ANALYSE

Fonctions analytiques, fonctions holomorphes

A. CHAMBERT-LOIR

EXERCICE 1

Soit (a_n) une suite décroissante de nombre réels positifs, de limite nulle et telle que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$. On considère la série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

1 Démontrer que $\rho(f) = 1$.

2 Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. En appliquant une sommation d'Abel à la somme $\sum_{k=m}^{n} a_k z^k$, démontrer que $f(z)$ converge.

EXERCICE 2

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière ; on suppose que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

1 Soit $\alpha \in]0;\pi/2[$. Soit S l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ tels que $|z| \leqslant 1$ et $\arg(1-z) \leqslant \alpha$. En appliquant une sommation d'Abel à $\sum_{k=m}^{n} a_k z^k$, démontrer que la série $f(z)$ converge uniformément dans S.

2 En déduire que

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in S}} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

3 On considère le cas particulier

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} z^n.$$

Démontrer que $f(r) = \arctan(r\sin(t)/(1-r\cos(t)))$ pour $r \in [0;1[$. En déduire que pour $t \in]0;2\pi[$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} = \frac{\pi - t}{2}.$$

EXERCICE 3

Soit $z \in \mathbf{C}$.

1 Prouver les inégalités :

$$\left|e^z - 1\right| \leqslant e^{|z|} - 1 \leqslant |z|\, e^{|z|}.$$

2 Vérifier

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = 1 + z + \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{p-1}{n}\right) z^p.$$

3 Démontrer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

EXERCICE 4

Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité ouvert D tel que $\left|f(z)\right| < 1$ pour tout $z \in D$. On suppose que $f(0) = 0$.

1 En appliquant le principe du maximum à la fonction (holomorphe) donnée par $f(z)/z$, démontrer que $\left|f(z)\right| \leqslant |z|$ pour tout $z \in D$.

2 En déduire que $\left|f'(0)\right| \leqslant 1$.

3 On suppose qu'il existe $z \in D$ tel que $\left|f(z)\right| = z$ (ou bien que $\left|f'(0)\right| = 1$). Démontrer qu'alors $f(z) = zf'(0)$.

EXERCICE 5

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $H = \mathscr{H}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ muni de la norme induite par celle de $L^2(\Omega)$.

1 Soit f une fonction holomorphe sur un disque $D(a,r)$. Démontrer l'inégalité

$$\pi r^2 \left|f(a)\right|^2 \leqslant \int_{D(a,r)} \left|f(z)\right|^2 \,dx\,dy.$$

2 Soit K une partie compacte de Ω. Démontrer l'inégalité

$$\sup_{z\in K}\left|f(z)\right| \leqslant \frac{1}{d(K,\complement\Omega)\sqrt{\pi}}\,\|f\|.$$

3 Démontrer que H est sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$.

EXERCICE 6

Soit φ une fonction holomorphe dans la bande définie par $A < \Re(z) < B$. Pour tout $x \in \,]A;B[$, on pose $M(x) = \sup_{y\in\mathbf{R}}\left|\varphi(x+iy)\right|$. Soit a, b tels que $A < a \leqslant b < B$.

1 On suppose que $M(a) = M(b)$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\varphi_\varepsilon(z) = \varphi(z)/(1+\varepsilon(z-A))$ et on définit $M_\varepsilon(x)$ de manière analogue à $M(x)$. En appliquant le principe du maximum, démontrer que $M_\varepsilon(x) \leqslant M(a)$ pour tout $x \in [a,b]$. En déduire que $M(x) \leqslant M(a)$ pour tout $x \in [a,b]$.

2 On introduisant une fonction ψ de la forme $\psi(z) = \varphi(z)\exp(\lambda z)$, démontrer les inégalités

$$M(x) \leqslant M(a)^{(b-x)/(b-a)} M(b)^{(x-a)/(b-a)}$$

pour tout $x \in [a;b]$.

3 On considère une fonction holomorphe f sur une couronne définie par $R_1 < |z| < R_2$. Pour tout $r \in \,]R_1;R_2[$, on pose $M(r) = \sup_{|z|=r}\left|f(z)\right|$. On considérant la fonction φ définie par $\varphi(z) = f(e^z)$, démontrer les inégalités

$$\log(b/a)\log(M(r)) \leqslant \log(b/r)\log(M(a)) + \log(r/a)\log(M(b)),$$

pour tous nombres réels a, b, r tels que $R_1 < a \leqslant r \leqslant b < R_2$.

