DM 1 - à rendre le 17 octobre

François Le Maître - *f.lemaitre@math.univ-paris-diderot.fr*

Exercice 1. Algèbres booléennes.
Une **algèbre booléenne** est un anneau unifère $(A, +, \cdot, 0, 1)$ tel que pour tout $a \in A$, on a $a \cdot a = a$ (tout élément est idempotent).

1. On va commencer par quelques exemples d'algèbres booléennes.
   (a) Soit X un ensemble. Vérifier que $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap, \emptyset, X)$ est une algèbre booléenne.

   On peut identifier $\mathcal{P}(X)$ à l'anneau produit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^X$ et on s'aperçoit que la différence symétrique correspond à l'addition tandis que l'intersection correspond au produit. On vérifie immédiatement qu'un produit d'algèbres booléennes est une algèbre booléenne, donc $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap, \emptyset, X)$ est une algèbre booléenne.

   (b) Soit X un compact, soit $\mathcal{OF}(X)$ l'ensemble de ses ouverts-fermés. Montrer que $\mathcal{OF}(X)$ est une sous-algèbre (booléenne) de $\mathcal{P}(X)$.

   Les ouverts-fermés sont stables par complémentaire et union finie, ce qui donne qu'ils sont stables par différence symétrique et intersection. De plus, X et $\emptyset$ sont ouverts-fermés, donc $\mathcal{OF}(X)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{P}(X)$, donc une algèbre booléenne. On remarque que la compacité n'intervient pas du tout.

   (c) Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de variables propositionnelles, on considère le quotient $\mathcal{F}_\mathcal{P}$ de l'ensemble des $\mathcal{P}$-formules du calcul propositionnel par l'équivalence logique. Montrer que les opérations "ou exclusif" (noté $+$) et conjonction (notée $\wedge$) passent au quotient et définissent une structure d'algèbre de Boole sur $\mathcal{F}_\mathcal{P}$, appelée algèbre du calcul propositionnel sur $\mathcal{P}$.

   Je ne vois pas comment éviter de vérifier tous les axiomes à la main. Ce qui simplifie la vie, c'est de remarquer que la table de vérité du ou exclusif est vraiment donnée par la somme dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tandis que la conjonction correspond au produit. On en déduit par récurrence sur les formules que $\delta(P \operatorname{XOR} Q) = \delta(P) + \delta(Q)$ et $\delta(P \wedge Q) = \delta(P)\delta(Q)$ pour toutes formules P et Q, et on peut alors déduire tous les axiomes voulus du fait que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est une algèbre de Boole. Par exemple, si on veut montrer que XOR *est associatif, on va dire que pour toute d.v.v. δ, on a*

$$\delta((P \operatorname{XOR} Q) \operatorname{XOR} R) = (\delta(P) + \delta(Q)) + \delta(R) = \delta(P) + (\delta(Q) + \delta(R)) = \delta(P \operatorname{XOR}(Q \operatorname{XOR} R)),$$

   ce qui donne bien que $(P \operatorname{XOR} Q) \operatorname{XOR} R$ équivaut logiquement à $P \operatorname{XOR}(Q \operatorname{XOR} R)$. Les autres axiomes se montrent de manière similaire. On verra plus tard qu'en fait notre algèbre du calcul propositionnel s'identifie naturellement à l'algèbre des ouverts-fermés de l'ensemble des distributions de vérité (identifié au compact totalement discontinu $\{0,1\}^\mathcal{P}$).

2. Soit A une algèbre booléenne. Montrer que pour tout $a, b \in A$ on a $a + a = 0$ et $ab = ba$.

On écrit que $2a = (2a)^2 = 4a^2 = 4a$ donc $2a = 0$ (et donc $a = -a$). Maintenant $a + b = (a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b$ donc $ab + ba = 0$ donc $ab = -ba = ba$. Remarquons qu'on n'a pas utilisé le fait que l'anneau soit unifère afin de déduire ces faits.

3. Soit A une algèbre booléenne. On définit une relation $\leqslant$ sur A par $a \leqslant b$ ssi $ab = a$.
   (a) Vérifier que $\leqslant$ définit une relation d'ordre (non stricte) où 0 est le minimum de A est 1 le maximum. Cet ordre est-il total ?

   On a $a^2 = a$ dont $\leqslant$ est réflexif. Ensuite, si $ab = a$ et $bc = b$, alors $ac = (ab)c = a(bc) = ab = a$ d'où la transitivité. Enfin si $ab = a$ et $ba = b$, alors comme $ab = ba$ on a $a = b$, ce qui établit l'antisymétrie. On a donc bien une relation d'ordre. Elle est non totale puisque dans le cas de l'algèbre des parties des ensembles on voit qu'elle correspond à l'inclusion.

