Exercices d'analyse — suites, séries, fonctions

A. CHAMBERT-LOIR

A. SUITES ET SÉRIES

EXERCICE 1

Soit (x_n) une suite de nombres complexes. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$.

1 On suppose que (x_n) converge vers un nombre complexe ℓ ; démontrer que y_n converge vers ℓ.

2 On suppose que les x_n sont réels. Démontrer que

$$\underline{\lim}\, x_n \leqslant \underline{\lim}\, y_n \leqslant \overline{\lim}\, y_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n.$$

3 Donner un exemple où la suite (y_n) converge mais où la suite (x_n) ne converge pas.

4 (Variante) On pose $z_n = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_k$. Si la suite (x_n) converge vers ℓ, démontrer qu'il en est de même de la suite (z_n). Analogues pour les limites inférieure et supérieure.

5 (Variante) On suppose les x_n strictement positifs, on pose $c_n = (x_n)^{1/n}$ et $d_n = x_{n+1}/x_n$. Démontrer que $\underline{\lim}\, d_n \leqslant \underline{\lim}\, c_n \leqslant \overline{\lim}\, c_n \leqslant \overline{\lim}\, d_n$. Application : comparaison des critères de D'Alembert et de Cauchy sur le rayon de convergence d'une série entière $\sum u_n z^n$.

EXERCICE 2

Soit (x_n) une suite de nombre réels telle que $x_{n+1} - x_n \to 0$.

1 Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un segment non vide de $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$.

2 Soit $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application continue. On suppose que $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout n. Démontrer que la suite (x_n) converge.

EXERCICE 3

1 Soit (x_n) une suite de nombres réels telle que $x_{m+n} \leqslant x_m + x_n$ pour tout couple (m,n). On pose $\ell = \inf_{n\geqslant 1}(x_n/n)$. Démontrer que la suite (x_n/n) converge vers ℓ.

2 Soit E un espace vectoriel normé et u un endomorphisme continu de E. On note $\|\cdot\|$ la norme sur E et la norme d'opérateur sur $\mathrm{End}(E)$. Démontrer que la suite $(\|u^n\|^{1/n})$ converge. Lorsque E est de dimension finie, calculer sa limite en fonction des valeurs propres de u.

EXERCICE 4

Soit (x_n) une suite telle que $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$ pour $n \geqslant 0$.

1 Démontrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ possède un unique point fixe, a, dans $\mathbf{R}_+$. Calculer a.

2 Démontrer que la suite (x_n) est monotone et convege vers a.

3 On suppose $x_0 \neq a$; démontrer que $\dfrac{x_{n+1}-a}{x_n - a}$ converge vers $1/2\sqrt{1+a}$. En déduire que la suite de terme général $-\frac{1}{n}\log|x_n - a|$ converge vers $\log(2\sqrt{1+a})$.

EXERCICE 5

Soit a un nombre réel strictement positif; on définit une suite (x_n) par récurrence en posant $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ pour $n \geqslant 0$.

1 Quelles sont les éventuelles limites de la suite (x_n) ?

2 Démontrer que la suite de terme général $\left|x_n - \sqrt{a}\right|$ est strictement décroissante.

3 Démontrer que les suites de terme général respectivement x_{2n} et x_{2n+1} sont adjacentes.

4 On pose $y_n = -\log\left|x_n - \sqrt{a}\right|$. Démontrer que la suite de terme général $y_{n+1} - 2y_n$ converge. En déduire que la suite de terme général $y_n/2^n$ converge.

EXERCICE 6

Soit (x_n) une suite de nombres réels telle que $x_{n+1} = \sin(x_n)$ pour tout entier n et $0 < x_0 < \pi$.

1 Démontrer que $0 < \sin(x) < x$ pour tout $x \in]0,\pi[$.

2 Démontrer que la suite (x_n) est strictement décroissante et tend vers 0.

3 Calculer

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}.$$

4 Démontrer que la suite (nx_n^2) converge vers 3.

EXERCICE 7

Soit (x_n) une suite de nombres réels telle que $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = x_n/(1+x_n^2)$.

1 Démontrer que $x_n > 0$ pour tout n.

2 Démontrer que la suite (x_n) est strictement décroissante et converge vers 0.

3 Démontrer qu'il existe un unique nombre réel a tel que $x_{n+1}^a - x_n^a$ ait une limite finie non nulle lorsque $n \to +\infty$.

4 En déduire un équivalent de x_n lorsque $n \to +\infty$.

EXERCICE 8

Soit (x_n) une suite de nombres complexes; pour tout n, on pose $y_n = x_n + 2x_{n+1}$.

