11 mars 2021

L'espace des hypersurfaces tropicales

($n=2$)

$\Delta \subset \mathbb{R}^n$ polytope (de dim n) à sommets entiers

polynômes tropicaux $\quad f(x) = \sup\limits_{m \in \Delta \cap \mathbb{Z}^n} (\langle x, m \rangle - c_m) \quad c_m \in \mathbb{R}$

hypersurface tropicale $\quad V_f \; (= \mathcal{A}_f \ldots) \quad$ lieu de non différentiabilité de f.

f est convexe affine par morceaux

$\leftrightarrow$ décomposition polyédrale $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$, f est affine sur chaque cellule, minimale.

V_f est la réunion des cellules de dimension $n-1$

les cellules sont rationnelles :

. l'espace vectoriel directeur de leur espace affine engendré a une base dans $\mathbb{Q}^n$

notes de cours

f convexe affine par morceaux sur P

$\updownarrow$ décomposition polyédrale de P (polyèdre)

f^* ——— sur P^*

décomposition polyédrale de P^*

$\leftrightarrow$ décomposition polyédrale $\mathcal{C}^*$ de $\Delta = \mathrm{conv}(\Delta \cap \mathbb{Z}^n)$

à sommets dans $\Delta \cap \mathbb{Z}^n$

transformée de Legendre $\quad f^*(y) = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y \rangle - f(x))$

($+\infty$ hors de Δ)

<u>dualité</u> $\quad$ bijection $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$, $\quad C \mapsto C^*$

$\mathcal{C}^* = \{ C^*_x \}$

$\mathcal{C} = \{ C_y \}$

$x \in \mathbb{R}^n \quad \rightsquigarrow \quad C^*_x = \{ y \in \Delta , \; f^*(y) = \langle x, y \rangle - f(x) \}$

$y \in P^* \quad \rightsquigarrow \quad C_y = \{ x \in \Delta , \; f(x) = \langle x, y \rangle - f^*(y) \}$

$$\mathcal{C} = \{C_y\} \qquad \mathcal{C}^* = \{C^*_x\}$$

$$C \rightsquigarrow C^* = \bigcap_{x \in C} C^*_x$$

$$C = \bigcap_{y \in C^*} C_y \longleftarrow C^*$$

$$C \subset D \iff D^* \subset C^*$$

$$\operatorname{cone}(D - C)^\circ = \operatorname{cone}(C^* - D^*)$$

Rappel sur la polarité : (V Rev de dim finie)

$S \subset V \rightsquigarrow S^\circ = \{y \in V^* \ / \ \langle x, y\rangle \leq 1 \ \ \forall x \in S\}$ convexe fermée

$S \subset T \Rightarrow T^\circ \subset S^\circ$

$S \subset S^{\circ\circ}$ si $x \in S$, $y \in S^\circ$, $\langle x, y\rangle \leq 1$ donc $x \in S^{\circ\circ}$

appliqué à S° : $S^\circ \subset S^{\circ\circ\circ}$

$(S^\circ = S^{\circ\circ\circ})$

appliqué à S : $S^\circ \supset S^{\circ\circ\circ}$ égalité

dualité

(polyèdres de V contenant 0) $\leftrightarrow$ (polyèdres de V^* contenant 0)

$S \mapsto S^\circ$

$T^\circ \leftarrow T$

$S = S^{\circ\circ}$

(cones convexes polyédraux de V) $\leftrightarrow$ (cones convexes polyédraux de V^*)

S sous espace vectoriel $\Rightarrow S^\circ$ est l'orthogonal de S

S cone convexe polyédral $\Rightarrow S^\circ$ est un cone convexe polyédral

S polyèdre $\Rightarrow S^\circ$ est un polyèdre qui contient 0.

