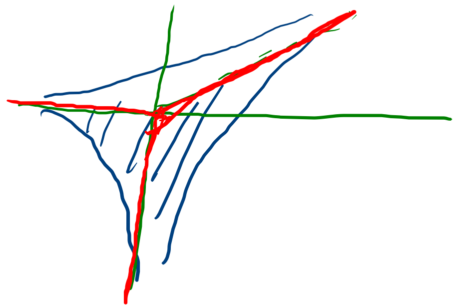
Géométrie tropicale II

Rappel de la première partie du cours.

1). géométrie convexe
polyèdres, cones, polytopes, faces, sommets ...
sous espace polyédral - décomposition polyédrale

2) Amibes archimédiennes
$X \subset (\mathbb{C}^\times)^n$ sous variété algébrique
$X = \mathcal{V}(f)$ $\quad f \in \mathbb{C}[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]$
$\rightsquigarrow \mathcal{A}_X = \lambda(X)$ $\quad \lambda : (\mathbb{C}^\times)^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (z_1, \dots, z_n) \longmapsto (\log|z_1|, \dots)$

$X = (T_1 + T_2 = 1)$



$S_f = \sup(x_1, x_2, 0)$

R_f fonction de Ronkin $\quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
S_f Passare-Rullgård
Épine de l'amibe = lieu de non différentiabilité de S_f

$$S_f(x) = \sup_{m \in \mathbb{Z}^n} (c_m + \langle x, m \rangle)$$

$\langle \, , \, \rangle$ dualité

affine par morceaux

3) Amibes non archimédiennes
K corps muni d'une valeur absolue non archimédienne
$X \subset \mathbb{G}_{m,K}^n$ $\quad X^{an} \subset \mathcal{M}(K[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}])$ espace de Berkovich

$\mathcal{A}_X = \lambda(X^{an})$ $\quad \lambda : \mathcal{M}(\text{—}) \to \mathbb{R}^n \quad p \longmapsto \log(p(T_1), \dots, p(T_n))$
sous espace polyédral de $\mathbb{R}^n$ (rationnel)

Partie 2 : deux options.

celle de l'an dernier : 4) Variétés toriques
5) Exemples (arrangement d'hyperplans, matroïdes, grassmanniennes)
6) Intersection tropicale

celle que je voudrais suivre cette année (rien n'est sûr)
7) Géométrie tropicale énumérative

application de la géométrie tropicale à une question centrale de géométrie algébrique : le dénombrement de courbes planes vérifiant des conditions géométriques prescrites.

G. Mikhalkin, Enumerative tropical algebraic geometry in $\mathbb{R}^2$
Journal of the AMS, vol. 18 (2005)

E. Shustin, A tropical approach to enumerative geometry
St Petersburg Math Journal, vol. 17 (2006)

8) ?

géométrie tropicale énumérative.

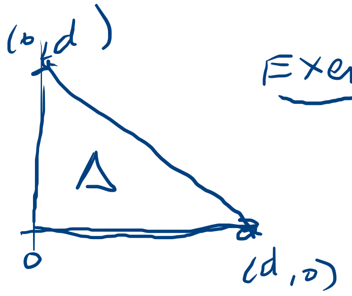
La question

$\Delta \subset \mathbb{R}^2$ ~~polygone~~ polytope de dim 2 à sommets dans $\mathbb{Z}^2$ (K corps)

$S = \Delta \cap \mathbb{Z}^2$, $s = \mathrm{Card}(S)$

$$\mathcal{O}(\Delta) = \Big\{ \sum_{m \in S} c_m T^m \ , \ c_m \in K \Big\}$$ espace vectoriel de dim s.

$f \in \mathcal{O}(\Delta) \rightsquigarrow$ courbe $V(f)$ dans $\mathbb{G}_m^2$ ou plutôt dans une surface projective $X_\Delta \supset \mathbb{G}_m^2$ (variété torique associée à Δ)



Exemples :

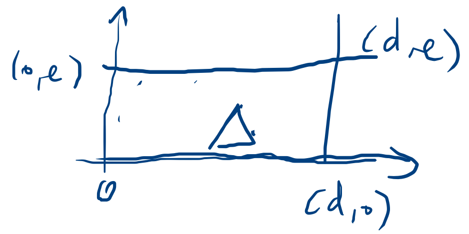
a) $d \geq 1$

$\Delta = \mathrm{conv}\big((0,0), (d,0), (0,d)\big)$

$$X_\Delta = \mathbb{P}_2 \hookrightarrow \mathbb{P}_{\frac{(d+1)d}{2}-1}$$ plan projectif

