Master MIC, 1re année *Année 2018/2019*

THÉORIE DE L'INFORMATION

Antoine Chambert-Loir / Guillaume Garrigos

Examen du Mardi 18 décembre 2018 (3 heures)

Les exercices sont présentés dans l'ordre du cours mais ils peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Aucune source d'information extérieure (document, notes de cours, appareil électronique) n'est autorisée.

EXERCICE 1

Un tricheur dispose d'un dé à 6 faces pipé qui sort 1 avec probabilité 2/3 et chacune des autres faces avec probabilité 1/15. Cependant, son dé pipé est dans un sac qui contient aussi deux dés équilibrés (chaque face sort avec probabilité 1/6). Ces trois dés sont apparemment indiscernables.

1 Notre tricheur prend un des trois dés au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi le dé pipé ? (On pourra noter P la variable aléatoire « le tricheur a choisi le dé pipé » à valeurs vrai/faux.)

2 Il lance le dé qu'il a pris et obtient 1. Conditionnellement à ce résultat, quelle est alors la probabilité qu'il ait choisi le dé pipé ? (On pourra introduire la variable aléatoire X qui donne la valeur du lancer du dé.)

3 Il relance ce dé et obtient de nouveau 1. Quelle est maintenant la probabilité qu'il ait choisi le dé pipé ? (On pourra introduire la variable aléatoire Y qui donne la valeur du deuxième lancer du dé et justifier que X et Y sont indépendantes conditionnellement à P.)

EXERCICE 2

On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes, à valeurs dans $\{-1; 0; 1\}$. On suppose que X est uniforme et que $\mathbf{P}(Y = -1) = \mathbf{P}(Y = 1) = p$, où $0 < p < 1/2$.

1 Calculer l'entropie de X, l'entropie de Y et l'information mutuelle $I(X, Y)$.

2 On pose $Z = X + Y$. Calculer la loi de Z. En déduire son entropie.

3 Calculer l'information mutuelle $I(X, Z)$.

EXERCICE 3

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans un alphabet $A = \{a, b, c, d\}$. Dans le tableau suivant, on indique la loi de X, ainsi que deux codes binaires sur cet alphabet.

X	p_X	code I	code II
a	0,4	1	1
b	0,3	01	10
c	0,2	001	100
d	0,1	0001	1000

Pour chacun de ces deux codes, répondez aux trois questions suivantes :

1 S'agit-il d'un code préfixe ? S'agit-il d'un code uniquement décodable ?

2 On considère les deux variables aléatoires (à valeurs vrai/faux) U = « X = a » et V = « le premier symbole du mot de code est 1 ». Quelle est leur information mutuelle $I(U, V)$?

3 Quelle est la longueur moyenne d'un mot de code ? Que dit le théorème de Shannon dans ce contexte ?

T.S.V.P.

4 Construire un code binaire optimal pour la variable aléatoire X. Quelle est la longueur moyenne d'un mot de code ?

EXERCICE 4

On considère un canal sans mémoire C sur les alphabets $A = B = \{0;1\}$ et pour lequel $p(1 \mid 0) = p(0 \mid 1) = p$, où $p \in [0;1/2[$.

1 Calculer la capacité $I(C)$ de ce canal. (On demande de faire les calculs, et non d'appliquer simplement un résultat du cours.)

Soit n un entier naturel. On considère un code $\Phi = (f_\Phi, g_\Phi)$ de longueur n sur l'ensemble $M = \{0;1\}$ adapté au canal C. On rappelle le schéma d'un tel code :

$$M \xrightarrow[\text{codage}]{f_\Phi} A^n \xrightarrow[\text{canal}]{C_n} B^n \xrightarrow[\text{décodage}]{g_\Phi} M$$

On suppose que la fonction de codage est donnée par $f_\Phi(a) = (a, a, \dots, a)$.

2 Soit $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ un élément de B^n ; on pose $|b| = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Calculer les probabilités $\mathbf{P}(Y = b \mid X = f_\Phi(0))$ et $\mathbf{P}(Y = b \mid X = f_\Phi(1))$ en fonction de p, n et $|b|$.

3 Démontrer que les probabilités d'erreur $\lambda_0(\Phi)$ et $\lambda_1(\Phi)$ sont données par

$$\lambda_0(\Phi) = \sum_{g_\Phi(b)=1} p^{|b|}(1-p)^{n-|b|}$$
$$\lambda_1(\Phi) = \sum_{g_\Phi(b)=0} (1-p)^{|b|}\, p^{-|b|}.$$

4 Soit $b \in \{0,1\}^n$. On modifie la fonction de décodage en changeant uniquement la valeur de $g_\Phi(b)$. Autrement dit, on considère un code Φ' tel que $f_{\Phi'} = f_\Phi$ (même fonction de codage), et la fonction de décodage $g_{\Phi'}$ diffère de g_Φ uniquement en b.

Calculer les erreurs $\lambda_0(\Phi')$ et $\lambda_1(\Phi')$ en fonction des erreurs correspondantes pour le code Φ.

5 On suppose que n est impair. Démontrer que la fonction g_Φ définie par

$$g_\Phi(b_1, \dots, b_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } |b| < n/2\,; \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

minimise l'erreur moyenne, et que c'est la seule.

EXERCICE 5

Soit p un nombre réel non nul et soit f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^{px}$ pour $0 \leqslant x < 2\pi$.

1 Calculer les coefficients de Fourier complexes de f.

2 Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^2 + n^2}$.