EXERCICE 7

Soit $a \in \mathbf{C}$ tel que $|a| > 1$. On pose $f(z) = 1/(z^2 + 2az + 1)$.

1 Quels sont les pôles de f ? Calculer leurs résidus.

2 En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos(\theta)}\, d\theta.$$

EXERCICE 8

Soit $f \in \mathbf{C}(z)$ une fraction rationnelle de degré $\leqslant -2$. On suppose que f n'a pas de pôle sur $\mathbf{R}$.

1 Démontrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ converge.

2 Pour $R \in \mathbf{R}_+$, soit C_R le demi-cercle paramétré par $t \mapsto Re^{it}$ pour $t \in [0;\pi]$. Démontrer que $\int_{C_R} f(z)\, dz$ converge vers 0 quand $R \to +\infty$.

3 Soit γ_R le lacet juxtaposition du segment $[-R;R]$ et du demi-cercle C_R. En appliquant le théorème des résidus à l'intégrale $\int_{\gamma_R} f(z)\, dz$, démontrer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{a \text{ pôle de } f \\ \Im(a)>0}} \mathrm{Res}_a(f).$$

4 Applications : $f(z) = 1/(1+z^2)$, $f(z) = 1/(1+z^2)^2$.

EXERCICE 9

On reprend les notations de l'exercice 9 et l'on pose $g(z) = f(z)e^{imz}$, où m est un nombre réel strictement positif.

1 En utilisant la minoration $\sin(t) \geqslant 2t/\pi$, démontrer que les intégrales

$$\int_{C_R} R\left|Re^{it}\right|\, dt$$

sont bornées quand $R \to +\infty$ (*inégalité de Jordan*).

2 Démontrer que l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx}\, dx = \sum_{\substack{a \text{ pôle de } f \\ \Im(a)>0}} \mathrm{Res}_a(g(z)).$$

3 Application : $f(x) = 1/(x^2 + a^2)$, pour $a \in \mathbf{C}$ tel que $a^2 \neq\in \mathbf{R}_-$.

EXERCICE 10

Soit $f(z)$ une fraction rationnelle de degré $\leqslant -2$.

1 Démontrer que la fonction g donnée par $g(z) = \pi \operatorname{cotan}(\pi z) f(z)$ est méromorphe, et que ses pôles sont contenues dans la réunion de $\mathbf{Z}$ et de l'ensemble fini des pôles de f. Pour $a \in \mathbf{Z}$ qui n'est pas pôle de f, calculer $\mathrm{Res}_a(g)$.

2 Soit N un entier et soit C_N le carré de centre 0 et de côté $2N+1$. Quand $N \to +\infty$, démontrer que $\operatorname{cotan}(\pi z)$ est uniformément borné sur C_N.

3 Démontrer l'égalité

$$\sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}\\ n \text{ non pôle de } f}} f(n) = -\sum_{a \text{ pôle de } f} \operatorname{Res}_a(\pi \operatorname{cotan}(\pi z) f(z)).$$

4 Applications : $f(z) = 1/z^2$, $f(z) = 1/(z^2+a^2)$ pour $a > 0$;

5 Justifier l'existence d'un développement en série entière

$$z\frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

où les b_n sont des nombres rationnels, nuls pour n impair. Prouver que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{1}{2} b_{2k} \pi^{2k}.$$

EXERCICE 11

1 Démontrer que la série

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}\right)$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}\setminus\mathbf{Z}$ et que sa somme définit une fonction holomorphe f sur $\mathbf{C}\setminus\mathbf{Z}$.

2 Démontrer que f est méromorphe sur $\mathbf{C}$. Calculer ses résidus.

3 Démontrer que la fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ donnée par $g(z) = f(z) - \pi \operatorname{cotan}(\pi z)$ est en fait holomorphe, 1-périodique, et nulle sur $\mathbf{Z}$.

4 Démontrer que g' est bornée.

5 En déduire que g est bornée puis que $g = 0$.