de l'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique que $0 \leqslant \det(A) \leqslant (\mathrm{Tr}(A)/n)^n$, avec égalité si et seulement si A est scalaire.

2 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$, de colonnes $A_1, \dots, A_n$. Démontrer que $|\det(A)| \leqslant \|A_1\| \dots \|A_n\|$, avec égalité si et seulement si les A_j sont deux à deux orthogonaux. (Supposer d'abord que les colonnes A_j sont unitaires et appliquer la question précédente ; traiter ensuite le cas général.) Interprétation géométrique.

3 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ et soit $M = \sup\limits_{i,j}(|a_{i,j}|)$. Démontrer que $|\det(A)| \leqslant M^n n^{n/2}$.

4 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique définie positive. En appliquant l'inégalité de Hadamard à une matrice B telle que $A = {}^{\mathrm{t}}BB$, démontrer que $|\det(A)| \leqslant \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

EXERCICE 8

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ la matrice d'une forme quadratique q sur $\mathbf{R}^n$. Pour tout $m \in \{1, \dots, n\}$, on note $A_m = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$ le m-ième mineur principal de A.

1 On suppose que $\det(A_1), \dots, \det(A_n) > 0$. Démontrer que q est définie positive.

2 Plus généralement, on suppose que $\det(A_m) \neq 0$ pour tout m. Déterminer la signature de q en fonction de la suite $(1, \det(A_1), \dots, \det(A_n))$.

3 Généraliser au cas des formes hermitiennes.

EXERCICE 9

Soit E un espace euclidien ou hermitien.

1 Soit u un endomorphisme de E tel que $\mathrm{Tr}(u^* \circ u) = 0$. Démontrer que $u = 0$.

2 Soit V un sous-espace vectoriel de E tel que $u(V) \subset V$. Soit p le projecteur orthogonal d'image V. On pose $v = p \circ u \circ (\mathrm{id}_E - p)$ et $w = p \circ u \circ p$. On suppose que u est normal. Démontrer que $v = 0$. En déduire que $u(V^\perp) \subset V^\perp$.

3 Soit A une matrice par blocs de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$. On suppose que $AA^* = A^*A$. Démontrer que $A_2 = 0$.

4 Faire le lien entre les deux questions précédentes.

EXERCICE 10

Soit E un espace vectoriel euclidien (resp. hermitien) et soit q une forme quadratique (resp. une forme hermitienne) sur E.

1 Démontrer qu'il existe une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E qui est orthonormée, et orthogonale pour q, ainsi qu'une suite croissante $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ de nombres réels tels que $q(e_i)=\lambda_i$ pour tout i.

2 Pour tout entier m tel que $0\leqslant m\leqslant n$, on pose $F_m=\mathrm{vect}(e_1,\dots,e_m)$ et $F^m=\mathrm{vect}(e_{m+1},\dots,e_n)$ (de sorte que $F_0=F^n=0$ et $F^0=F_n=E$). Démontrer que $q(x)\leqslant\lambda_m\|x\|^2$ pour tout $x\in F_m$, et que $q(x)\geqslant\lambda_{m+1}\|x\|^2$ pour tout $x\in F^m$.

3 Soit $m\in\{1,\dots,n\}$ et soit V un sous-espace vectoriel de E de dimension m. En remarquant que $V\cap F^{m-1}\neq 0$, démontrer qu'il existe $x\in V$ tel que $\|x\|=1$ et $q(x)\geqslant\lambda_m$. En déduire que

$$\lambda_m=\inf_{\substack{V\subset E\\ \dim(V)=m}}\ \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|\leqslant 1}} q(x).$$

4 Par la même méthode, ou en considérant la forme $-q$, démontrer que

$$\lambda_m=\sup_{\substack{V\subset E\\ \mathrm{codim}(V)=m-1}}\ \inf_{\substack{x\in V\\ \|x\|\leqslant 1}} q(x).$$

Pour tout endomorphisme auto-adjoint u de V, on note $(\lambda_1(u),\dots,\lambda_n(u))$ la suite croissante de ses valeurs propres de u.

5 Soit u et v des endomorphismes auto-adjoints de E tels que $v-u$ soit positif. Démontrer que $\lambda_m(u)\leqslant\lambda_m(v)$ pour tout $m\in\{1,\dots,n\}$. En particulier, $\mathrm{Tr}(u)\leqslant\mathrm{Tr}(v)$ et, si u est positif, $\det(u)\leqslant\det(v)$.