$\mathbb{P}_2 \supset \mathbb{G}_m^2$

(plongement de Veronese)



b) $d, e \geq 1$

$\Delta = \mathrm{conv}\big((0,0), (d,0), (0,e), (d,e)\big)$

$$X_\Delta = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_{de+d+e}$$

$\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \supset \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$

(plongement de Segre)

$$\begin{array}{ccc} X_\Delta & \longrightarrow & \mathbb{P}_{s-1} \\ \cup & \overset{i_\Delta}{\nearrow} & \uparrow \\ \mathbb{G}_m^2 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m^s \end{array} \qquad \begin{array}{c} [z_1 : \cdots : z_s] \\ \uparrow \\ (z_1, \ldots, z_s) \end{array}$$

$$(u_1, u_2) \longmapsto \big(u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ , \ (m_1, m_2) \in S \big)$$

X_Δ est l'adhérence de Zariski de $i_\Delta(\mathbb{G}_m^2)$ dans $\mathbb{P}_{s-1}$

En général $V(f)$ est une courbe lisse irréductible

↪ $V(f)$ dépend des coefficients c_m $\quad (c_m) \in \mathbb{P}\mathcal{O}(\Delta)$ espace projectif de dim $s-1$

faits généraux de géométrie algébrique ↕

- Il existe un ouvert dense U de cet espace projectif tel que si « $f \in U$ » $(c_m) \in U$ alors la courbe correspondante est lisse et irréductible.

- variante plus formelle : si les c_m sont algébriquement indépendants par ex. $K = k(c_m, m \in \Delta)$ indéterminées alors $V(f)$ est lisse et irréductible

Théorème de Bertini — demandera une discussion dans le cas d'un polygone général (quand X_Δ n'est pas lisse)

Invariants de courbes : (C courbe projective)

- genre géométrique $g\ (= p_g)$ $\qquad \tilde{C} \longrightarrow C$ résol. des singularités, $= p_a(\tilde{C})$
- genre arithmétique p_a $\qquad 1 - p_a = \chi(C, \mathcal{O}_C)$ car. d'Euler « cohérente »
- singularités $x \in C \rightsquigarrow \delta_x \geq 0$ mesure locale de la singularité

$\delta_x = 0 \Leftrightarrow x$ est lisse

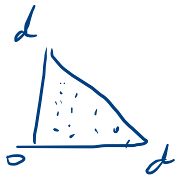
$\delta_x = 1 \Leftarrow x$ est un point double ordinaire

$$p_a = g + \sum_x \delta_x$$

(cas irréductible)

genre arithmétique de $V(f)$: $p_a = \mathrm{Card}(\mathring{\Delta})$

$\forall f \in \mathcal{O}(\Delta)$

Exemples : ① 

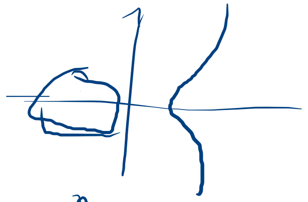
$p_a = (d-2) + \dots + 1 = \frac{(d-2)(d-1)}{2}$

$s = (d+1) + d + \dots + 1 = \frac{1}{2}(d+1)(d+2)$

g plusieurs possibilités $d = 1$ ou 2 : droite, conique

$p_a = 0 = g + \sum \delta_x$

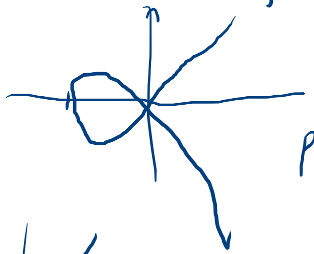
$g = \delta_x = 0$

$\Delta(f) \neq 0$ $\quad y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$ a, b, c distincts 

$d = 3$

$p_a = 1$

courbes elliptiques $g = 1$ (cas lisse)

$\Delta(f) = 0$ $\quad y^2 = x^2(x+1)$  point double node

courbes de genre 0 : un point double singulier

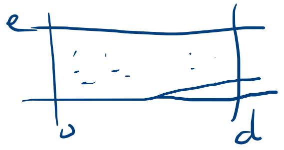
courbes rationnelles

($\tilde{C} \simeq \mathbb{P}_1 \longrightarrow C$

C peut être paramétré par des fonctions rationnelles)

$y^2 = x^3$  point de rebroussement cusp

(dessins dans $\mathbb{R}^2$)

② 

$s = (d+1)(e+1)$

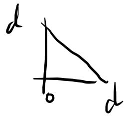
$p_a = (d-1)(e-1)$

Variété de Severi : Lieu dans $\mathbb{P}O(\Delta)$ des f qui donnent lieu à une courbe de type prescrit : $\tau = (g, (\delta_x))$ | ($V(f)$ intègre)

S°_τ variété quasiprojective (décrit par des équations en les c_m
– géométrie algébrique générale qui explique comment varie g_{δ_x} lorsque f varie.)

