DM 2 - à rendre le 17 novembre

François Le Maître - *f.lemaitre@math.univ-paris-diderot.fr*

Exercice 1. Corps ordonnés non standards.
On considère le langage $\mathcal{L}_{ao} = \{0, 1, +, \cdot, <\}$ où $0, 1$ sont des constantes, $+, \cdot$ sont des fonctions binaires et $<$ est une relation binaire. On voit naturellement $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$ comme des $\mathcal{L}_{ao}$-structures.

1. $\mathbb{Z}$ est-il une sous-structure élémentaire de $\mathbb{Q}$?

Un **corps ordonné** est un corps muni d'une relation d'ordre total $<$ telle que la multiplication de deux nombres positifs est un nombre positif, et l'addition préserve l'ordre.

2. Soit T_c la théorie des corps, donner un $\mathcal{L}_{ao}$-énoncé φ tel que l'ensemble des modèles de $T_c \cup \{\varphi\}$ soit l'ensemble des corps totalement ordonnés.
3. $\mathbb{Q}$ est-il une sous-structure élémentaire de $\mathbb{R}$?
4. Montrer qu'il existe un corps ordonné $\bar{\mathbb{R}}$ tel que $\bar{\mathbb{R}}$ contienne $\mathbb{R}$ comme sous-corps ordonné, mais $\bar{\mathbb{R}}$ ne soit pas archimédien et $\mathbb{R} \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ soit borné (i.e. contenu dans un intervalle). *Indication : On considérera une ultrapuissance sur* $\mathbb{N}$ *des réels et les éléments de l'ultraproduit* $[(1/n)_{n\in\mathbb{N}}]$, $[(n)_{n\in\mathbb{N}}]$ *et* $[(-n)_{n\in\mathbb{N}}]$...

Exercice 2. Graphe aléatoire.
Soit le langage $\mathcal{L} = \{R\}$ où R est une relation binaire. On définit un **graphe** comme une $\mathcal{L}$-structure où l'interprétation de R est symétrique et irréflexive.

1. Donner un $\mathcal{L}$-énoncé dont les modèles sont les graphes.
2. On dit qu'un graphe G satisfait la **propriété d'extension** si pour tous $E, F \subseteq G$ finis disjoints, il existe $x \in G$ tel que pour tous $y \in E$ et tous $z \in F$, on ait xRy et $x \not R z$. Donner une théorie T_{gal} dont les modèles forment l'ensemble des graphes avec la propriété d'extension.
3. On admet que T_{gal} est consistante (cf. question 7). Montrer que T_{gal} a un modèle dénombrable.
4. Montrer que si H est un graphe dénombrable et G est un modèle de T_{gal}, alors H se plonge dans G.
5. Montrer que tous les modèles dénombrables de T_{gal} sont isomorphes. L'unique modèle de T_{gal} à isomorphisme près s'appelle le *graphe aléatoire*.
6. En déduire que T_{gal} est complète.
7. (Questions bonus) On va montrer de deux manières différentes (probabiliste puis topologique) que T_{gal} admet un modèle dénombrable, et est donc consistante.
   (a) On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des paires d'entiers (que l'on voit comme l'ensemble des arêtes du graphe complet dénombrable). On munit $\{0,1\}^{\mathcal{E}}$ de la mesure produit $\mu := \prod_{e\in E}(1/2(\delta_0 + \delta_1))$. Étant donné $\alpha = (\alpha_e)_{e\in E} \in \{0,1\}^{\mathcal{E}}$, on définit une relation de graphe R_α sur $\mathbb{N}$ en posant $(x, y) \in R_\alpha$ ssi $\alpha_{\{x,y\}} = 1$.
      i. Montrer qu'étant donnés $E, F \subseteq \mathbb{N}$ finis disjoints, l'ensemble des $\alpha \in \{0,1\}^{\mathcal{E}}$ tels que (il existe $x \in \mathbb{N}$ satisfaisant : pour tout $y \in E$ et tous $z \in F$, on ait $xR_\alpha y$ et $x \not R_\alpha z$) est de mesure 1.
      ii. En déduire l'existence du graphe aléatoire.
      iii. Que se passe-t-il si pour $p \in]0, 1[$ on remplace μ par $\mu_p := \prod_{e\in E}(p\delta_0 + (1-p)\delta_1)$?
   (b) On considère l'ensemble $\mathcal{R} := \{R \subseteq \mathbb{N}^2 : R$ est réflexive et antisymétrique$\} \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$.

i. Montrer que $\mathcal{R}$ est compact pour la topologie induite.

ii. Montrer qu'étant donnés $E, F \subseteq \mathbb{N}$ finis disjoints, l'ensemble des $R \in \mathcal{R}$ tels que (il existe $x \in \mathbb{N}$ satisfaisant : pour tout $y \in E$ et tous $z \in F$, on ait xRy et $x\not{R}z$) est ouvert.

iii. Le théorème de Baire dit que dans un ensemble compact toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense (donc en particulier non vide). Déduire du théorème de Baire l'existence du graphe aléatoire.