$S = P + C$

$= \operatorname{conv}(v_1, \dots, v_m) + \operatorname{cone}(w_1, \dots, w_k)$

$S^\circ = \{y \ / \ \langle v_i, y\rangle \leq 1, \ \langle w_j, y\rangle \leq 0\}$

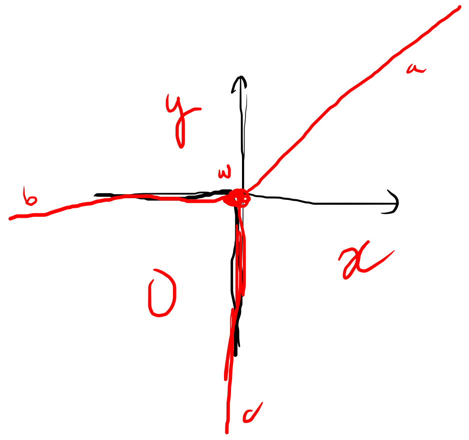
Exemples

$n = 2$ $\quad (x, y)$

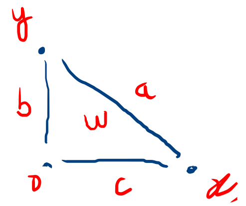
1. $f(x,y) = \sup(0, x, y)$

2. $f(x,y) = \sup(-1+2x, -1+2y, 1+x+y, x, y, 0)$.

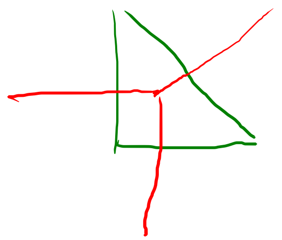
1)



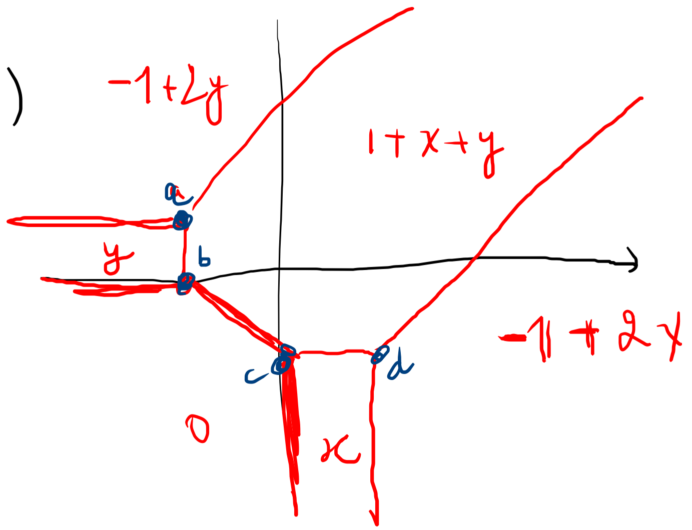
$\{w, a, b, x, y, 0\}$

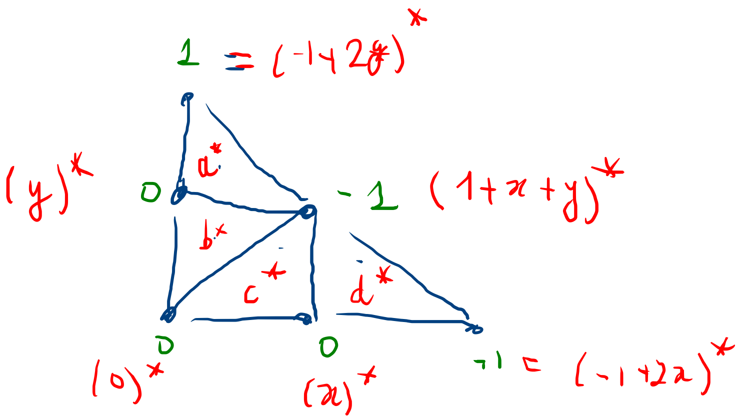


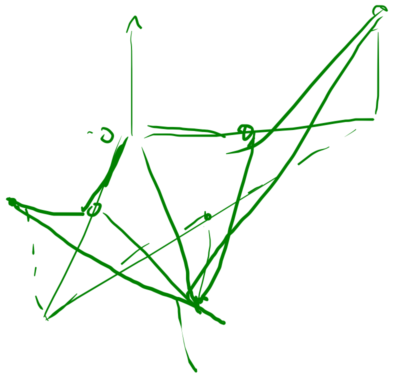
$\Delta = \mathrm{conv}((0,0), (1,0), (0,1))$