$\big\downarrow$

S_τ = adhérence de S°_τ pour la topologie de Zariski

Introduite par le mathématicien italien Francesco Severi (1921) (fasciste ...)
dans le cas $X_\Delta = \mathbb{P}_2$ 

g, δ points doubles

avec une preuve <u>incorrecte</u> que $S_{g,\delta}$ est irréductible (

Pierre Deligne, David Mumford, irréductibilité de l'espace des moduli des courbes de genre g (1974))

Joe Harris – preuve de la «conjecture de Severi» en 1984.

Questions :
- composantes ? parfois oui, Ilya Tyomkin
- dimension ? $\dim(S_{g,\delta}) = s - \delta - 1$ $\qquad S_{g,\delta} \subset \mathbb{P}_{s-1}$
  on espère :
  ? limité –
- <u>degré</u> : $L \subset \mathbb{P}_{s-1}$ sous espace linéaire de codimension $s - \delta - 1 = \dim(S_{g,\delta})$
  $L \cap S_{g,\delta}$ est fini : (générique) degré $(S_{g,\delta})$ = nombre de points d'intersection comptés avec multiplicité.

Mikhalkin donne une formule pour $S^{\Delta}_{g,\delta}$
(combinatoire)

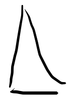
Kontsevich / Caporaso-Harris ont donné des formules de récursion pour $N_{g,\delta}$ ($X = \mathbb{P}_2$)

$$N_{0,d} = \sum_{\substack{a+b=d \\ a,b \geq 1}} a^2 b^2 \binom{3d-4}{3a-2} - a^3 b \binom{3d-4}{3a-1} N_{0,a} N_{0,b}$$

« $\delta = \dots$ »

(nb. de courbes 0 = genre 0, d = degré d passant par $3d-1$ points généraux)

$N^{\Delta}_{g,\delta}$ est le « nombre » de courbes de type (g,δ) dans X_Δ qui passent par $(\Delta + \delta - 1)$ points prescrits, en position « générale ».

$\Delta =$ 

$X_\Delta = \mathbb{P}_2$

$d=1$ $\quad s + \delta - 1 = 3 + 0 - 1 = 2 \qquad 3d-1 = 2$

$N_{0,1} = 1$: par $\underbrace{\text{deux}}_{2}$ points ~~généraux~~, il passe exactement une droite

$d=2$ $\quad s = 6, \quad s + \delta - 1 = 5 \qquad 3d-1 = 5$

$N_{0,2} = 1$ par 5 points généraux, il passe exactement une conique

Approche de Kontsevich : cohomologie de Gromov-Witten.

la formule de récursion traduit une associativité

Approche tropicale

K = corps + val absolue non archimédienne.

Mikhalkin donne une autre formule (in fine équivalente, mais pas de façon triviale)

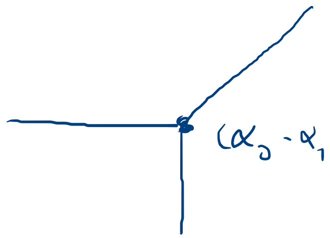
Preuve en deux étapes

(1) $[f] \in S$ variété de Severi $\quad v(f) \xrightarrow{\lambda} \mathcal{A}_f \subset \mathbb{R}^2$ amibe non archimédienne
sous espace polyédral de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1

passe par $p_1, \dots, p_m$ $\quad$ passe par $x_1 = \lambda(p_1), \dots, x_m = \lambda(p_m)$

dénombrement des amibes possibles. lorsque $x_1, \dots, x_m$ sont en position générale

cas des droites $\quad f = a_1 T_1 + a_2 T_2 + a_0 \quad\quad \alpha_j = \log |a_j|$

