Master MIC, 1re année *Année 2019/2020*

THÉORIE DE L'INFORMATION

Antoine Chambert-Loir / Guillaume Garrigos

Examen du Lundi 30 septembre 2019 (1 heure)

Aucune source d'information extérieure (document, notes de cours, appareil électronique) n'est autorisée.

QUESTIONS DE COURS

1 Soit p et q des lois de probabilité sur un ensemble (fini) A. Définir la *divergence* de la loi p par rapport à la loi q.

2 Soit X et Y des variables aléatoires discrètes (ne prenant qu'un nombre fini de valeurs). Donner la définition de l'*entropie* $\mathrm{H}(\mathrm{X})$ de X, de l'*entropie conditionnelle* $\mathrm{H}(\mathrm{X} \mid \mathrm{Y})$ et de l'*information relative* $\mathrm{I}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

EXERCICE 1

On lance deux fois, de façon indépendante, une pièce équilibrée.

1 La variable aléatoire X vaut 1 si l'on a obtenu deux fois *face*, et 0 sinon. Calculer son entropie $\mathrm{H}(\mathrm{X})$.

2 La variable aléatoire Y vaut 1 si l'on a obtenu deux fois *pile*, et 0 sinon. Calculer son entropie $\mathrm{H}(\mathrm{Y})$.

3 Calculer l'entropie $\mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ du couple (X, Y) ainsi que les entropies conditionnelles $\mathrm{H}(\mathrm{X} \mid \mathrm{Y})$ et $\mathrm{H}(\mathrm{Y} \mid \mathrm{X})$.

4 Calculer l'information mutuelle $\mathrm{I}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ des variables aléatoires X et Y.

EXERCICE 2

Soit X, Y, Z trois variables aléatoires (discrètes, ne prenant qu'un nombre fini de valeurs).

1 Démontrer l'égalité

$$\mathrm{I}(\mathrm{X}; \mathrm{Z} \mid \mathrm{Y}) = \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + \mathrm{H}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) - \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) - \mathrm{H}(\mathrm{Y}).$$

2 En déduire l'inégalité (« sous-additivité forte de l'entropie de Shannon »)

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + \mathrm{H}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) \geqslant \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + \mathrm{H}(\mathrm{Y}).$$

Quand a-t-on égalité ?

3 Expliquer pourquoi, lorsque Y est une variable certaine (c'est-à-dire prend une certaine valeur y avec probabilité 1), cette inégalité permet de retrouver l'inégalité $\mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{Z}) \leqslant \mathrm{H}(\mathrm{X}) + \mathrm{H}(\mathrm{Z})$.