1 Pour tout n, calculer x_n en fonction des termes de la suite (y_n) et de x_0.

2 On suppose que la suite (y_n) converge; démontrer que la suite (x_n) converge et calculer sa limite.

EXERCICE 9

Soit $f\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ une application monotone; on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ pour tout $x \geqslant 0$. On pose aussi $S_n = \sum_{p=1}^{n} f(p)$.

1 On suppose que $F(x)$ a une limite finie quand $x \to +\infty$. Démontrer que la suite (S_n) converge.

2 On suppose que $F(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$; démontrer que $S_n \sim F(n)$.

3 Expliquer comment l'introduction de la fonction g définie par $g(x) = f(x) - \int_x^{x+1} f(t)\,dt$ peut améliorer l'équivalent précédent.

4 En appliquant la méthode précédente à la fonction donnée par $x \mapsto \log(x)$, démontrer que la suite de terme général $\log(n!) - (n+\frac{1}{2})\log(n) + n$ converge.

5 En déduire qu'il existe un nombre réel $C > 0$ tel que $n! \sim Cn^n e^{-n}\sqrt{n}$ (*formule de Stirling*). (L'exercice 10 sur les intégrales de Wallis, $\int_0^\pi \sin(x)^n\,dx$, permet de démontrer que $C = \sqrt{2\pi}$.)

EXERCICE 10

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n\,dx$ (*intégrales de Wallis*).

1 Démontrer que l'on a $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} I_{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

2 En déduire que

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

3 En observant que $I_{2n+1} \leqslant I_{2n} \leqslant I_{2n-1}$, démontrer que $4nI_{2n}I_{2n-1} \to \pi$ quand $n \to +\infty$.

4 On rappelle (exercice 9) qu'il existe un nombre réel $C > 0$ tel que $n! \sim Cn^n e^{-n}\sqrt{n}$. Démontrer que $C = \sqrt{2\pi}$.

B. FONCTIONS

EXERCICE 11

Soit $I =]a;b[$ un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ (éventuellement non borné) et soit $f\colon I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable.

1 On suppose que f a des limites finies en a et b, et qu'elles sont égales. Démontrer que f est bornée et qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(c) = \sup f$ ou $f(c) = \inf f$. Démontrer que $f'(c) = 0$. (*Rolle « à l'infini »*)

2 On suppose que $\lim\limits_a f' < 0$ et $\lim\limits_b f' > 0$. Démontrer que f est minorée et qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

3 Démontrer qu'une fonction dérivée vérifie le théorème des fonctions intermédiaires. (*Théorème de Darboux*)

4 Soit f la fonction $x \mapsto x^2\sin(1/x)$. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ mais que f' n'est pas continue.

EXERCICE 12

Soit $a_1,\dots,a_n$ des nombres réels deux à deux distincts, soit $P_1,\dots,P_n$ des polynômes de degrés $d_1,\dots,d_n$, et soit $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} P_k(x)\exp(a_k x)$.

Démontrer par récurrence sur $n+\sum d_k$ que f a au plus $(\sum d_k)$ zéros dans $\mathbf{R}$. (Se ramener au cas où $a_n = 0$ et appliquer le théorème de Rolle.)

EXERCICE 13

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ sur $[a;b]$ et $\mathscr{D}^n$ sur $]a,b[$.

1 On suppose que f possède $n+1$ zéros dans $[a,b]$. Démontrer que $f^{(n)}$ s'annule.

2 Soit $(a_1,\dots,a_n)$ des nombres réels distincts appartenant à $[a,b]$ tels que $f(a_i) = 0$ pour tout i. Soit $t \in [a,b]$ un nombre réel distinct des a_i et soit $A = f(t)/\prod\limits_{i=1}^{n}(t-a_i)$. En considérant la fonction g donnée par $g(x) = f(x) - A\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)$, démontrer qu'il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$f(t) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)\prod_{i=1}^{n}(t-a_i).$$

3 Soit P le polynôme d'interpolation de Lagrange pour f aux points a_i ; démontrer que $\|P-f\|_\infty \leqslant (b-a)^n M_n/n!$, où $M_n = \sup\limits_{t\in]a,b[}\left|f^{(n)}(t)\right|$.

EXERCICE 14

Soit p un entier $\geqslant 1$. et soit $f\colon \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^p$ telle que $f^{(p)}(x)$ a une limite finie quand $x\to 0$ (en restant >0).

1 On suppose $p=1$. Démontrer qu'il existe une unique fonction continue F sur $\mathbf{R}_+$ qui coïncide avec f sur $\mathbf{R}_+^*$. Prouver que F est de classe $\mathscr{C}^1$.

2 Démontrer qu'il existe une unique fonction continue F sur $\mathbf{R}_+$ qui coïncide avec f sur $\mathbf{R}_+^*$, et que F est de classe $\mathscr{C}^p$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ définie par $f(x)=0$ si $x\leqslant 0$ et $f(x) = e^{-1/x}$ si $x>0$.