   (b) Montrer que toute famille finie d'éléments de A possède un suprémum (plus petit majorant) et un infimum (plus grand minorant). Les identifier dans les trois exemples précédents.

Il faut se laisser guider par l'intuition fournie par le cas de l'ensemble des parties. On sait que l'infimum d'un ensemble d'ensembles est leur intersection, et on va montrer que dans une algèbre de Boole, l'infimum d'une famille finie $(a_1, ..., a_n)$ *est le produit* $a_1 \cdots a_n$. *En utilisant le fait que le produit soit commutatif et le fait que* $a_i^2 = a_i$, *on vérifie que* $a_1 \cdots a_n a_i = a_1 \cdots a_n$ *pour tout* $i = 1, ..., n$, *donc* $a_1 \cdots a_n$ *est un minorant de* $(a_1, ..., a_n)$. *Soit maintenant* b *un autre minorant de* $(a_1, ..., a_n)$, *alors par définition on a* $ba_i = b$ *pour tout* i, *ce qui nous donne en appliquant cette égalité pour* $i = 1, ..., n$ *que* $ba_1 \cdots a_n = b$, *donc* $b \leqslant a_1 \cdots a_n$.

Pour le supremum, on peut remarquer que le fait que l'involution $A \mapsto X \setminus A$ *renverse l'inclusion reste vrai pour les algèbres de Boole. Tout d'abord, l'application* $x \mapsto 1 + x = 1 - x$ *est une involution puisque* $1 + (1 + x) = (1 + 1) + x = x$. *Pour montrer qu'elle renverse l'ordre, il suffit de montrer que* $a \leqslant b$ *implique* $1 + b \leqslant 1 + a$. *Supposons donc* $ab = a$, *alors* $(1 + b)(1 + a) = 1 + a + b + ba = 1 + a + a + b = 1 + b$, *ainsi* $1 + b \leqslant 1 + a$ *comme voulu. Comme on vient de montrer que les familles finies ont un infimum, on déduit de ce qui précède qu'elles ont également un supremum.* [1]

4. On dit que $a \in A$ est un **atome** si $a \neq 0$ et si le seul élément plus petit que a est 0.
   (a) Quels sont les atomes de $\mathcal{P}(X)$?

Ce sont les singletons, puisque leurs seuls sous-ensembles strict est l'ensemble vide et que l'ordre $\leqslant$ *est en fait l'inclusion.*

   (b) Montrer que si $\mathcal{P}$ est un ensemble infini de variables propositionnelles, l'algèbre du calcul propositionnel sur $\mathcal{P}$ est sans atomes.

Soit $[P]$ *un élément non nul de cette algèbre, soit* p *une variable propositionnelle n'apparaissant pas dans* P *(qui existe car* $\mathcal{P}$ *est infini). Alors on vérifie que* $[P]p = [P \wedge p]$ *est strictement plus petit que* $[P]$ *et non nul. L'algèbre du calcul propositionnel sur* $\mathcal{P}$ *est donc sans atomes.*

   (c) Montrer que toute algèbre de Boole finie est atomique, c'est à dire que tout élément est minoré par un atome. En déduire que toute algèbre de Boole finie est isomorphe à l'algèbre des parties d'un ensemble fini.

On raisonne par l'absurde en commençant par remarquer que de manière générale, si $x \in A \setminus \{0\}$ *ne majore pas d'atome alors il existe* $y < x$ *non nul ne majorant pas d'atomes. En effet,* x *ne peut être un atome lui-même, donc il existe* $y \in A$ *tel que* $0 < y < x$, *et alors si* $z \leqslant y$ *est un atome, on a aussi* $x \geqslant z$ *ce qui contredit la définition de* x. *Ainsi, si* x *ne majore pas d'atome, on peut construire par récurrence une suite strictement décroissante* (x_n) *avec* $x_0 = x$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, x_n *ne contient pas d'atome, ce qui contredit la finitude de* A. *On appellera* ***partition de l'unité*** *une famille* $(b_1, ..., b_n)$ *d'éléments non nuls de* A *telle que pour* $i \neq j$ *on a* $b_i b_j = 0$ *et* $1 = b_1 + \cdots + b_n$. *Soient* $a_1, ..., a_n$ *les atomes de* A, *montrons qu'ils forment une partition de l'unité. Pour* $i \neq j$, *on a* $a_i a_j < a_i$ *donc* $a_i a_j = 0$ *car* a_i *est un atome. De plus, si* $1 + a_1 + \cdots + a_n \neq 0$, *par ce qui précède on peut trouver un atome* $a \leqslant 1 + a_1 + \cdots + a_n$. *Alors* $a = a + aa_1 + \cdots + aa_n$ *donc* $a(a_1 + \cdots + a_n) = 0$, *et ainsi* $a \neq a_i$ *pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$, *ce qui contredit que l'ensemble des atomes de* A *soit* $\{a_1, ..., a_n\}$. *On conclut que* $(a_1, ..., a_n)$ *est bien une partition de l'unité. On va maintenant établir un lemme général sur les partitions de l'unité.*