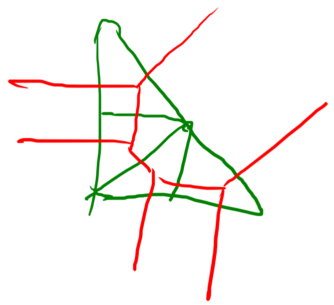


2)

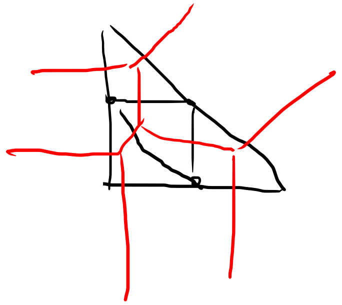


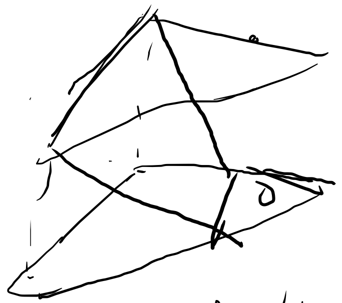




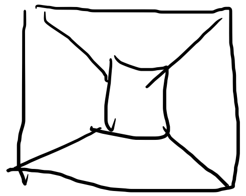


3)

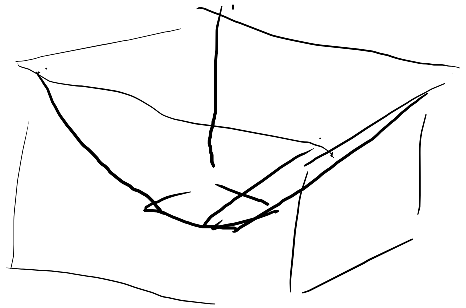




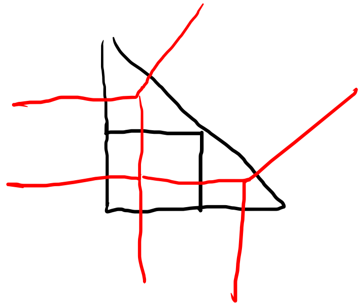
sup(0, x-1)

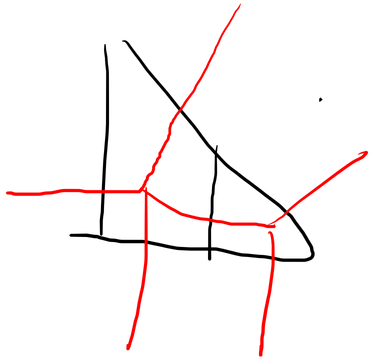


est régulière



4)

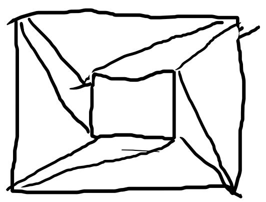




Remarque importante : toutes les décompositions polyédrales de Δ ne peuvent pas apparaître

