Master MIC (première année) *Année 2019/2020*

THÉORIE DE L'INFORMATION

Taux d'entropie

Antoine CHAMBERT-LOIR / Guillaume GARRIGOS

EXERCICE 1

Soit $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un processus stochastique sur un ensemble $\mathscr{X}$ fini (de cardinal $k \geqslant 1$).

1 Montrer que le taux d'entropie supérieur $\overline{H}(\boldsymbol{X})$ est toujours inférieur ou égal à $\log(k)$.

2 Cette borne est-elle optimale ?

3 Que se passe-t-il si on remplace $\mathscr{X}$ par $\mathbf{N}$?

EXERCICE 2. — Chaîne de Markov homogène à deux états, I

Soit $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur $\mathscr{X} = \{a, b\}$. On note $p = \mathbf{P}(X_1 = a \mid X_0 = b)$ et $q = \mathbf{P}(X_1 = b \mid X_0 = a)$.

1 Écrire la matrice de transitions P de cette chaîne de Markov, et tracer son graphe.

2 Montrer que l'unique loi stationnaire de $\boldsymbol{X}$) est $\mu = (\frac{p}{p+q}, \frac{q}{p+q})$.

Pour le reste de cet exercice, on suppose que X_0 *suit la distribution* μ.

3 Exprimer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'entropie $H(X_n)$ en fonction de p et q. On pourra introduire la fonction $h(t) = -t\log(t) - (1-t)\log(1-t)$.

4 Calculer le taux d'entropie $H(\boldsymbol{X})$.

5 Quelles valeurs de p et q maximisent le taux d'entropie ?

EXERCICE 3. — Piocher et tirer, II

On reprend les notations et le contexte de l'exercice *Piocher et tirer* de la feuille n° 2. On note $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ le processus aléatoire correspondant au tirage de la pièce que l'on a piochée.

1 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H(X_1, \dots, X_n \mid Y)$.

2 En déduire le taux d'entropie $H(\boldsymbol{X})$.

3 Est-ce que $\boldsymbol{X}$ est une chaine de Markov homogène ?

EXERCICE 4. — Chaîne de Markov homogène à deux états, II

On reprend le contexte de l'exercice 2. On note $\mu_n = (u_n, v_n)$ la distribution que suit la variable X_n. Ici, on ne suppose pas que μ_0 est stationnaire, et on s'intéresse à la convergence de la suite (μ_n).

1 Exprimer μ_n en fonction de P et μ_0.

2 La suite $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet-elle une limite lorsque $(p, q) = (1, 1)$ ou $(0, 0)$? Justifier, et calculer cette limite le cas échéant.

On suppose à partir de maintenant que $p + q \in \,]0, 2[$.

3 Calculer le spectre de P.

4 Trouver une base de $\mathbf{R}^2$ composée de vecteurs propres de P, puis calculer P^n.

5 En déduire la limite de μ_n lorsque $n \to +\infty$. Que constate-t-on ?

EXERCICE 5

On considère un jeu d'échecs miniature, de taille 3×3.

1 À chaque tour, le cavalier se déplace de deux cases dans une direction (horizontale ou verticale) et d'une case dans l'autre, en restant sur l'échiquier. Soit (C_n) le processus stochastique désignant sa position, les déplacements successifs étant supposés indépendants pourvu qu'ils respectent la règle du jeu. Déterminer son taux d'entropie.

2 Même question pour un fou. (On rappelle que le fou se déplace uniquement en diagonale, mais d'un nombre arbitraire de cases.)

EXERCICE 6

On considère une suite (X_n) de tirages à pile ou face (tirages indépendants, pièce équilibrée). Pour $n \geqslant 1$, soit Y_n la variable aléatoire qui compte le nombre de *face* aux tirages n et $n-1$.

1 Calculer la loi de Y_n et son entropie.

2 Calculer l'entropie conditionnelle $\mathrm{H}(\mathrm{Y}_n \mid \mathrm{Y}_{n-1})$.

3 Le processus (Y_n) est-il markovien ?

4 Pour $m \geqslant 1$, calculer $\mathrm{H}(\mathrm{Y}_n, \ldots, \mathrm{Y}_{n+m})$.

5 Quel est le taux d'entropie du processus (Y_n) ?

6 Reprendre ces questions en supposant que la pièce est pipée et tombe sur *face* avec probabilité p.

EXERCICE 7. — Second principe de la thermodynamique

Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\mathrm{Y}_n)_{n\geqslant 0}$ des chaînes de Markov homogènes à valeurs dans le même ensemble fini A, et possédant la même matrice de probabilités de transition P. On note p_n et q_n les lois respectives de X_n et Y_n.

1 Montrer que la suite $\big(\mathrm{D}(p_n \mid q_n)\big)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

2 Décrire cette suite lorsque ces chaînes de Markov sont irréductibles et apériodiques et (Y_n) est stationnaire.

3 Que se passe-t-il si, de plus, la loi stationnaire de la chaîne (Y_n) est la loi uniforme sur A ?

EXERCICE 8

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans un ensemble A dont la loi appartient à une famille de lois (p_t) indexée par un paramètre t, lui-aussi aléatoire, appartenant à un ensemble T. On voudrait, à partir de X, retrouver ce paramètre t.

1 Soit f une fonction sur A. Démontrer l'inégalité $\mathrm{I}(t; f(\mathrm{X})) \leqslant \mathrm{I}(t; \mathrm{X})$.

On dit que f est une statistique suffisante pour t si l'on a égalité.

2 On suppose que $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$, où les X_k sont indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $t = \mathbf{P}(\mathrm{X}_k = 1)$. On suppose que $f(a_1, \ldots, a_n) = a_1 + \cdots + a_n$. Démontrer que f est une statistique suffisante pour t.