université PARIS DIDEROT PARIS 7

M1 - THÉORIE DE L'INFORMATION - 2018-2019

TRAVAUX DIRIGÉS 1 (SUITE)

Exercice 5. *(Mélanger accroit l'entropie)*
On considère X une v.a. sur un jeu de cartes $\mathcal{X} = \{1, \ldots, 52\}$. On considère également $\mathcal{S}_{52}$ le groupe des permutations sur $\mathcal{X}$, et S une variable aléatoire sur $\mathcal{S}_{52}$. On note $Y = SX$, la variable désignant un jeu de cartes qui à subi un mélange aléatoire. Montrer que $H(Y) \geq H(X)$.

Exercice 6.
Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On note X (resp. Y) la variable aléatoire correspondant au tirage de 5 boules dans l'urne avec replacement (resp. sans replacement). Laquelle de ces deux variables a la plus grande entropie? Justifier.

Exercice 7. *(Piocher et tirer I)*
On considère un sac contenant deux pièces lestées, que nous appellerons a et b. Chacune a une probabilité de faire face égale à p et q, respectivement ($p, q \in]0,1[$). On choisit uniformément au hasard une pièce dans le sac, et on la tire à pile ou face plusieurs fois. On note Y la v.a. sur $\{a, b\}$ désignant la pièce qui a été choisie, et X_n la v.a. sur {pile, face} désignant le résultat du n-ème tirage.

(1) Montrer que X_1 et X_2 sont identiquement distribuées, en calculant leur lois de probabilité.
(2) X_1 et X_2 sont-elles indépendantes? On donnera la réponse en fonction de p et q.
(3) Que vaut $I(X_1; X_2|Y)$?

Exercice 8. *(Somme de variables aléatoires)*
Soit X une v.a. sur $\mathcal{X} = \{x_1, ..., x_m\} \subset \mathbb{R}$ et Y une v.a. sur $\mathcal{Y} = \{y_1, ..., y_n\}$. Soit $Z = X + Y$.

(1) Vérifier que $H(Z) \leqslant H(X) + H(Y)$.
(2) Montrer que $H(Z|X) = H(Y|X)$.
(3) Si X et Y sont indépendantes, en déduire que $\max\{H(X); H(Y)\} \leqslant H(Z)$.
(4) Trouver un exemple pour lequel $\min\{H(X); H(Y)\} > H(Z)$.

Exercice 9.
On rappelle que $\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est une métrique sur $\mathcal{X}$ ssi pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{X}^3$:

i) $\rho(x, y) \geq 0$,
ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
iii) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$,
iv) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Étant données X et Y deux v.a. discrètes sur $\mathcal{X}$, on définit $\rho(X, Y) := H(X|Y) + H(Y|X)$.

(1) Montrer que ρ vérifie les propriétés i),ii) et iii).
(2) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur X et Y pour que $\rho(X, Y) = 0$. Est-ce une métrique?

Exercice 10.
Étant données deux v.a. X et Y identiquement distribuées, on pose $\rho(X; Y) = 1 - \frac{H(Y|X)}{H(X)}$.

(1) Montrer que $\rho(X; Y) = \frac{I(X;Y)}{H(X)}$. En déduire que ρ est symétrique.
(2) Montrer que $\rho(X; Y) \in [0, 1]$. A quoi correspondent les cas $\rho(X; Y) = 0, 1$?

Exercice 11.
Soit $\mathbf{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus stochastique sur un ensemble $\mathcal{X}$ fini (de taille $k \geq 1$). Montrer que le taux d'entropie supérieur $\overline{H}(\mathbf{X})$ est toujours inférieur ou égal à $\log k$. Cette borne est-elle optimale? Que se passe-t-il si on remplace $\mathcal{X}$ par $\mathbb{N}$?

Exercice 12. *(Chaine de Markov homogène à deux états I)*
Soit $\mathbf{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov homogène sur $\mathcal{X} = \{a, b\}$.
On note $p = \mathbb{P}(X_1 = a|X_0 = b)$ et $q = \mathbb{P}(X_1 = b|X_0 = a)$.

(1) Écrire P, la matrice de transition de cette chaine de Markov, et tracer son graphe.
(2) Montrer que l'unique distribution stationnaire de $H(\mathbf{X})$ est $\bar{\mu} = (\frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q})$.
(3) *Pour le reste de cet exercice, on suppose que X_0 suit la distribution μ.*
Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entropie $H(X_n)$ en fonction de p et q. On pourra utiliser la fonction $h(t) = -t\log(t) - (1-t)\log(1-t)$.
(4) Calculer le taux d'entropie $H(\mathbf{X})$.
(5) Quelles valeurs pour p et q maximisent le taux d'entropie?

Exercice 13. *(Piocher et tirer II)*
On reprend les notations et le contexte de l'exercice 7. On note $\mathbf{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le processus aléatoire correspondant au tirage de la pièce que l'on a piochée.

(1) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H(X_1, \ldots, X_n|Y)$.
(2) En déduire le taux d'entropie $H(\mathbf{X})$.
(3) Est-ce que $\mathbf{X}$ est une chaine de Markov homogène?

Exercice 14. *(Chaine de Markov homogène à deux états II)*
On reprend le même contexte que l'exercice précédent. On note $\mu_n = (u_n, v_n)$ la distribution que suit la variable X_n. Ici, on ne suppose pas que μ_0 est stationnaire, et on s'intéresse à la convergence de la suite μ_n.

(1) Exprimer μ_n en fonction de P et μ_0.
(2) $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite lorsque $(p, q) = (1, 1)$ ou $(0, 0)$? Justifier, et calculer cette limite le cas échéant.
(3) *On suppose à partir de maintenant que $p + q \in]0, 2[$.*
Calculer le spectre de P.
(4) Trouver une base de $\mathbb{R}^2$ composée de vecteurs propres de P, puis calculer P^n.
(5) En déduire la limite de μ_n lorsque $n \to +\infty$. Que constate-t-on?