*Master MIC, 1re année* *Année 2018/2019*

*THÉORIE DE L'INFORMATION*

Antoine Chambert-Loir / Guillaume Garrigos

# Examen du Vendredi 12 octobre 2018 (1 heure)

*Aucune source d'information extérieure (document, notes de cours, appareil électronique) n'est autorisée.*

## QUESTION DE COURS

1 Soit $p$ et $q$ des lois de probabilité sur un ensemble (fini) A. Définir la *divergence* de la loi $p$ par rapport à la loi $q$.

2 Soit X et Y des variables aléatoires discrètes (ne prenant qu'un nombre fini de valeurs). Donner la définition de l'*entropie* $\mathrm{H}(\mathrm{X})$ de X, de l'*entropie conditionnelle* $\mathrm{H}(\mathrm{X} \mid \mathrm{Y})$ et de l'*information relative* $\mathrm{I}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

## EXERCICE 1

On lance successivement, de manière indépendante, une pièce déséquilibrée qui montre *pile* avec probabilité $t \in \left]0;1\right[$ et *face* avec probabilité $1 - t$. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers *pile* qu'il faut avoir vu avant d'obtenir *face* pour la première fois.

1 Calculer $\mathbf{P}(\mathrm{X} = 0)$, $\mathbf{P}(\mathrm{X} = 1)$, $\mathbf{P}(\mathrm{X} = 2)$. Calculer $\mathbf{P}(\mathrm{X} = n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2 Calculer l'espérance $\mathbf{E}(\mathrm{X})$. (*On pourra utiliser la relation* $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n = t/(1-t)^2$, *valable pour* $|t| < 1$.)

3 Démontrer que l'entropie $\mathrm{H}(\mathrm{X})$ de X est donnée par

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}) = -\frac{t\log(t) + (1-t)\log(1-t)}{1-t}.$$

4 Soit $m$ un nombre réel $> 0$. Dans toute la suite, on choisit $t$ de sorte que $\mathbf{E}(\mathrm{X}) = m$ et on note alors $p$ la loi de X. (Que vaut $t$ ?) Soit Y une variable aléatoire sur $\mathbf{N}$ telle que $\mathbf{E}(\mathrm{Y}) = m$ ; soit $q$ sa loi. Démontrer que

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}) - \mathrm{H}(\mathrm{Y}) = \mathrm{D}(q \mid p).$$

5 Démontrer que parmi toutes les lois sur $\mathbf{N}$ d'espérance $m$, la loi X est l'unique loi d'entropie maximale. Exprimer cette entropie en fonction de $m$.

**EXERCICE 2**

C'est l'histoire d'une étudiante qui travaille à la bibliothèque et qui, avec probabilité $p$, va prendre un café ; ceci fait, et avant de retourner travailler, elle peut, avec probabilité $q$, aller prendre l'air quelques minutes.

**1** Décrire une chaîne de Markov à 3 états (qu'on pourra noter $b$, $c$, $a$) qui modélise cette histoire ; dessiner le graphe qui la représente.

**2** Donner sa matrice de transitions. Vérifier qu'elle est stochastique.

**3** Démontrer qu'elle possède une seule loi stationnaire et la déterminer.

**4** Lorsque $X_0$ obéit à cette loi stationnaire, quel est le taux d'entropie du processus de Markov associé ?

**5** On suppose que $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$. Quel est le taux d'entropie du processus de Markov associé si $X_0$ obéit à la loi $\mathbf{P}(X_0 = b) = 1$ ?