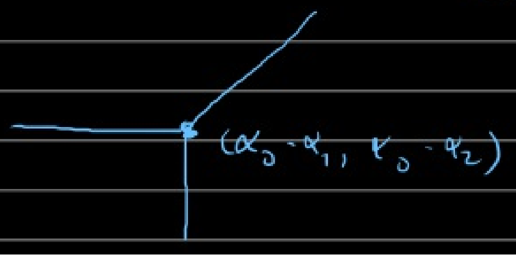


$(\alpha_0 - \alpha_1, \alpha_0 - \alpha_2)$

$\mathcal{A}_f$ = lieu de non différentiabilité de

$\sup(x_1 + \alpha_1, x_2 + \alpha_2, \alpha_0)$

Cas des droites $\qquad f = a_1 T_1 + a_2 T_2 + a_0 \qquad \alpha_j = \log|a_j|$

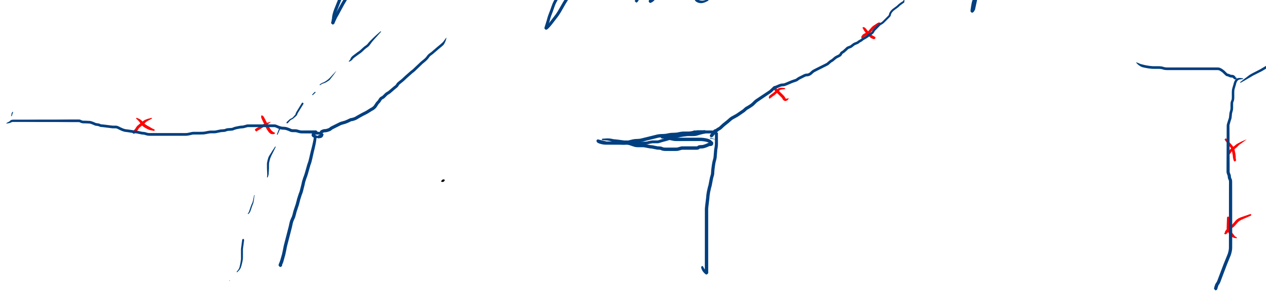


A_f = lieu de non différentiabilité de

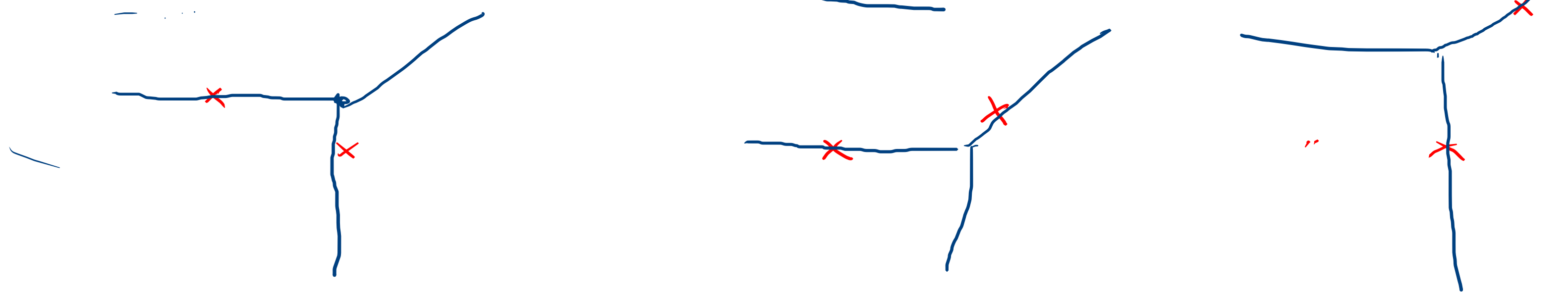
$$\sup(x_1+\alpha_1,\ x_2+\alpha_2,\ \alpha_0)$$

Il peut passer une infinité d'amibes par deux points donnés

si leur direction est $(1,0)$, $(0,1)$ $(1,1)$



mais pas sinon : une seule amibe est possible.



Étape essentiellement combinatoire
– modulo des informations sur les amibes :
- condition d'équilibre
- décomposition polyédrale de l'amibe
- décomposition duale du polytope de Newton

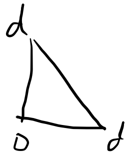
② Théorème de correspondance

(Hypothèse ?) $\mathcal{U}(f) \longrightarrow \mathcal{A}_f$ est "bijective"

$\Downarrow$ les x_i sont en position très générale — intersection dénombrable d'ouverts denses

(dans le cas $d=1$, $m=2$ cela signifie que la droite $(x_1 x_2)$ est de pente irrationnelle)

J'imagine suivre l'approche de Shustin

NB. Même si on ne s'intéresse qu'à $\Delta =$ 

la méthode conduit à introduire d'autres variétés toriques fournies par la décomposition polyédrale des polytopes de Newton.