TD2 - Équipotence, dénombrabilité

François Le Maître - *f.lemaitre@math.univ-paris-diderot.fr*

Exercice 1. Échauffement.
Soient E, F et G des ensembles. En exhibant des bijections naturelles, montrer que :

1. $\{0,1\}^E \approx \mathcal{P}(E)$;
2. $(E \times F)^G \approx E^G \times F^G$;
3. $E^{(F\times G)} \approx \left(E^F\right)^G$;
4. (en supposant que F et G sont disjoints) $E^{(F\cup G)} \approx E^F \times E^G$.

Exercice 2. Des ensembles de suites entières.
On définit les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} S_1 &= \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \exists m \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\; n \geqslant m \Rightarrow f(n) = 0\} \\ S_2^M &= \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}\, f(n) < M\} \qquad \text{où } M \in \mathbb{N} \\ S_3^M &= S_1 \cap S_2^M \end{aligned}$$

1. Décrire ce que représentent les ensembles ci-dessus.
2. Ces ensembles sont-ils finis ? dénombrables ? non dénombrables ?

Exercice 3. Retour sur les ordres. Va-et-vient.

1. Montrer que tout ensemble totalement ordonné dénombrable se plonge dans $(\mathbb{Q}, <)$.
2. Montrer qu'un bon ordre se plongeant dans $(\mathbb{R}, <)$ se plonge en fait dans $(\mathbb{Q}, <)$. Conclure qu'un bon ordre se plonge dans $(\mathbb{R}, <)$ si et seulement si il est dénombrable.
3. Montrer que tout ensemble dénombrable totalement ordonné $(X, <)$ dense et sans maximum ni minimum est isomorphe à $(\mathbb{Q}, <)$. La méthode de cette preuve est fondamentale et s'appelle le va-et-vient (son nom est une indication !).

Exercice 4. Des ensembles plus gros.

1. Soit $\mathcal{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Montrer que $\mathcal{S} \approx \mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \approx \overline{2}^{\mathbb{R}}$.
3. Déterminer le cardinal de l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$, puis de l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$.
4. Soit $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$.
5. (Plus difficile.) Soit $\mathrm{Mon}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions monotones de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Mon}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$. [*Indication* : Montrer d'abord que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, alors l'ensemble $\{a \in \mathbb{R} \mid \sup_{x<a} f(x) < \inf_{x>a} f(x)\}$ est dénombrable ou fini.]