Lemme. Soit $(b_1, ..., b_n)$ une partition de l'unité de A. Alors l'algèbre engendrée par $b_1, ..., b_n$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^n$.

De plus, si A et B sont deux algèbres de Boole, et si on se donne deux partitions de l'unité $(a_1, .., a_n)$ de A et $(b_1, ..., b_n)$ de B, alors il existe un unique isomorphisme ψ entre l'algèbre engendrée par $(a_1, .., a_n)$ et l'algèbre engendrée par $(b_1, ..., b_n)$ tel que $\psi(a_i) = b_i$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

Démonstration. Soit $(b_1, ..., b_n)$ *une partition de l'unité de* A. *Rappelons que* A *a une structure de* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*-espace vectoriel d'après la question* 2.

1. Le fait d'avoir une unité est encore une fois superflux. On pourrait directement définir une opération $\vee$ par $a \vee b = a + b + ab$ (qui correspond bien à l'union dans le cas de $\mathcal{P}(X)$ et est associative) et vérifier que le supremum de $a_1, .., a_n$ est $a_1 \vee \cdots \vee a_n$.

Montrons d'abord que la famille $(b_1, ..., b_n)$ *est libre : si* $\sum_i \epsilon_i b_i = 0$*, on obtient pour* $j = 1, ..., n$ *que* $b_j \sum_i \epsilon_i b_i = 0$ *donc* $\epsilon_j b_j^2 = 0$ *c'est-à-dire* $\epsilon_j b_j = 0$*, et donc* $\epsilon_j = 0$ *car* b_j *est non nul. La famille* $(b_1, ..., b_n)$ *est libre. Soit* V *le* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*-espace vectoriel engendré par* $b_1, ..., b_n$*. Alors* V *est en fait une algèbre puisque le produit de deux éléments de* $\{b_1, ..., b_n\}$ *est toujours un élément de* $\{0, b_1, ..., b_n\}$*. L'isomorphisme naturel d'espace vectoriels* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^n \to V$ *donné par* $(\epsilon_1, ..., \epsilon_n) \mapsto \sum_i \epsilon_i b_i$ *est un isomorphisme d'algèbre puisque les éléments de la base canonique* (e_i) *de* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^n$ *ont la même table de multiplication que les* b_i *: en effet* $b_i b_j = \delta_{i,j}$*).*

La partie "de plus" est une conséquence immédiate de la preuve précédente, l'unicité de ψ *provenant du fait qu'une application linéaire est déterminée par l'image des éléments de la base.* $\square$

En appliquant le lemme à la partition de l'unité formée des atomes de A*, on voit que* A *est isomorphe à* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^n$*, qui est lui-même isomorphe à l'algèbre des parties de* $\{1, ..., n\}$*.*

(d) En utilisant un va-et-vient, montrer que toutes les algèbres booléennes dénombrables sans atomes sont isomorphes.

On va réutiliser la terminologie de la question précédente. Soient $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $B = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deux algèbres booléennes dénombrables sans atomes, on peut supposer $a_0 = 1_A$ et $b_0 = 1_B$. On va construire par récurrence une suite d'isomorphismes partiels $\varphi_n : \mathrm{dom}\, \varphi_n \to \mathrm{rng}\, \varphi_n$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_{n+1} prolonge φ_n et $a_n \in \mathrm{dom}\, \varphi_n$, $b_n \in \mathrm{rng}\, \varphi_n$. On commence par φ_0 de domaine $\{0_A, 1_A\}$, d'image $\{0_B, 1_B\}$ définie par $\varphi_0(0_A) = 0_B$ et $\varphi_0(1_A) = 1_B$, qui est bien un isomorphisme d'algèbres booléennes. La construction de φ_{n+1} à partir de φ_n va découler du lemme suivant par un va-et-vient que je ne détaillerai pas ici.

