M1 - THÉORIE DE L'INFORMATION - 2019-2020

CC DU VENDREDI 09 NOVEMBRE (1 HEURE)

Exercice 1.

Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$ de lois respectives p et q, qui sont données dans le tableau suivant

x	$p(x)$	$q(y)$	$C(x)$	$D(x)$
1	1/2	1/2	0	0
2	1/4	1/8	10	100
3	1/8	1/8	110	101
4	1/16	1/8	1110	110
5	1/16	1/8	1111	111

1) Calculer les entropies $H(X), H(Y)$, ainsi que les divergences $D(p||q), D(q||p)$. On utilisera des logarithmes en base 2.
2) Les deux dernières colonnes du tableau décrivent respectivement les codes binaires C et D. Démontrer que la longueur moyenne de $C(X)$ est égale à $H(x)$.
3) En déduire que le code de C est optimal relativement à la loi p. Vérifier aussi que le code D est optimal relativement à la loi q.
4) Calculer la longueur moyenne de $D(X)$. Que pouvez-vous dire de la différence $\mathbb{E}(\ell(D(X))) - H(X)$?

Exercice 2.

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires. Montrer que $X \to Y \to Z$ est une chaîne de Markov si et seulement si X et Z sont indépendantes conditionellement à Y.

Exercice 3.

1) Déterminer si les matrices suivantes sont primitives (justifier votre réponse par les arguments de votre choix):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Soit $\mathbb{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur un ensemble fini, dont la matrice de transition est

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer son taux d'entropie $H(\mathbb{X})$.