# *THÉORIE DE L'INFORMATION*

## Entropie et codage

Antoine CHAMBERT-LOIR / Guillaume GARRIGOS

**EXERCICE 1. — Second principe de la thermodynamique**

Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ des chaînes de Markov homogènes à valeurs dans le même ensemble fini A, et possédant la même matrice de probabilités de transition P. On note $p_n$ et $q_n$ les lois respectives de $X_n$ et $Y_n$.

**1** Montrer que la suite $\big(D(p_n \mid q_n)\big)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

**2** Décrire cette suite lorsque ces chaînes de Markov sont irréductibles et apériodiques et $(Y_n)$ est stationnaire.

**3** Que se passe-t-il si, de plus, la loi stationnaire de la chaîne $(Y_n)$ est la loi uniforme sur A ?

**EXERCICE 2**

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans un ensemble A dont la loi appartient à une famille de lois $(p_t)$ indexée par un paramètre $t$, lui-aussi aléatoire, appartenant à un ensemble T. On voudrait, à partir de X, retrouver ce paramètre $t$.

**1** Soit $f$ une fonction sur A. Démontrer l'inégalité $I(t; f(X)) \leqslant I(t; X)$.
On dit que $f$ est une statistique suffisante pour $t$ si l'on a égalité.

**2** On suppose que $X = (X_1, \dots, X_n)$, où les $X_k$ sont indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $t = \mathbf{P}(X_k = 1)$. On suppose que $f(a_1, \dots, a_n) = a_1 + \dots + a_n$. Démontrer que $f$ est une statistique suffisante pour $t$.

**EXERCICE 3**

On considère un code binaire sur un ensemble à deux éléments tel que les deux mots codés sont $0$ et $01$.

**1** S'agit-il d'un code préfixe ?

**2** Démontrer que ce code est uniquement décodable.

**EXERCICE 4**

Soit $(X_n)$ un processus stationnaire prenant ses valeurs dans un ensemble A fini. Pour tout entier $n$, on considère la variable aléatoire $Y_n = (X_1, \dots, X_n)$ à valeurs dans $A^n$.

**1** Lorsque de plus les $X_n$ sont indépendantes, rappeler quelle est la loi de $Y_n$ et son entropie.

**2** Soit $C_n$ un code sur $A^n$, à valeurs dans un alphabet de cardinal D, qui est optimal relativement à la loi de $Y_n$. On pose

$$L_n = \mathbf{E}(\ell(C_n(Y)))/n.$$

En appliquant le théorème de Shannon à la variable $Y_n$, démontrer que $L_n$ converge vers le taux d'entropie du processus $(X_n)$.

**EXERCICE 5**

On considère l'alphabet $\mathrm{A} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}, \mathrm{f}, \mathrm{g}\}$ avec les probabilités respectives :

| a | b | c | d | e | f | g |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,49 | 0,26 | 0,12 | 0,04 | 0,04 | 0,03 | 0,02 |

**1** Calculer l'entropie d'une variable aléatoire ayant une telle loi.

**2** Construire un code par la méthode de Shannon (c'est-à-dire qu'un symbole $x \in \mathrm{A}$ est codé par un mot de longueur $\lceil -\log(p(x)) \rceil$, où $p(x)$ est sa probabilité). Quelle est la longueur moyenne d'un tel code ?

**3** Construire, par la méthode de Huffman, un code binaire optimal. Quelle est sa longueur moyenne ?

**4** Coder le mot *bagage*.

**5** Décoder le message $1111101111011111011101$.

**EXERCICE 6**

On considère une variable aléatoire X sur un alphabet fini A, de loi de probabilité $p$. Pour calculer un code binaire optimal relativement à cette loi, on doit connaître la loi $p$. Supposons qu'on n'en connaisse qu'une approximation $q$, qu'on utilise comme code C un code binaire C construit à la Shannon, relativement à la loi $q$, c'est-à-dire que $\ell(\mathrm{C}(a)) = \lceil -\log(q(a)) \rceil$.

**1** On suppose que $q$ est *dyadique*, c'est-à-dire que pour tout $a$, $q(a)$ est de la forme $1/2^n$, pour un certain entier $n$. Démontrer que C est un code optimal relativement à la loi $q$. Quelle est la longueur moyenne $\mathbf{E}(\ell(\mathrm{C}(\mathrm{X})))$ d'un mot de code ?

**2** Dans le cas général, démontrer l'encadrement de cette longueur moyenne :

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}) + \mathrm{D}(p \mid q) \leqslant \mathbf{E}(\ell(\mathrm{C}(\mathrm{X}))) < \mathrm{H}(\mathrm{X}) + \mathrm{D}(p \mid q) + 1.$$