6 Soit u et v des endomorphismes auto-adjoints de V. Démontrer que pour tous $m,p\geqslant 0$, on a $\lambda_{m+p}(u+v)\geqslant\lambda_m(u)+\lambda_{p+1}(v)$.

EXERCICE 11

1 Vérifier que les fonctions $x\mapsto e^x$ et $x\mapsto\log(1+e^x)$ sont convexes.

Soit E un espace vectoriel euclidien (ou hermitien); on pose $n=\dim(E)$. Soit u et v des endomorphismes de E, autoadjoints et définis positifs.

2 Démontrer que pour tout $s,t\in\mathbf{R}_+$, on a

$$\det(su+tv)\leqslant\det(u)^s\det(v)^t.$$

3 Démontrer que l'on a

$$\det(u)^{1/n}+\det(v)^{1/n}\leqslant\det(u+v)^{1/n}.$$

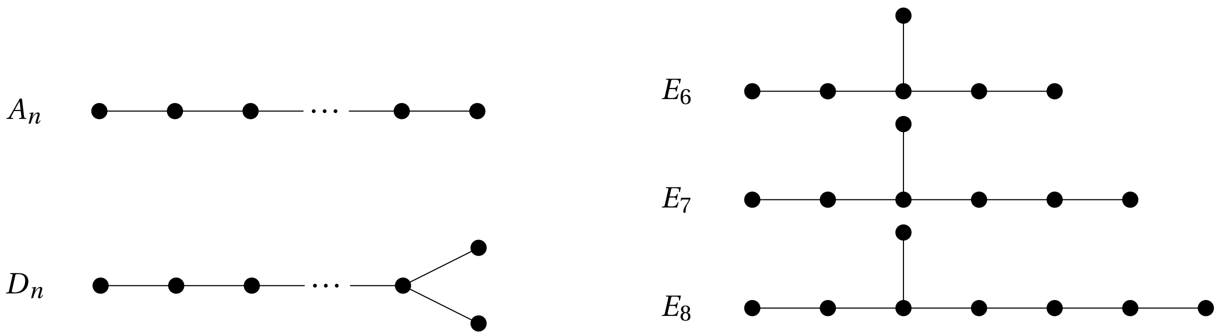
EXERCICE 12. — Graphes de Coxeter

Soit G un graphe fini connexe. Soit S l'ensemble de ses sommets et, pour $s,s'\in S$, soit $a_{s,s'}$ le nombre d'arêtes joignant les sommets s et s'. On définit une forme quadratique q_G sur $\mathbf{R}^S$

par

$$q_G((x_s)) = \sum_{s\in S} x_s^2 - \frac{1}{2}\sum_{s,s'} a_{s,s'} x_s x_{s'}.$$

1 On suppose que G est l'un des graphes suivants



Démontrer que q_G est définie positive.

Dans la suite de l'exercice, on suppose inversement que q_G est définie positive.

2 Démontrer que G n'a pas de cycle. (En particulier, il y a au plus une arête entre deux sommets de G et aucune d'un sommet vers lui-même.)

3 On suppose que G n'a pas de sommet de valence $\geqslant 3$; démontrer que G est le graphe A_n (où n est le cardinal de S).

4 On suppose que G a au moins un sommet de valence $\geqslant 3$. Démontrer qu'alors ce sommet est unique, de valence 3.

5 On note p, q, r les longueurs des branches issues du sommet de valence 3, où $p \geqslant q \geqslant r$. Démontrer que $r = 1$ et $q < 3$.

6 Si $q = 1$, démontrer que G est le graphe D_n. Si $q = 2$, démontrer que G est l'un des graphes E_6, E_7, E_8.

EXERCICE 13

Soit k un corps fini (de caractéristique $\neq 2$).

1 Soit $a, b \in k^\times$. Démontrer que l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ possède une solution.

2 En déduire que pour toute forme quadratique q sur k^n, il existe $r \in \{1, \dots, n\}$ et $a \in k^\times$ tels que q soit équivalente à la forme donnée par $q(x) = ax_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2$.

3 Soit n un entier naturel. Démontrer que deux formes quadratiques non dégénérées sur k^n sont équivalentes si et seulement si leurs discriminants sont égaux dans $k^\times / k^{\times 2}$.