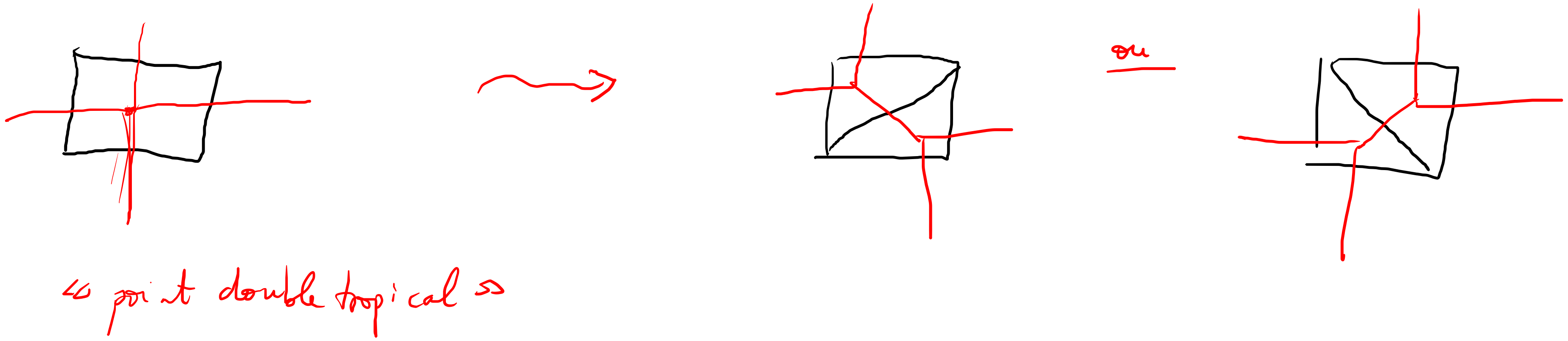
Gelfand-Kapranov-Zelevinsky

cohérentes
régulières



n'est pas régulière.

Lissification d'un point double



$f \rightsquigarrow V_f$ n'est pas injective

$V_f = V_g \iff f - g$ est affine

$g(x) = f(x) + \langle x, q \rangle + a$

$\Delta_g = \Delta_f + q$

si même polytope : $q = 0$

$f - g$ est constante.

$S(\Delta) = \Delta \cap \mathbb{Z}^n$

$\mathcal{M}_\Delta = \{ \text{hypersurfaces tropicales de polytope } \Delta \} \subseteq \mathbb{R}^{S(\Delta)} / \mathbb{R}$

$f \longmapsto (f^*(m), m \in \Delta \cap \mathbb{Z}^n)$

$\mathcal{M}_\Delta \subset \mathbb{R}^{S(\Delta)}/\mathbb{R}$

est un cône convexe, polyédral de dimension $\mathrm{Card}(S(\Delta))-1$

inégalités traduisent que f^* est convexe.

$\downarrow$ prendre f^* "strictement convexe"

Compactification de $\mathcal{M}_\Delta$.

f_k suite de fonctions affines par morceaux, exposants dans Δ

$$f_k(x) = \sup_{m\in\Delta\cap\mathbb{Z}^n} \left(\langle x,m\rangle - f_k^*(m)\right) \qquad \inf_m f_k^*(m) = 0$$

(X,d) espace métrique compact

$\leadsto$ distance de Hausdorff entre deux parties fermées de X

$$\delta(A,B) = \inf\Big(\inf\{t>0,\ A\subset B+B(0,t)\},\ \inf\{t>0,\ B\subset A+B(0,t)\}\Big)$$

$\delta(A,B) = \delta(B,A)$

$\delta(A,B) = 0 \iff A = B$

$\delta(A,C) \leq \delta(A,B) + \delta(B,C)$

$K_X = \{\text{fermés de } X\}$

compact pour la distance de Hausdorff

quitte à extraire une sous-suite, ($[0,+\infty]$ est compact)

on peut supposer $f_k^*(m) \to c_m \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

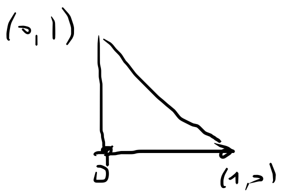
$$f(x) = \sup_{\substack{m\in\Delta\cap\mathbb{Z}^n \\ c_m<\infty}} \left(\langle x,m\rangle - c_m\right)$$

$\mathcal{M}_{\Delta'}$ $\quad \Delta' \subset \Delta$ sous polytope

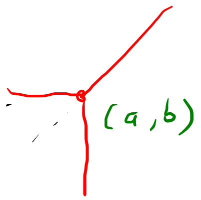
$\Delta' = \mathrm{conv}(\{m \mid c_m < \infty\})$.