Lemme. Soit C une algèbre de Boole sans atomes, soit D une algèbre de Boole et F une sous-algèbre finie de D. Enfin, soit $\psi : F \to C$ un plongement et $d \in D$. Alors l'algèbre $\tilde{F}$ engendrée par $F \cup \{d\}$ est finie et on peut prolonger ψ en un plongement $\tilde{\psi} : \tilde{F} \to C$.

Démonstration. Soit $(f_1, ..., f_n)$ une énumération des atomes de F, on a vu que $(f_1, ..., f_n)$ est une partition de l'unité de F. Pour $i = 1, ..., n$, on considère $f'_i = ff_i$. Soit J_1 l'ensemble des entiers $j \in \{1, ..., n\}$ tels que $f_j = f'_j$, soit J_2 l'ensemble des entiers $j \in \{1, ..., n\}$ tels que $f'_j = 0$. Enfin soit $J_3 = \{1, ..., n\} \setminus (J_1 \sqcup J_2)$. Alors pour $j \in J_3$ on a $0 < f'_j < f_j$, et on pose $f''_j = (1+f)f_j$. On remarque que $f''_j + f'_j = (1 + f)f_j + ff_j = f_j$, en particulier $f''_j \neq 0$. On pose alors

$$\tilde{P} = (f_j)_{j\in J_1\cup J_2} \cdot (f'_j)_{j\in J_3} \cdot (f''_j)_{j\in J_3}.$$

Alors $\tilde{P}$ est une partition de l'unité : pour tous $j, j' \in J_3$ on a $f'_j f''_j = fj_j(1+f)f_j = (f+f)f_j = 0$, pour $j \neq j' \in J_1 \cup J_2$ on a $f_j f_{j'} = 0$, pour $j \in J_1 \cup J_2$ et $j' \in J_3$ on a à la fois $f_j f'_{j'} \leqslant f_j f_{j'} = 0$ et $f_j f''_{j'} \leqslant f_j f_{j'} = 0$.

Soit $\tilde{F}$ l'algèbre engendrée par $\tilde{P}$, de cardinalité $2^{|\tilde{P}|}$. Pour tout $p \in \tilde{P}$, on a soit $pf = p$ soit $pf = 0$: en effet si $j \in J_1 \sqcup J_2$ on a $ff_j = f'_j$ et par construction $f'_j = f_j$ (si $j \in J_1$) ou $f'_j = 0$ (si $j \in J_2$), enfin si $j \in J_3$ on a $ff'_j = fff_j = ff_j = f'_j$ et $ff''_j = f(1 + f)f_j = 0$. Comme $\tilde{P}$ est une partition de l'unité, on a $f = \sum_{p\in\tilde{P}} pf$ et comme pour tout $p \in \tilde{P}$, on a soit $pf = p$ soit $pf = 0$ on conclut que $f \in \tilde{P}$.

La famille $(c_1, ..., c_n) := (\psi(f_1), ..., \psi(f_n))$ est une partition de l'unité de C. Comme C est sans atome, pour tout $j \in J_3$ on trouve $c'_j < \psi(f_j)$ non nul, et on pose alors $c''_j = (1 + c'_j)\psi(f_j)$. On vérifie alors que

$$\tilde{Q} = (c_j)_{j\in J_1\cup J_2} \cdot (c'_j)_{j\in J_3} \cdot (c''_j)_{j\in J_3}$$

est une partition de l'unité, et on prolonge ψ en envoyant f'_j sur c'_j et f''_j sur c''_j pour tout $j \in J_3$ (en utilisant le lemme de la question précédente ; ceci prolonge bien ψ puisque $c'_j + c''_j = c_j$ et $f'_j + f''_j = f_j$). $\square$

Exercice 2. Définissabilité des connecteurs, système complet de connecteurs.
On se place dans le cadre du calcul propositionnel. On dit que le connecteur c d'arité n est *définissable* à partir des connecteurs c_1, ..., c_k s'il existe une formule en les variables propositionnelles $p_0, \dots, p_{n-1}$ n'utilisant que les connecteurs c_1, ..., c_k et qui est équivalente à $c(p_0, \dots, p_{n-1})$. On dit qu'un système de connecteurs $\{c_1, \dots, c_k\}$ est *complet* si tout connecteur est définissable à partir de c_1, ..., c_k.

