MODÉLISATION — ALGÈBRE ET CALCUL FORMEL

Algèbre linéaire

A. CHAMBERT-LOIR

1 Explorer le logiciel de calcul formel et apprendre à manipuler matrices et vecteurs. Apprendre à les définir :

a) De façon explicite, par exemple un vecteur colonne $v = (1,2,3,4)$;

b) De façon implicite, par exemple la matrice carrée de taille n et de coefficients $(1/(i+j-1))$;

c) À coefficients aléatoires, pour diverses lois (uniforme dans $[-1;1]$, gaussienne, uniforme dans $\mathbf{Z}\cap[-N;N]$, uniforme dans un corps fini,...) ;

d) Génériques, c'est-à-dire une matrice $(T_{i,j})$ de taille donnée dont les entrées soient des indéterminées.

2 Comment choisir l'anneau des coefficients d'une matrice lors de sa définition ? Comment le modifier après coup ?

3 Apprendre à calculer produits de matrices (de tailles diverses), transpositions, inverses,...

4 Explorer le logiciel de calcul formel pour calculer le déterminant d'une matrice carrée. Quels sont les procédés utilisés ? Quelle est leur complexité ? Expérimenter le temps de calcul (que l'on peut mesurer avec les commandes *time* sous xCas ou *%time* sous Sage), notamment suivant l'anneau de coefficients. On pourra prendre pour exemple des matrices à coefficients aléatoires, des matrices à coefficients génériques, de Vandermonde...

5 Une matrice $A = (a_{i,j})$ de taille $m \times n$ à coefficients dans un corps F est sous *forme échelonnée réduite* (suivant les lignes) si elle vérifie les propriétés suivantes :

(i) Le nombre de coefficients nuls en tête de chaque ligne est strictement croissant tant qu'il est au plus n ;

(ii) Le premier coefficient non nul d'une ligne est égal à 1 (*pivot*) ;

(iii) Dans la colonne d'un pivot, tous les autres coefficients sont nuls.

a) On suppose que la matrice A est sous forme échelonnée réduite. Observer que le système $AX = 0$ est entièrement résolu, de même que les systèmes obtenus en ajoutant les conditions $x_i = x_{i+1} = \cdots = x_n = 0$.

b) On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

à coefficients dans le corps $F = \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$. Par des opérations sur les lignes, la transformer en une matrice échelonnée réduite. On pourra faire les calculs à la main, ou bien s'aider du logiciel. Comparer le résultat obtenu avec votre voisin, avec la fonction du logiciel qui calcule une forme réduite échelonnée.

c) Démontrer que toute matrice $A \in \mathrm{M}_{m,n}(F)$ peut, par des opérations élémentaires sur les lignes, être transformée en une matrice échelonnée réduite A'.

d) Comparer les solutions des systèmes $AX = 0$ et $A'X = 0$ (pour $X \in F^n$). En déduire que A' est la seule matrice échelonnée réduite qui se déduise de A par opérations élémentaires sur les lignes.

e) Démontrer que le sous-espace de F^n engendré par les lignes de A coïncide avec le sous-espace engendré par les lignes de A'.

f) On s'intéresse à un système inhomogène $AX = b$, où $A \in \mathrm{M}_{m,n}(F)$ et $b \in F^m$, d'inconnue $X \in F^n$. Montrer comment le calcul d'une forme réduite échelonnée *partielle* de la matrice $(A \mid b)$ permet de résoudre ce système ou de décider qu'il n'a pas de solution, où par *partielle* on entend qu'on ne met pas de conditions sur la dernière colonne. Interpréter notamment le résultat si b est un vecteur « générique » de coefficients $(y_1, \dots, y_m)$ indéterminés.