

Aucune source d'information extérieure (document, notes de cours, appareil électronique) n'est autorisée.

QUESTION DE COURS

Soit C un canal binaire (c'est-à-dire sur l'alphabet $\{0, 1\}$ en entrée et en sortie) et symétrique. Donner la matrice de probabilités de transmission d'un tel canal. Quelle est sa capacité?

EXERCICE 1

- 1 Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction paire et 2π -périodique telle que $f(t) = \pi - t$ pour $t \in [0; \pi]$.
- 2 Tracer le graphe de f sur $[-3\pi; 5\pi]$.
- 3 Calculer les coefficients de Fourier (a_n et b_n) de f .
- 4 Démontrer que l'on a

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

EXERCICE 2

Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction T -périodique, continue. Soit $a \in \mathbf{R}$.

- 1 Calculer les coefficients de Fourier (complexes) de la fonction g définie par $g(t) = f(t + aT)$, en fonction de ceux de f .
- 2 On suppose que f est également aT -périodique et que a est un nombre rationnel de la forme m/d , où m et d sont premiers entre eux. Démontrer que $c_n(f) = 0$ si n n'est pas multiple de d .
- 3 On suppose que f est également aT -périodique mais que a n'est pas un nombre rationnel. Démontrer que $c_n(f) = 0$ pour tout $n \neq 0$. Expliquer pourquoi f est constante (on pourra utiliser la formule de Parseval).