*Master MIC (première année)* *Année 2019/2020*

*THÉORIE DE L'INFORMATION*

# Entropie et codage

Antoine CHAMBERT-LOIR / Guillaume GARRIGOS

**EXERCICE 1**

C'est l'histoire d'une étudiante qui travaille à la bibliothèque et qui, avec probabilité $p$, va prendre un café ; ceci fait, et avant de retourner travailler, elle peut, avec probabilité $q$, aller prendre l'air quelques minutes.

**1** Décrire une chaîne de Markov à 3 états (qu'on pourra noter $b$, $c$, $a$) qui modélise cette histoire ; dessiner le graphe qui la représente.

**2** Donner sa matrice de transitions. Vérifier qu'elle est stochastique.

**3** Démontrer qu'elle possède une seule loi stationnaire et la déterminer.

**4** Lorsque $X_0$ obéit à cette loi stationnaire, quel est le taux d'entropie du processus de Markov associé ?

**5** On suppose que $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$. Quel est le taux d'entropie du processus de Markov associé si $X_0$ obéit à la loi $\mathbf{P}(X_0 = b) = 1$ ?

**EXERCICE 2**

On considère un code binaire sur un ensemble à deux éléments tel que les deux mots codés sont $0$ et $01$.

**1** S'agit-il d'un code préfixe ?

**2** Démontrer que ce code est uniquement décodable.

**EXERCICE 3**

Soit $(X_n)$ un processus stationnaire prenant ses valeurs dans un ensemble $A$ fini. Pour tout entier $n$, on considère la variable aléatoire $Y_n = (X_1, \dots, X_n)$ à valeurs dans $A^n$.

**1** Lorsque de plus les $X_n$ sont indépendantes, rappeler quelle est la loi de $Y_n$ et son entropie.

**2** Soit $C_n$ un code sur $A^n$, à valeurs dans un alphabet de cardinal $D$, qui est optimal relativement à la loi de $Y_n$. On pose

$$L_n = \mathbf{E}(\ell(C_n(Y)))/n.$$

En appliquant le théorème de Shannon à la variable $Y_n$, démontrer que $L_n$ converge vers le taux d'entropie du processus $(X_n)$.

**EXERCICE 4**

On considère l'alphabet $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ avec les probabilités respectives :

| a | b | c | d | e | f | g |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,49 | 0,26 | 0,12 | 0,04 | 0,04 | 0,03 | 0,02 |

**1** Calculer l'entropie d'une variable aléatoire ayant une telle loi.

**2** Construire un code par la méthode de Shannon (c'est-à-dire qu'un symbole $x \in \mathrm{A}$ est codé par un mot de longueur $\lceil -\log(p(x)) \rceil$, où $p(x)$ est sa probabilité). Quelle est la longueur moyenne d'un tel code ?

**3** Construire, par la méthode de Huffman, un code binaire optimal. Quelle est sa longueur moyenne ?

**4** Coder le mot *bagage*.

**5** Décoder le message 1111101111011110111101.

**EXERCICE 5**

On considère une variable aléatoire X sur un alphabet fini A, de loi de probabilité $p$. Pour calculer un code binaire optimal relativement à cette loi, on doit connaître la loi $p$. Supposons qu'on n'en connaisse qu'une approximation $q$, qu'on utilise comme code C un code binaire C construit à la Shannon, relativement à la loi $q$, c'est-à-dire que $\ell(\mathrm{C}(a)) = \lceil -\log(q(a)) \rceil$.

**1** On suppose que $q$ est *dyadique*, c'est-à-dire que pour tout $a$, $q(a)$ est de la forme $1/2^n$, pour un certain entier $n$. Démontrer que C est un code optimal relativement à la loi $q$. Quelle est la longueur moyenne $\mathbf{E}(\ell(\mathrm{C}(\mathrm{X}))$ d'un mot de code ?

**2** Dans le cas général, démontrer l'encadrement de cette longueur moyenne :

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}) + \mathrm{D}(p \mid q) \leqslant \mathbf{E}(\ell(\mathrm{C}(\mathrm{X}))) < \mathrm{H}(\mathrm{X}) + \mathrm{D}(p \mid q) + 1.$$

**EXERCICE 6**

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans un alphabet $\mathrm{A} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$. Dans le tableau suivant, on indique la loi de X, ainsi que deux codes binaires sur cet alphabet.

| X | $p_{\mathrm{X}}$ | code I | code II |
|---|---|---|---|
| a | 0,4 | 1 | 1 |
| b | 0,3 | 01 | 10 |
| c | 0,2 | 001 | 100 |
| d | 0,1 | 0001 | 1000 |

*Pour chacun de ces deux codes, répondez aux trois questions suivantes :*

**1** S'agit-il d'un code préfixe ? S'agit-il d'un code uniquement décodable ?

**2** On considère les deux variables aléatoires (à valeurs vrai/faux) U = « X = a » et V = « le premier symbole du mot de code est 1 ». Quelle est leur information mutuelle I(U, V) ?

**3** Quelle est la longueur moyenne d'un mot de code ? Que dit le théorème de Shannon dans ce contexte ?

**4** Construire un code binaire optimal pour la variable aléatoire X. Quelle est la longueur moyenne d'un mot de code ?