1. Montrer que $\vee$ est définissable à partir de $\wedge$ et $\neg$.

La formule $p \vee q$ est équivalente à $\neg(p \wedge q)$, donc $\vee$ est définissable à partir de $\wedge$ et $\neg$.

2. Montrer que le système $\{\vee, \neg\}$ est complet.

La formule $p \wedge q$ est équivalente à $\neg(p \vee q)$, donc $\wedge$ est définissable à partir de $\vee$ et $\neg$. De plus $p \Rightarrow q$ est équivalente à $\neg p \vee q$ et donc $\Rightarrow$ est définissable à partir de $\vee$ et $\neg$. Enfin $p \Leftrightarrow q$ est équivalente à $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, donc également définissable à partir de $\vee$ et $\neg$. On conclut que $\{\vee, \neg\}$ est complet.

3. Montrer que le système $\{\Leftrightarrow, \neg\}$ n'est pas complet.

On va travailler dans l'algèbre booléenne du calcul propositionnel. On remarque tout d'abord que pour toute formule P on a $[\neg P] = 1 + [P]$ et $[P \Leftrightarrow Q] = 1 + ([P] + [Q])$. Ainsi, à équivalence logique près, les formules obtenues à partir des variables propositionnelles $P_1, ..., P_n$, et des connecteurs $\Leftrightarrow$ et $\neg$ sont simplement les éléments de l'espace vectoriel engendré par $1, [P_1], ..., [P_n]$. En particulier on n'obtient pas toutes la formule $P_1 \vee P_2$ à équivalence logique près à l'aide du système de connecteurs $\{\Leftrightarrow, \neg\}$ qui n'est donc pas complet.

4. Trouver un système à 8 connecteurs binaires (2 à 2 distincts) qui n'est pas complet.

Il suffit de prendre tous les connecteurs c dont la table de vérité donne $c(1,1) = 1$ (il y en a bien $2^3 = 8$ car on a 3 choix à 2 possibilités : $c(0,0), c(0,1)$ et $c(1,0)$). En effet, on vérifie aisément par induction que si δ est la d.v.v. telle que $\delta(p) = 1$ pour tout $p \in \mathcal{P}$ et F est une formule obtenue à partir des variables propositionnelles et de tels connecteurs, alors $\delta(F) = 1$. En particulier, $\neg$ n'est pas définissable à partir de tels connecteurs.

5. Trouver un système à 128 connecteurs ternaires (2 à 2 distincts) qui n'est pas complet.

De même que précédemment, il suffit de considérer l'ensemble des connecteurs tels que $c(1,1,1) = 1$. Il y en a $2^{2^3-1} = 128$.

Exercice 3. Paradoxe de Banach-Tarski.
On se propose de démontrer le paradoxe de Banach-Tarski en admettant son prédécesseur : le paradoxe de Hausdorff. Commençons par un peu de terminologie : deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}^3$ sont dits **puzzle-équivalents** s'il existe deux partitions $(A_1, ..., A_n)$ et $(B_1, ..., B_n)$ de A et B respectivement et des isométries de $\mathbb{R}_3$ $\varphi_1, ..., \varphi_n$ telles que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on ait $\varphi_i(A_i) = B_i$. On note $A \sim_{PE} B$ si A et B sont puzzle-équivalents. Nous pouvons maintenant énoncer le paradoxe de Hausdorff, que nous admettrons.

Théorème (Hausdorff, 1914)**.** Il existe une partie dénombrable D de la sphère unité $\mathbb{S}^2$ et une partition $\mathbb{S}^2 \setminus D = A \sqcup B$ telle que $A \sim_{PE} B \sim_{PE} \mathbb{S}^2 \setminus D$. De plus, on peut implémenter cette puzzle-équivalence avec uniquement des isométries fixant le centre de la sphère unité.

On note $A \lesssim_{PE} B$ s'il existe une partie $C \subseteq B$ telle que $A \sim_{PE} B$.