$f_k \to f$ uniforme (sur tout compact)

$V_{f_k} \to V_f$ pour la topologie de Hausdorff sur les compacts



$$\mathcal{M}_\Delta = \mathbb{R}^3/\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$$



$$f(x,y) = \max(0, x-a, y-b)$$

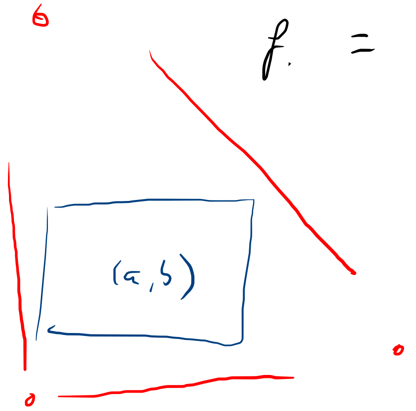
$$f_k(x) = \max(0, x-a_k, y-b_k)$$

* $a_k, b_k \to +\infty$

* $a_k \to a \quad b_k \to +\infty$
  $a_k \to$
*

$f = 0$

$f = \max(0, x-a)$



Condition d'équilibre

Les cellules de $\mathcal{C}$ de dim $n-1$ sont pondérées ($C \rightsquigarrow w_C$)

$f(x) = \sup(\langle x, m\rangle - f^*(m))$

C cellule de dim $n-1$ de $\mathcal{C}$

C borde deux cellules de dim n C_m et $C_{m'}$

sur C_m $f(x) = \langle x, m\rangle - f^*(m)$

sur $C_{m'}$ $f(x) = \langle x, m'\rangle - f^*(m')$

sur C: $f(x) = \langle x, m\rangle - f^*(m) = \langle x, m'\rangle - f^*(m')$

$\langle x, m'-m\rangle = f^*(m') - f^*(m)$ équation affine de $\langle C\rangle$

$m'-m$ est un vecteur normal à $\langle C\rangle$

$\in \mathbb{Z}^n$

dépend du choix d'une co-orientation de C « on traverse C en allant de m vers m' »

$w_C = \mathrm{pgcd}(m'_j - m_j) = \gcd(m'-m)$

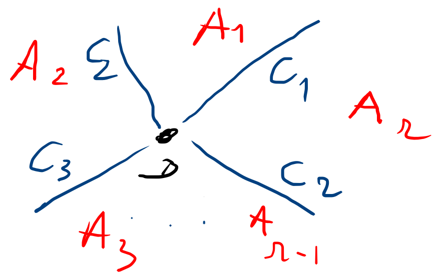
$e_C = (m'-m)/w_C$

$\underline{w_C \geq 1.}$

(A. Ducros, A.CL calibrage positif de C)

$m'-m = w_C\, e_C$

e_C est une fonction: co-orientation de $C \mapsto e_C \in \mathbb{Z}^n$



D cellule de dim $n-2$

$C_1, \dots, C_r$ cellules de dim $n-1$ qui bordent D

énumérées cycliquement (modulo r)

C_j borde A_j et A_{j-1} (mod. r)

co-orientation de C_j : $A_{j-1} \to A_j$.

$$w_{C_j} e_{C_j} = m_j - m_{j-1}$$

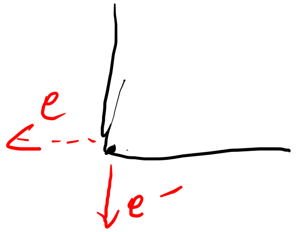
$A_j \Leftrightarrow m_j \in \Delta$ $\qquad A_j = \{x \mid f(x) = \langle x, m_j \rangle - f^*(m_j)\}$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{r} w_{C_j} e_{C_j} = 0}$$

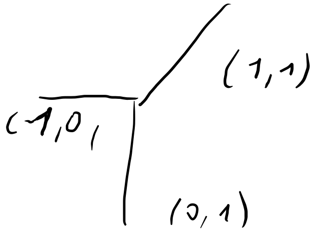
N'importe quoi n'est pas une hypersurface tropicale.

