THÉORIE DE L'INFORMATION

Variables aléatoires discrètes

Antoine CHAMBERT-LOIR / Guillaume GARRIGOS

EXERCICE 1. — Loi uniforme

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et X une variable aléatoire *uniforme* sur $\{1, \dots, n\}$, c'est-à-dire que toutes les probabilités $\mathbf{P}(\mathrm{X} = a)$ sont égales, pour $a \in \{1, \dots, n\}$.

1 Calculer $\mathbf{P}(\mathrm{X} = a)$ pour $a \in \{1, \dots, n\}$.

2 Calculer la probabilité que X soit un entier pair. Plus généralement, si a est un entier $\geqslant 1$, calculer la probabilité que X soit un multiple de a.

3 Calculer l'espérance de X.

4 Calculer la variance de X.

EXERCICE 2

On rappelle la définition de la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B})$ lorsque A et B sont deux événements tels que $\mathbf{P}(\mathrm{B}) \neq 0$:

$$\mathbf{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \frac{\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathbf{P}(\mathrm{B})}.$$

1 Soit A et B des événements tels que $\mathbf{P}(\mathrm{A}) \neq 0$ et $\mathbf{P}(\mathrm{B} \neq 0)$. Démontrer la *formule de Bayes :*

$$\mathbf{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \frac{\mathbf{P}(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})\,\mathbf{P}(\mathrm{A})}{\mathbf{P}(\mathrm{B})}.$$

2 Soit (B_n) une suite (finie ou dénombrable) d'événements deux à deux disjoints tels que $\Omega = \bigcup \mathrm{B}_n$ et $\mathbf{P}(\mathrm{B}_n) \neq 0$ pour tout n. Démontrer que pour tout événement A, on a

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \sum_n \mathbf{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}_n)\mathbf{P}(\mathrm{B}_n)$$

(*formule des probabilités totales*).

3 Trois prisonniers risquent l'exécution. L'un d'eux apprend de source sûre que l'un des trois a été gracié en dernière minute. Le gardien refuse de lui donner le nom du gracié, mais accepte de lui donner le nom de l'un des condamnés, qui n'est pas le sien. Le prisonnier doit-il se montrer rassuré en entendant le nom d'un des deux autres ?

4 Un jeu télévisé met en scène trois portes ; derrière l'une se trouve une voiture. Le présentateur propose au candidat de désigner celle des trois portes qu'il souhaite ouvrir et ouvre alors une des deux autres portes qui ne masque pas la voiture. Le candidat souhaite gagner la voiture ; doit-il ouvrir la porte qu'il avait initialement désignée, ou bien ouvrir la troisième porte ?

EXERCICE 3. — Loi de Poisson

Soit p un nombre réel tel que $p \geqslant 0$. Soit X une variable aléatoire dont la loi est la loi exponentielle de paramètre p : cela signifie que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $\mathbf{P}(\mathrm{X} = n) = e^{-p} p^n / n!$.

1 Calculer l'espérance de X.

2 Calculer, pour tout entier $k \geqslant 1$, l'espérance de X^k.

3 Calculer la variance de X.

EXERCICE 4. — Loi géométrique

Soit p et q des nombre réels positifs tels que $p + q = 1$. Soit X une variable aléatoire dont la loi est la loi géométrique de paramètre p : cela signifie que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $\mathbf{P}(\mathrm{X} = n) = qp^n$.

1 Calculer l'espérance de X.

2 Calculer, pour tout entier $k \geqslant 1$, l'espérance de X^k.

3 Calculer la variance de X.

EXERCICE 5

Un tricheur dispose d'un dé à 6 faces pipé qui sort 1 avec probabilité $2/3$ et chacune des autres faces avec probabilité $1/15$. Cependant, son dé pipé est dans un sac qui contient aussi deux dés équilibrés (chaque face sort avec probabilité $1/6$). Ces trois dés sont apparemment indiscernables.

1 Notre tricheur prend un des trois dés au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi le dé pipé ? (On pourra noter P la variable aléatoire « le tricheur a choisi le dé pipé » à valeurs vrai/faux.)

2 Il lance le dé qu'il a pris et obtient 1. Conditionnellement à ce résultat, quelle est alors la probabilité qu'il ait choisi le dé pipé ? (On pourra introduire la variable aléatoire X qui donne la valeur du lancer du dé.)

3 Il relance ce dé et obtient de nouveau 1. Quelle est maintenant la probabilité qu'il ait choisi le dé pipé ? (On pourra introduire la variable aléatoire Y qui donne la valeur du deuxième lancer du dé et justifier que X et Y sont indépendantes conditionnellement à P.)