1. Montrer que la relation $\lesssim_{PE}$ est une relation de préordre (réflexive et transitive). Est-elle totale ?

Soient A, B et C telles que $A \lesssim_{PE} B$ et $B \lesssim_{PE} C$, soient $(A_i)_{i=1}^n$, $(B_i)_{i=1}^n$ et $(\varphi_i)_{i=1}^n$ témoignant de $A \lesssim_{PE} B$ et soient $(B'_j)_{j=1}^m$, $(C_j)_{j=1}^m$ et $(\psi_j)_{j=1}^m$ témoignant de $B \lesssim_{PE} C$. Soient φ la bijection $A \to B$ obtenue en recollant les φ_i et ψ la bijection $B \to C$ obtenue en recollant les ψ_j (on dit que φ et ψ sont des ***isométries par morceaux****).*
Alors pour $(i,j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., m\}$ on pose $\Phi_{i,j} = \psi_j \circ \varphi_{i \restriction \varphi^{-1}(B'_j)}$ de domaine $A'_{i,j} = A_i \cap \varphi^{-1}(B'_j)$ et d'image $C'_{i,j} = C_j \cap \psi(B_i)$. Clairement chaque $\Phi_{i,j}$ est la restriction d'une isométrie, reste à voir que les domaines partitionnent A et les images partitionnent C (si certains sont vides, on peut les enlever,

ou simplement prendre pour convention qu'on autorise les ensembles vides dans les partitions). Comme φ *et* ψ *sont des bijections,* $(\varphi^{-1}(B'_j))_{j=1^m}$ *est une partition de* A *et* $(\psi(B_i))_{i=1}^n$ *est une partition de* C*. Ainsi* $((A'_{i,j})_{i=1}^m)_{j=1}^n$ *est une partition de* A *et* $((C'_{i,j})_{i=1}^n)_{j=1}^m$ *est une partition de* C *comme voulu.*

2. Montrer que si $A \lesssim_{PE} B$ et $B \lesssim_{PE} A$ alors $A \sim_{PE} B$. En déduire que $\sim_{PE}$ est une relation d'équivalence (on aurait aussi pu le montrer directement).

On remarque que dans la preuve du théorème de Cantor-Bernstein, lorsqu'on a deux injections $\varphi : A \to B$ *et* $\psi : B \to A$*, la bijection* f *que l'on obtient entre* A *et* B *est obtenue à partir d'une partition* $A = A' \sqcup A''$ *où pour tout* $x \in A'$*,* $f(x) = \varphi(x)$ *tandis que pour tout* $x \in A''$*,* $f(x) = \psi^{-1}(x)$*. Maintenant supposons* $A \lesssim_{PE} B$ *et* $B \lesssim_{PE} A$*. Si* $\varphi : A \to B$ *est une isométrie par morceaux injective, et* $\psi : B \to A$ *est une isométrie par morceaux injective, la fonction* f *obtenue comme dans le théorème de Cantor-Bernstein est alors une isométrie par morceaux, et on conclut que* $A \sim_{PE} B$*. Remarquons qu'en fait* $A \sim_{PE} B$ *est équivalent à (*$A \lesssim_{PE} B$ *et (*$B \lesssim_{PE} A$*). De manière générale, lorsque l'on a un préordre* $\leqslant$*, la relation* $\cong$ *définie par* $a \cong b$ *ssi* $a \leqslant b$ *et* $b \leqslant a$ *est une relation d'équivalence, donc ici* $\sim_{PE}$ *est une relation d'équivalence.*

3. Montrer que si D est un sous-ensemble dénombrable de la sphère, alors on peut trouver une rotation R telle que les ensembles $(R^i(D))_{i\in\mathbb{N}}$ soient tous disjoints (on pourra fixer un axe de rotation A ne contenant aucun élément de D puis montrer que l'ensemble des angles de rotation $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que la rotation $R_{A,\theta}$ ne satisfait pas la propriété voulue est dénombrable).

Soit v *un élément de* $\mathbb{S}^1$ *ne contenant aucun élément de* D *(un tel élément existe car la sphère est infinie non dénombrable tandis que* D *est dénombrable). Pours tous* $d, d' \in D$ *et* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*, il existe au plus* n *angles* $\theta \in [0, 2\pi[$ *tel que la rotation* $R_{v,n\theta} = R^n_{v,\theta}$ *envoie* d *sur* d'*. Ainsi l'ensemble des angles* θ *tels qu'il existe* $d, d' \in D$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *avec* $R_{v,n\theta}(d) = d'$ *est dénombrable. Comme* $[0, 2\pi[$ *est non dénombrable, on en déduit qu'il existe un angle* $\theta \in [0, 2\pi[$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *et tous* $d, d' \in D$*, on ait* $R^n_{v,\theta}(d) \neq d'$*. On pose* $R = R_{v,\theta}$*, alors les ensembles* $(R^i(D))_{i\in\mathbb{N}}$ *sont tous disjoints.*

4. Montrer que si R et D sont comme dans la question précédente, alors

$$\bigsqcup_{i=0}^{+\infty} R^i(D) \sim_{PE} \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} R^i(D).$$

En déduire que $\mathbb{S}^2 \setminus D \sim_{PE} \mathbb{S}^2$.

