M1 - THÉORIE DE L'INFORMATION - 2018-2019

TRAVAUX DIRIGÉS 1

Exercice 1. *(Fonction d'une variable aléatoire I)*

Geneviève se rend régulièrement à l'hippodrome, où se déroule une course entre huit chevaux. A la fin de la course, les gains de Geneviève dépendent de la performance du cheval sur lequel elle a misé: selon qu'il arrive en position $1, 2, 3, .., 8$, ses gains sont respectivement de $100, 50, 50, 0, -10, -50, -50, -100$ euros. On supposera toujours que tous les chevaux sont aussi bons les uns que les autres.

(1) On note X la variable aléatoire correspondant aux gains de Geneviève. Calculer l'espérance de ses gains $\mathbb{E}(X)$, ainsi que leur entropie $H_2(X)$.

Lassée de perdre de l'argent sur le long terme, Geneviève décide de monétiser sa passion en mettant en ligne des vidéos de réaction aux résultats des courses. Elle passe un contrat avec un network: ses gains sont désormais sécurisés et correspondent à *la valeur absolue* de ses gains initiaux (car le public l'apprécie tout autant quand elle s'énerve après avoir perdu).

(2) On note $Y = |X|$ la variable aléatoire correspondant aux nouveaux gains de Geneviève. Calculer la fonction de masse q correspondant à ces gains.
On rappelle qu'étant donné une fonction f, la fonction de masse d'une variable aléatoire image $f(X)$ est donnée par

$$\mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{\{x \in \mathcal{X} \ | \ f(x)=y\}} \mathbb{P}(X = x).$$

(3) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $H_2(Y)$. Que constate-t-on?

(4) Après chaque course, le montant des gains est transmis directement à la banque sous forme de code binaire. Les gains $(100, 50, 10, 0)$ sont codés en les mots $(00, 01, 10, 11)$. Quelle est la longueur moyenne du mot transmis?

(5) Voici un nouveau code: $(0, 10, 110, 111)$. Quelle est la longueur moyenne du mot transmis? Comparer avec le résultat de la question (3).

(6) *(Optionnel)* Essayer de trouver un autre code qui utilise une plus courte longueur moyenne.[1]

Exercice 2. *(Loi uniforme sur un ensemble fini)*

Soit X la variable aléatoire réelle qui suit une loi de probabilité uniforme sur un ensemble $\mathcal{X} = \{x_1, ..., x_n\}$ fini. Soit Y une autre variable aléatoire réelle sur $\mathcal{X}$, quelconque.

(1) Donner, pour tout $x \in \mathcal{X}$, la valeur de $p(x) = \mathbb{P}(X = x)$. En déduire la valeur de l'entropie $H(X)$.

(2) Soit $q : \mathcal{X} \to [0, 1]$ la fonction de masse de Y. Montrer que $D(q\|p) = H(X) - H(Y)$.

(3) Montrer que l'entropie que peut avoir une variable aléatoire sur $\mathcal{X}$ est toujours inférieure ou égale à $\log n$.

(4) Montrer que la loi uniforme est l'unique loi de probabilité maximisant cette entropie sur $\mathcal{X}$.

Exercice 3. *(Fonction d'une variable aléatoire II)*

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi de probabilité sur un ensemble $\mathcal{X} = \{x_1, ..., x_n, ...\}$ discret. On notera p sa fonction de masse. Soit $\mathcal{Y}$ un autre ensemble discret, $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ une fonction, et $Y := f(X)$ la variable aléatoire image de X par f.

(1) Montrer que $H(f(X)|X) = 0$, en utilisant la définition d'entropie conditionnelle.

(2) Montrer que $H(X, f(X)) = H(X)$.

---

[1] On pourra s'aider de `https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_du_codage_de_source`.

(3) En déduire que $H(X) \geq H(f(X))$.
(4) Montrer que $H(X|f(X)) = 0$ si et seulement si f est injective.
(5) En déduire que $H(X) = H(f(X))$ si et seulement si f est injective.
(6) Supposons que Z soit une variable aléatoire sur $\mathcal{Y}$ telle que $H(Z|X) = 0$. Montrer qu'il doit exister une fonction $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ telle que $Z = g(X)$.
Note: L'existence d'une telle fonction est équivalente à ce que pour tout $x \in \mathcal{X}$ tel que $p(x) > 0$, il existe un unique $y \in \mathcal{Y}$ vérifiant $\rho(x, y) = 0$; ici ρ désigne la fonction de masse de la loi conjointe (X, Y).

Exercice 4. *(Loi géométrique sur $\mathbb{N}$)*

On tire une pièce à pile ou face pendant plusieurs tours, et ce jusqu'à ce que l'on obtienne une face. On note X la variable aléatoire sur $\mathbb{N}$ qui désigne le numéro du tour au cours duquel on a obtenu une face. Pour des raisons pratiques, on considère que le premier tirage correspond au tour 0, le second tirage au tour 1, etc. On suppose que la pièce est déséquilibrée: la probabilité de tirer une face à chaque tour est de $\alpha \in]0, 1[$.

(1) Calculer $\mathbb{P}(X = 0), \mathbb{P}(X = 1), \mathbb{P}(X = 2)$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k)$.
(2) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$. *(On pourra utiliser la relation $\sum_{k \in \mathbb{N}} k\alpha^k = \frac{\alpha}{(1-\beta)^2}$.)*
(3) Montrer que $H(X) = -\log(p) - \frac{1-p}{p} \log(1 - p)$.
(4) Soit $h(\alpha)$ l'entropie de X lorsque la probabilité de tirer face est α. Montrer que h est décroissante sur $]0, 1[$.
(5) Calculer la limite de h lorsque α tend vers 0 et 1. Existe-t-il une loi d'entropie maximale sur $\mathbb{N}$? *(On pourra utiliser le fait que $\lim_{t \to 0} t \log t = 0$)*
(6) Soit Y une variable aléatoire sur $\mathbb{N}$, telle que $\mathbb{E}(Y) = m > 0$. On note p et q les fonctions de masse de X et Y, respectivement. Montrer que $H(X) - H(Y) = D(q\|p)$. *(comparer avec l'exercice 2)*
(7) Montrer que parmi toutes les lois sur $\mathbb{N}$ ayant pour espérance $m > 0$, la loi géométrique X avec $\alpha = \frac{1}{1+m}$ est l'unique loi maximisant l'entropie. Exprimer cette entropie maximale en fonction de m.