Master MIC, 1re année *Année 2018/2019*

THÉORIE DE L'INFORMATION

Antoine Chambert-Loir / Guillaume Garrigos

Examen du Vendredi 23 novembre 2018 (1 heure)

Aucune source d'information extérieure (document, notes de cours, appareil électronique) n'est autorisée.

EXERCICE 1

Soit X et Y des variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble $\{1;2;3;4;5\}$, de lois respectivement p et q données par le tableau

x	$p(x)$	$q(y)$	$C(x)$	$D(x)$
1	1/2	1/2	0	0
2	1/4	1/8	10	100
3	1/8	1/8	110	101
4	1/16	1/8	1110	110
5	1/16	1/8	1111	111

1 Calculer les entropies $H(X)$, $H(Y)$, ainsi que les divergences $D(p \mid q)$ et $D(q \mid p)$. (On prendra 2 comme base des logarithmes.)

On avait aussi indiqué dans le tableau précédent les valeurs de deux codes binaires C et C sur l'ensemble $\{1;2;3;4;5\}$.

2 Démontrer que la longueur moyenne de $C(X)$ est égale à $H(X)$; en déduire que le code C est optimal relativement à la loi p.

Vérifier aussi que le code D est optimal relativement à la loi q.

3 Calculer la longueur moyenne de $D(X)$; quelle est la différence $\mathbf{E}(\ell(D(X))) - H(X)$?

EXERCICE 2

On considère un canal avec bruit C sur les alphabets $A = \{0,1\}$ et $B = \{a,b,c\}$ et dont la matrice de probabilités de transmission est

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1 Rappeler la définition de l'information mutuelle et de la capacité d'un canal avec bruit.

2 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans A, soit Y une variable aléatoire à valeurs dans B, liées par les probabilités de transmission du canal C. Démontrer que l'information mutuelle est donnée par la formule

$$I(X,Y) = \frac{3}{4} h\left(\frac{1+p}{3}\right) - \frac{3}{4}\log(3) + \frac{1}{2}\log(2),$$

où $h(x) = -x\log(x) - (1-x)\log(1-x)$ pour tout $x \in]0;1[$ est l'entropie d'une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre x, et où $p = \mathbf{P}(X=0)$.

3 Calculer la capacité de ce canal.