On remarque que

$$\bigsqcup_{i=1}^{+\infty} R^i(D) = R\left(\bigsqcup_{i=0}^{+\infty} R^i(D) \sim_{PE}\right),$$

ainsi $\bigsqcup_{i=0}^{+\infty} R^i(D)$ *et* $\bigsqcup_{i=1}^{+\infty} R^i(D)$ *sont isométriques, en particulier ils sont puzzle-équivalents. Soit* $\mathcal{D} = \bigsqcup_{i=0}^{+\infty} R^i(D)$*, alors ce qui précède se traduit en* $\mathcal{D} \sim_{PE} \mathcal{D} \setminus D$*. En écrivant* $\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{D} \sqcup \mathcal{D}$*, on déduit immédiatement que*

$$\mathbb{S}^2 \sim_{PE} \mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{D} \sqcup \mathcal{D} \setminus D = \mathbb{S}^2 \setminus D.$$

5. Montrer qu'il existe une partition $\mathbb{S}^2 = A \sqcup B$ telle que $A \sim_{PE} B \sim_{PE} \mathbb{S}^2$.

D'après le théorème de Hausdorff, on a $\mathbb{S}^2 \setminus D = A \sqcup B$ *avec* $A \sim_{PE} B \sim_{PE} \mathbb{S}^2 \setminus D$*. D'après la question précédente on dispose d'une isométrie par morceaux* $\varphi : \mathbb{S}^2 \setminus D \to \mathbb{S}^2$*. En posant* $A' = \varphi(A)$ *et* $B' = \varphi(B)$*, on voit que* $A' \sqcup B' = \mathbb{S}^2$*, tandis que*

$$A' \sim_{PE} A \sim_{PE} \mathbb{S}^2 \setminus D \sim_{PE} B \sim_{PE} B'.$$

Remarquons que les isométries utilisées dans la puzzle-équivalence fixent le centre de la sphère unité : ce sont des rotations.

6. En déduire qu'il existe une partition de la boule unité fermée privée de son centre $\mathbb{B}^2 \setminus \{0\} = A \sqcup B$ avec $A \sim_{PE} B \sim_{PE} \mathbb{B}^2 \setminus \{0\}$

D'après la question précédente, on a une puzzle équivalence entre $\mathbb{S}^2$ *et* A*, et entre* $\mathbb{S}^2$ *et* B *où* $\mathbb{S}^2 = A \sqcup B$ *et les puzzle-équivalences n'utilisent que des rotations centrées en le centre de la sphère unité. On écrit alors* $\mathbb{B}^2 \setminus \{0\} = \bigsqcup_{r \in]0,1]} r\mathbb{S}^2$*,* $A' = \bigsqcup_{r \in]0,1]} rA$ *et* $B' = \bigsqcup_{r \in]0,1]} rB$*. Alors* $\mathbb{B}^2 \setminus \{0\} = A' \sqcup B'$ *et les puzzle-équivalences entre* $\mathbb{S}^2$ *et* A*, et entre* $\mathbb{S}^2$ *et* B *s'étendent naturellemet en des puzzle-équivalences entre* $\mathbb{B}^2 \setminus \{0\}$ *et* A*, et entre* $\mathbb{B}^2 \setminus \{0\}$ *et* B *(on étend une restriction de rotation* $\varphi : A_i \to B_i$ *en remplaçant son domaine par* $\bigsqcup_{r \in]0,1]} rA_i$ *et son image par* $B_i' = \bigsqcup_{r \in]0,1]} rB_i$*, ce qui est possible par c'est une rotation centrée en* 0*).*

7. En utilisant un argument similaire à la question 3, montrer que si $x \in \mathbb{S}^2$, alors $\mathbb{B}^2 \setminus x \sim_{PE} \mathbb{B}^2$.

Par un argument de comptage, on trouve une rotation R *centrée en* 0 *telle que* $R^i(x)$ *pour* $i \in \mathbb{N}$ *sont tous distincts. Soit alors* $D = \{R^i(x) : i \in \mathbb{N}\}$*, on remarque que* $R(D) = D \setminus \{x\}$*, en particulier* $D \sim_{PE} D \setminus \{x\}$ *et donc* $\mathbb{B}^2 = \mathbb{B}^2 \setminus D \sqcup D \sim_{PE} \mathbb{B}^2 \setminus D \sqcup D \setminus \{x\} = \mathbb{B}^2 \setminus \{x\}$*.*

8. Conclure qu'il existe une partition $\mathbb{B}^2 = A \sqcup B$ telle que $\mathbb{B}^2 \sim_{PE} A \sim_{PE} B$. En déduire le paradoxe de Banach-Tarski tel qu'énoncé ci-dessous.