3 Démontrer que la restriction de f à $\mathbf{R}^*$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

4 Démontrer qu'il existe pour tout entier n un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-1/x}/x^{2n}$ pour tout $x>0$.

5 Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

EXERCICE 15

Soit p un entier $\geqslant 1$ et soit $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^p$ telle que $f(0)=0$. On pose $g(x) = f(x)/x$ pour $x\neq 0$ et $g(0) = f'(0)$.

1 Démontrer que g est continue sur $\mathbf{R}$.

2 Démontrer que g est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\mathbf{R}^*$ et que l'on a la formule, pour $x\neq 0$ et $m\leqslant p$,

$$g^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!}(-1)^{m-p}\frac{f^{(p)}(x)}{x^{m-p+1}}.$$

3 En appliquant la formule de Taylor entre x et 0, démontrer que $g^{(m)}(x) \to \frac{1}{m+1}(-1)^m f^{(m+1)}(0)$ quand $x \to 0$.

4 En déduire que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^{p-1}$ sur $\mathbf{R}$.

5 Démontrer que $g(x) = \int_0^1 f'(xt)\,dt$, pour tout $x \in \mathbf{R}$. En déduire une autre démonstration de la question précédente.

EXERCICE 16

Soit f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $f(t) = e^{-t^2}$.

1 Démontrer qu'il existe, pour tout entier n, un unique polynôme P_n tel que $f^{(n)}(t) = P_n(t)e^{-t^2}$.

2 Démontrer que $\deg(P_n) = n$. Prouver aussi que P_n est de la même parité que n.

3 En dérivant de deux façons la relation $f' = -2tf$, démontrer que $P_{n+1} + 2tP_n + 2nP_{n-1} = 0$ et $P_n'' - 2tP_n' + 2nP_n = 0$.

4 Démontrer que P_n est scindé sur $\mathbf{R}$.

EXERCICE 17

1 Soit $f\colon \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(t) = e^{-t}/t$.

2 Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$. et qu'il existe une unique suite (P_n) de polynômes telle que $f^{(n)}(t) = P_n(t)e^{-t}/t^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{R}^*$.

3 Démontrer que

$$P_{n+1}(t) + (t+n+1)P_n(t) + ntP_{n-1}(t) = 0.$$

4 Démontrer que P_n est scindé sur $\mathbf{R}$ et que ses racines sont toutes strictement négatives.

EXERCICE 18

Soit p un entier naturel et soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^p$. Pour tout k, on pose $M_k = \sup\left|f^{(k)}\right|$.

1 On suppose que $p \geqslant 2$ et que f et f'' sont bornées. En écrivant la formule de Taylor à l'ordre 2 pour $f(x+h)$ et $f(x-h)$, démontrer que f' est bornée et que $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$. Trouver une fonction f pour laquelle la constante 2 est optimale.

2 On suppose de plus que f est positive ; déduire de la question précédente que $M_1 \leqslant \sqrt{M_0M_2/2}$.

3 On suppose que f et $f^{(p)}$ sont bornées. Démontrer que pour tout entier $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, $f^{(k)}$ est bornée et que

$$M_k \leqslant 2^{k(p-k)/2} M_0^{1-k/p} M_p^{k/p}.$$

EXERCICE 19

Soit F une fonction continue de $\mathbf{R}+$ dans $\mathbf{R}$ telle que l'intégrale impropre $\int_0^\infty F(x)\,dx$ converge.

1 Démontrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \geqslant x$ tel que $\left|F(y)\right| \leqslant \varepsilon$. Donner un exemple où $F(x)$ ne tend pas vers 0 quand $x \to +\infty$.

2 On suppose de plus que F est de classe $\mathscr{C}^1$. Démontrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \geqslant x$ tel que $\left|F'(y)\right| \leqslant \varepsilon$.

3 Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ et $f'' \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$. Démontrer que $f' \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ et que $\left\|f'\right\|_2^2 \leqslant \left\|f\right\|_2 \left\|f''\right\|_2$.

EXERCICE 20

Pour toute application continue $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$, on définit une application T_nf de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ par $T_nf(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x+k}{n}\right)$.

1 Démontrer que $\left\|T_nf\right\|_\infty \leqslant \left\|f\right\|_\infty$.

2 Démontrer que la suite $(T_nf(x))$ converge vers $\int_0^1 f(t)\,dt$. (La convergence est même uniforme en x.)

3 Démontrer qu'il existe une application continue $f\colon$ $[0,1] \to \mathbf{R}$ telle que pour $x \in]0,1[$, on ait $f(x) = \cot(\pi x) - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1-x}$.

4 Démontrer que pour tout nombre réel $x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$, on a

$$\pi\cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$