TD3 - Autour de l'axiome du choix

François Le Maître - *f.lemaitre@math.univ-paris-diderot.fr*

Exercice 1. Preuve du lemme de Zorn.
On se propose de prouver le lemme de Zorn à partir de l'axiome du choix. On va montrer une version plus forte du lemme de Zorn que voici.
Soit $(X, \leqslant)$ un ensemble ordonné dont tout sous-ensemble bien ordonné admet un majorant. Alors X admet un élément maximal.

1. Vérifier que l'énoncé ci-dessus implique le lemme de Zorn usuel.
2. On va raisonner par l'absurde : prenons $(X, \leqslant)$ ordonné dont tout sous-ensemble bien ordonné admet un majorant, et supposons que X n'admette pas d'élément maximal. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des sous-ensembles bien ordonnés de X. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathcal{C} \to X$ telle que pour tout $Y \in \mathcal{C}$, $g(Y)$ est un majorant strict de Y.
3. On fixe une fonction $g : \mathcal{C} \to X$ telle que pour tout $Y \in \mathcal{C}$, $g(Y)$ est un majorant strict de Y. Un sous-ensemble $Y \subseteq X$ bien ordonné est appelé une g-chaîne si pour tout $y \in Y$, on a $y = g(\{x \in Y : x < y\})$.
   (a) Montrer que si Y_1 et Y_2 sont deux g-chaînes, alors Y_1 est un segment initial [1] de Y_2 ou Y_2 est un segment initial de Y_1. On pourra considérer la réunion des parties qui sont à la fois des segments initiaux de Y_1 et de Y_2.
   (b) Montrer que la réunion des g-chaînes est une g-chaîne.
   (c) Conclure.

Exercice 2. Quelques conséquences de l'axiome du choix.
Dans cet exercice, on admet l'axiome du choix.

1. Rappeler pourquoi tout espace vectoriel admet une base.
2. Montrer que tout groupe non-abélien G contient un sous-groupe maximal abélien (c'est-à-dire un sous-groupe abélien A qui n'est contenu strictement dans aucun sous-groupe abélien de G).
3. Montrer que si G est un groupe finiment engendré alors tout sous-groupe propre de G est contenu dans un sous-groupe propre maximal de G.
4. Soit R un anneau commutatif unitaire et $I \subseteq R$ un idéal (propre) de R. Montrer que I est contenu dans un idéal maximal (propre) de R.

Exercice 3. Calculs de cardinalité.
On admet l'axiome du choix.

1. Montrer que si X est infini, alors l'ensemble des parties finies de X a la même cardinalité que X.
2. Soit K un corps et X un ensemble infini. Déduire de la question précédente le cardinal de l'espace vectoriel $K^{\bigoplus X}$ des fonctions $f : X \to K$ telles qu'il existe $F \subseteq X$ fini vérifiant pour tout $x \notin F$, $f(x) = 0$.
3. Montrer que si K est un corps dénombrable, deux K-espaces vectoriels de dimension infinie sont isomorphes si et seulement si ils ont la même cardinalité.

Exercice 4. Morphismes de groupes et axiome du choix.
Soit G un groupe tel que pour tout $g \in G$, $g^2 = 1_G$.

1. Montrer que G est abélien.

1. On dira que $A \subseteq Y_1$ est un segment initial de Y_1 si pour tout $a \in A$ et tout $y \in Y_1$, on a $y < a \Rightarrow y \in A$.

2. On admet l'axiome du choix. Montrer que pour tout $g \in G \setminus \{1_G\}$ il existe un morphisme $\pi : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ tel que $\pi(g) = \bar{1}$ (en particulier π est surjectif).

Exercice 5. Lemme de maximalité de Hausdorff.
Le lemme de maximalité de Hausdorff dit que tout ordre partiel admet une chaîne maximale (un sous-ensemble totalement ordonné maximal). Montrer que le lemme de maximalité de Hausdorff est équivalent à l'axiome du choix.

Exercice 6. Choix dénombrable et ensembles infinis.
On appelle axiome du choix dénombrable l'énoncé suivant : tout produit dénombrable d'ensembles non vides est non vide. Il est évidemment plus faible que l'axiome du choix et est peu remis en cause du fait de son importance en analyse. On se propose de voir une de ses conséquences importantes.
Dans cet exercice, on dit qu'un ensemble est **infini** s'il n'est équipotent à aucun ensemble de la forme $\{0, ..., n-1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'un ensemble X est **réflexif** s'il existe $Y \subsetneq X$ tel que X soit subpotent à Y.

1. Vérifier que $\mathbb{N}$ est réflexif.
2. Montrer que tout ensemble réflexif est infini.
3. Montrer que X est réflexif ssi pour tout $x \in X$, l'ensemble X est équipotent à $X \setminus \{x\}$.
4. Soit X un ensemble réflexif, montrer que si X est subpotent à Y alors Y est réflexif.
5. Soit X un ensemble infini.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des injections de $\{0, ..., n-1\}$ dans X est non-vide.
   (b) En utilisant l'axiome du choix dénombrable, construire une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $|A_n| = 2^n$.
   (c) En déduire l'existence d'une famille dénombrable disjointe de sous-ensembles non vides de X.
   (d) En utilisant une nouvelle fois l'axiome du choix dénombrable, conclure que $\mathbb{N}$ est subpotent à X, et donc que X est réflexif.

On a donc établi sous l'axiome du choix dénombrable l'équivalence entre trois définitions naturelles d'ensemble infini : ne pas être fini, être subpotent à un sous-ensemble strict, et enfin contenir une copie des entiers naturels. Cependant, on sait que ces équivalences constituent un axiome plus faible que l'axiome du choix dénombrable.

Exercice 7. Choix dépendant et arbres infinis.
On appelle axiome du choix dépendant l'énoncé suivant : pour toute relation R sur un ensemble X telle que pour tout $x \in X$, il existe $y \in X$ avec $(x, y) \in R$, alors pour tout $x_0 \in X$ on peut trouver une suite (y_n) telle que $y_0 = x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(y_n, y_{n+1}) \in R$.

1. Montrer que l'axiome du choix implique l'axiome du choix dépendant.
2. Montrer que l'axiome du choix dépendant implique l'axiome du choix dénombrable.
3. Soit A un ensemble. Un arbre sur A est un ensemble de mots sur A stable par préfixe. Un arbre T sur A est équeuté si pour tout $s \in T$ il existe $t \in T$ tel que s est un préfixe strict de t. Une branche de T est une suite (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, ..., a_n) \in T$.
   (a) Montrer que l'axiome du choix dépendant implique que tout arbre équeuté non vide a une branche.
   (b) Quid de la réciproque ?