$w_{c_j} \geq 1$ L'enveloppe convexe des e_{c_j} contient 0

« totale concavité de V_f »

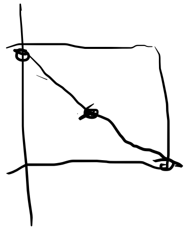


Cas d'une droite



$$(1,0) + (0,-1) + (-1,-1) = 0.$$

Note c correspond à une arête $[m, m']$ dans Δ (dans la déc. polyédrale de Δ associée à f)



$$w_c = \gcd(m'-m) = \mathrm{Card}\left([m,m'] \cap \mathbb{Z}^n\right) - 1$$

points $m + j e_c$, $0 \leq j \leq w_c$

« longueur (entière) » du segment $[m,m']$.

Théorème (Mikhalkin, peut-être antérieur)

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un sous espace polyédral purement de dim. $n-1$, rationnel, pondéré, équilibré $\left(\sum_{C \supset D} w_C e_C \in \langle \vec{D} \rangle \text{ pour tout } D \right)$ $\dim(D) = n-2$

Il existe (à addition d'une fonction affine près) une unique fonction convexe affine par morceaux f sur $\mathbb{R}^n$ telle que $S = V_f$

$C \subset S$ cellule de dim $n-1$

$\omega \in C$

$\mathrm{Vect}(C - \omega)$ sous esp. vectoriel rationnel de $\mathbb{R}^n$

$\mathrm{Vect}(C-\omega) \cap \mathbb{Z}^n$ réseau de dim $n-1$

$e_C \in \mathbb{Z}^n$ primitif qui prolonge une base de ce réseau

hypersurfaces tropicales

retenir qu'on a besoin d'un peu plus que de l'ensemble S
contrainte géométrique liée à la condition d'équilibre

Indication de la preuve

$\mathcal{C}_d$ = cellules de dim d de $\mathcal{C}$

S, $\mathcal{C}$ $\quad \dim(C) = n-1 \rightsquigarrow w_C \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

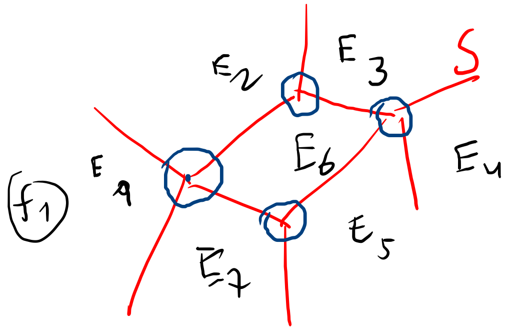
condition d'équilibre $\quad \sum_{C \supset D} w_C \, e_C \in \vec{D}$ $\quad (\forall D)$ $\Big\} \overset{?}{\rightsquigarrow} f$.

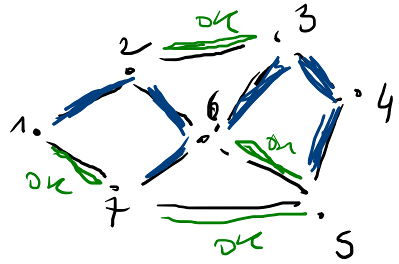
$$f \text{ est affine sur } \mathbb{R}^n - S = \bigcup_{\substack{E \in \mathcal{C} \\ \dim(E) = n}} \mathring{E}$$

graphe $\quad$ sommets $= \pi_0(\mathbb{R}^n - S) = \mathcal{C}_n$

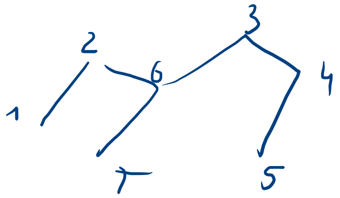
arête $\quad E \sim E'$ $\quad$ s'il existe une cellule $C \in \mathcal{C}_{n-1}$ qui borde E et E'

« graphe dual du dessin »





$f_1 = 0$



arbre maximal du graphe

permet de définir $f_j \quad j \in \pi_0(\mathbb{R}^n - S)$ de proche en proche.

$$f_{E'} - f_E = \langle x, w_C e_C \rangle + \underline{\text{cste}}$$

$C = E \cap E'$ $\quad$ choisie pour que $f_E|_C = f_{E'}|_C$

$V_f = S$

se vérifie sur chaque arête

- par construction sur celles de l'arbre maximal
- par la condition d'équilibre ensuite