ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Algèbre linéaire — espaces vectoriels, bases, dimension

A. CHAMBERT-LOIR

EXERCICE 1

Soit K un corps fini, soit q son cardinal. Soit n un entier.

1 Quel est le cardinal du groupe $\mathrm{GL}_n(K)$? du groupe $\mathrm{SL}_n(K)$?

2 Pour $k \in \{0,\dots,n\}$, dénombrer l'ensemble des sous-espaces de dimension k de K^n.

3 Pour $k \in \{0,\dots,n\}$ et $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, dénombrer l'ensemble des matrices $n \times k$ dont la forme réduite échelonnée par colonnes a pour indices de pivots la suite $\{i_1,\dots,i_k\}$. Comparer avec la question précédente.

EXERCICE 2

Soit d un élément de $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ et soit E le sous-espace vectoriel de $K[T]$ formé des polynômes de degré $< d$.

1 Démontrer que la famille des polynômes $(T^n)_{n<d}$ est une base de E.

2 Soit $(P_n)_{n<d}$ une famille de polynômes telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout n. Démontrer que c'est une base de E_d. Quelle est la forme de la matrice de changement de base de celle de la question précédente à celle-ci ?

3 On suppose $d < \infty$. Démontrer que la famille $(T^n(1-T)^{d-n-1})_{0\leqslant d\leqslant n-1}$ est une base de E_d. Décrire la matrice de changement de base de celle de la question 1 à celle-ci ainsi que son inverse.

EXERCICE 3

1 Pour $a \in \mathbf{R}$, on note $f_a \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f_a(x) = \exp(ax)$. Démontrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbf{R}}$ est libre.

2 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, non vide. Pour $a \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, on note $g_{a,n}$ la fonction de I dans $\mathbf{R}$ donnée par $g_{a,n}(x) = x^n \exp(ax)$. Démontrer que la famille $(g_{a,n})$ est libre.

EXERCICE 4

Soit K un corps (commutatif).

1 Soit $f\colon \operatorname{Mat}_n(K) \to K$ une application linéaire telle que $f(AB) = f(BA)$ pour $A, B \in \operatorname{Mat}_n(K)$. Démontrer qu'il existe un unique élément $c \in K$ tel que $f(A) = c \operatorname{Tr}(A)$ pour tout $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$.

2 On suppose que K est de caractéristique zéro. Soit $\varphi\colon \operatorname{Mat}_n(K) \to \operatorname{Mat}_n(K)$ un morphisme d'algèbres. Démontrer que $\varphi(\operatorname{Tr}(A)) = \operatorname{Tr}(\varphi(A))$ pour tout $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$.

3 Soit J le sous-espace vectoriel de $\operatorname{Mat}_n(K)$ engendré par les matrices de la forme $AB - BA$. Démontrer que J est un idéal bilatère de $\operatorname{Mat}_n(K)$ (pour $A \in J$ et $B \in \operatorname{Mat}_n(K)$, AB et BA appartiennent à J), que la relation de congruence modulo J est est compatible avec la structure d'algèbre de $\operatorname{Mat}_n(K)$, et que l'algèbre quotient $\operatorname{Mat}_n(K)/J$ est isomorphe à K.

EXERCICE 5

Soit V, W des K-espaces vectoriels, soit $f\colon V \to W$ une application linéaire. Soit V' un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(f)$ dans V et soit W' un supplémentaire de $\operatorname{Im}(f)$ dans W. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire $g \in \mathscr{L}(W; V)$ telle que $\operatorname{Ker}(g) = W'$, $\operatorname{Im}(g) = V'$, $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

EXERCICE 6

Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit W, W' des sous-espaces vectoriels de V ; on suppose que $\dim(W) = \dim(W')$. Démontrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de V qui est un supplémentaire à la fois de W et de W'.

EXERCICE 7

1 Calculer les inverses des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots \\ 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Soit a, b des éléments de K. Déterminer le carré et l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & a \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 8

Soit n un entier et soit $(x_1, \dots, x_n)$ une suite de nombres réels telle que $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Soit d et k des entiers et soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbf{R}$ dont la restriction à chacun des intervalles $-\infty; x_1]$, $[x_1; x_2], \dots$, $[x_{n-1}; x_n]$, $[x_n; +\infty[$ est la restriction d'une fonction polynomiale de degré $\leqslant d$. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{C}^k(\mathbf{R})$ et déterminer sa dimension. (Commencer par les cas particuliers $d = 0, 1, 2$, d'une part, $k = 0, 1$ d'autre part.)

EXERCICE 9

Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de V. Pour tout n, on pose $u_n = \dim(\operatorname{Ker}(f^n))$.

1 Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

2 On suppose que $u_{n+1} = u_n$; démontrer que $u_m = u_n$ pour tout entier $m \geqslant n$.

3 Démontrer que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est décroissante.

4 Soit (u_n) une suite croissante d'entiers naturels telle que $0 \leqslant u_n \leqslant \dim(V)$ et telle que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ soit décroissante. Construire un endomorphisme f de V tel que $u_n = \dim(\operatorname{Ker}(f^n))$ pour tout n. (Commencer par des cas particuliers ; supposer par exemple que $u_2 = \dim(V)$, ou bien $u_2 = u_1$, ou bien que $u_3 = u_2$.)

EXERCICE 10

1 Soit $u\colon U \to V$ et $v\colon V \to W$ des applications linéaires. On suppose que u est de rang fini (c'est-à-dire que $\operatorname{rg}(u) = \dim(u(U)) < \infty$). Démontrer que $v \circ u$ est de rang fini et que l'on a

$$\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v \circ u) = \dim(\operatorname{Ker}(v) \cap \operatorname{Im}(u))\ ;$$

en particulier, $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(u)$.

2 On suppose que v est de rang fini ; démontrer que $v \circ u$ est de rang fini et que l'on a

$$\operatorname{rg}(v) - \operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{codim}(\operatorname{Ker}(v) + \operatorname{Im}(u))\ ;$$

en particulier, $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(v)$.

3 Soit $u, v\colon V \to W$ des applications linéaires. Démontrer les inégalités

$$\left|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)\right| \leqslant \operatorname{rg}(u + v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v).$$

Analyser les cas d'égalité.

EXERCICE 11

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\operatorname{Mat}_n(\mathbf{R})$.

1 On suppose que que

$$\left|a_{i,i}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|a_{i,j}\right|$$

pour tout i. Démontrer que A est inversible.

2 Même question sous l'hypothèse que pour tout j,

$$\left|a_{j,j}\right| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left|a_{i,j}\right|.$$