   Théorème (Banach-Tarski, 1924)**.** Soient B_1 et B_2 deux boules unité fermées disjointes dans $\mathbb{R}^3$. Alors $B_1 \sim_{PE} B_1 \sqcup B_2$.

Soit $x \in \mathbb{S}^2$*, soit* T *une translation envoyant* x *sur* 0*. On écrit alors* $\mathbb{B}^2 \setminus \{x\} = \mathbb{B}^2 \setminus \{0, x\} \sqcup \{x\}$ *et* $\mathbb{B}^2 \setminus \{0\} = \mathbb{B}^2 \setminus \{0, x\} \sqcup \{0\}$*. Alors les restrictions d'isométries* $\mathrm{id}_{\mathbb{B}^2 \setminus \{0,x\}}$ *et* $T_{\restriction \{x\}}$ *témoignent du fait que* $\mathbb{B}^2 \setminus \{x\} \sim_{PE} \mathbb{B}^2 \setminus \{0\}$*. D'après la question précédente, on a alors* $\mathbb{B}^2 \sim_{PE} \mathbb{B}^2 \setminus \{0\}$*. De même qu'à la question 5, on déduit alors de la question 6 qu'il existe une partition* $\mathbb{B}^2 = A \sqcup B$ *telle que* $\mathbb{B}^2 \sim_{PE} A \sim_{PE} B$*. Soit alors* $\varphi : A \to \mathbb{B}^2$ *une isométrie par morceaux et* $\psi : B \to \mathbb{B}^2$ *isométrie par morceaux, et soit* $\mathbb{B}'$ *une boule unité disjointe de* $\mathbb{B}^2$*. Soit alors* T *une translation telle que* $T(\mathbb{B}^2) = \mathbb{B}'$*. Alors* $T \circ \varphi \sqcup \psi$ *est une isométrie par morceaux entre* $\mathbb{B}^2$ *et* $\mathbb{B}^2 \sqcup \mathbb{B}'$*, et le théorème de Banach-Tarski est démontré.*

9. Montrer que toute réunion finie de boules unité fermées est puzzle-équivalente à la boule unité fermée.

Une récurrence immédiate montre que $\mathbb{B}^2$ *est puzzle-équivalente à toute réunion finie disjointe de boules unités. Mais si* $A = \bigcup_{i=1}^n B_i$ *où les* B_i *sont des boules unités, on pose* $A_i = B_i \setminus \bigcup_{j<i} B_j$*, on remarque que* $A_i \lesssim_{PE} B_i$*. Soient* B_1'*,...,* B_n' *des boules unités disjointes, alors pour tout i on a* $B_i \sim_{PE} B_i'$*. Or* $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ *donc* $A \lesssim_{PE} \bigsqcup_{i=1}^n B_i'$*. Or* $B_1 \lesssim_{PE} A$ *et on a vu que* $\bigsqcup_{i=1}^n B_i' \lesssim_{PE} B_1$*. On conclut par la question 2 que* $A \sim_{PE} B_1$*.*

10. Démontrer le théorème suivant de Banach et Tarski, moins connu mais plus fort que l'énoncé précédent.

    Théorème (Banach-Tarski, 1924)**.** Soient E_1 et E_2 deux parties bornées de $\mathbb{R}^3$ et d'intérieur non vide, alors $E_1 \sim_{PE} E_2$.

Il suffit de montrer d'après la question 2 que pour toutes parties bornées de $\mathbb{R}^3$ *d'intérieur non vide* E_1 *et* E_2 *on a* $E_1 \lesssim_{PE} E_2$*. La partie* E_2 *est d'intérieur non vide, donc on trouve* $\epsilon > 0$ *tel que* E_1 *contienne une boule fermée* B *de rayon* ϵ*. On déduit de la question précédente en conjuguant par une homothétie de rapport* ϵ *que toute réunion finie de boules fermées de rayon* ϵ *est puzzle-équivalente à une boule fermée de rayon* ϵ*. Or* E_1 *est bornée, donc recouverte par un nombre fini de boules fermées de rayon* ϵ*. On déduit ce ces deux faits que* $E_1 \lesssim_{PE} B$*, et donc* $E_1 \lesssim_{PE} E_2$*.*