GÉOMÉTRIE TROPICALE, 1

A. CHAMBERT-LOIR

Examen du jeudi 20 février 2020 (3 heures)

Vous pouvez rédiger vos réponses en français ou en anglais.

EXERCICE 1

1 Soit P un polyèdre dans un espace vectoriel réel V de dimension finie. Soit $x \in P$.

a) Justifier l'existence d'une unique face minimale F_x de P telle que $x \in F_x$.

Soit P_x l'ensemble des vecteurs $v \in V$ pour lesquels il existe $\delta > 0$ tel que $x + tv \in P$, pour tout $t \in [0;\delta[$.

b) Démontrer que P_x est un cone convexe polyédral.

c) Soit $V_x = P_x \cap (-P_x)$. Démontrer que V_x est un sous-espace vectoriel de V tel que $F_x \subset x + V_x$ et que $\dim(F_x) = \dim(V_x)$.

On suppose dans la suite que P est le polytope des matrices bistochastiques dans $\mathbf{R}^{n^2}$: les matrices réelles $n \times n$ $A = (a_{i,j})$ à coefficients positifs tels que les sommes $\sum_{j=1}^n a_{i,j}$ de chaque ligne les sommes $\sum_{i=1}^n a_{i,j}$ de chaque colonne soient égales à 1.

2 Démontrer que les sommets de P sont les matrices de permutation (données, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, par $a_{i,j} = 1$ si $j = \sigma(i)$, et $a_{i,j} = 0$ sinon).

3 Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation distincte de id et soit x le milieu des deux matrices de permutation associées, A_{id} et A_σ. Calculer l'espace V_x. Démontrer que le segment $[A_{\mathrm{id}}, A_\sigma]$ est une arête (une face de dimension 1) de P si et seulement si σ ne possède qu'un cycle non trivial.

EXERCICE 2

Soit $f = \sum c_m T^m \in \mathbf{C}[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]$ un polynôme de Laurent, on note $\mathscr{V}(f) \subset (\mathbf{C}^*)^n$ l'hypersurface complexe qu'il définit et $\mathscr{A}_f$ son amibe. On note aussi NP_f le polytope de Newton de f et $V(\mathrm{NP}_f)$ l'ensemble de ses sommets. On dit que l'amibe $\mathscr{A}_f$ est *solide* si l'ordre de chaque composante connexe de son complémentaire est un sommet du polytope de Newton NP_f.

1 *a*) Soit m un sommet du polytope de Newton de f et soit E l'unique composante connexe de $\mathbf{R}^n - \mathscr{A}_f$ d'ordre m. Démontrer que la fonction de Ronkin de f est donnée par $R_f(x) = \log(|c_m|) + \langle m, x\rangle$ sur E.

b) On suppose que l'amibe $\mathscr{A}_f$ est solide. Prouver que la fonction de Passare-Rullgård coïncide avec le polynôme tropical, c'est-à-dire que l'on a

$$S_f(x) = \sup_{m \in V(\mathrm{NP}_f)} (\log(|c_m|) + \langle m, x\rangle)$$

pour tout $x \in \mathbf{R}^n$.

Soit $(a_{j,k})$ une matrice symmétrique réelle de taille $n \times n$ dont les coefficients vérifient l'inégalité $0 < |a_{j,k}| < 1$ pour tout couple (j,k) tel que $j \neq k$. On pose alors

$$f(T_1, \dots, T_n) = \sum_{J \subset \{1,\dots,n\}} \prod_{j \in J} (z_j \prod_{k \notin J} a_{j,k}).$$

2 *a*) Déterminer le polytope de Newton de f. En déduire que l'amibe $\mathscr{A}_f$ est solide.

b) Démontrer que $f(T_1, \dots, T_n) = T_1 \dots T_n f(T_1^{-1}, \dots, T_n^{-1})$.

c) Démontrer que l'amibe de f est symétrique : $\mathscr{A}_f = -\mathscr{A}_f$.

3 *a*) Démontrer que 0 appartient à l'épine de $\mathscr{A}_f$. Plus précisément, démontrer qu'au voisinage de 0, l'épine de $\mathscr{A}_f$ coïncide avec l'hyperplan d'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$.

4 On se propose de démontrer par récurrence que $\mathbf{R}_+^n \cap \mathscr{A}_f = \{0\}$.

a) Soit t un nombre réel tel que $t > 0$. Démontrer que $(0, \dots, 0, t) \notin \mathscr{A}_f$.

b) Prouver que $\mathbf{R}_+^n \cap \mathscr{A}_f = \{0\} = (-\mathbf{R}_+^n) \cap \mathscr{A}_f = \{0\}$.

c) En déduire que les zéros complexes du polynôme $f(T, T, \dots, T)$ en une indéterminée T sont tous de module 1 (*théorème de Lee–Yang*).

EXERCICE 3

On pose $f = 3T_1^2 + 5T_1T_2 - 6T_2^2 + 8T_1 - T_2 + 9 \in \mathbf{Q}[T_1, T_2]$. On fixe un nombre premier p et on considère le corps des nombres rationnels muni de la valuation p-adique v_p.

1 Tracer le polytope de Newton de f.

2 On suppose que $p \geqslant 7$.

a) Déterminer les formes initiales $\mathrm{in}_x(f)$ suivant la valeur de $x \in \mathbf{R}^2$.

b) Déterminer l'amibe (non archimédienne) de f. Faire une figure.

3 Reprendre la question précédente avec $p = 3$.