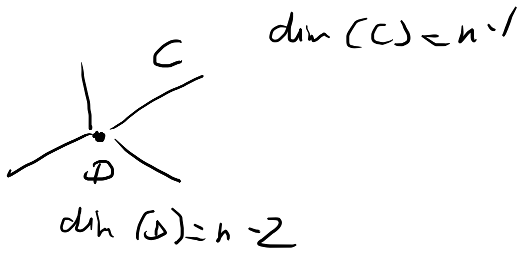
15 mars 2021

# Description des courbes tropicales

**Théorème** Soit $S$ un sous espace polyédral de $\mathbb{R}^n$, rationnel, purement de dimension $n-1$, pondéré et équilibré.

Il existe une fonction convexe affine par morceaux, unique à addition d'une fonction affine près, telle que $S = V_f$ (lieu de non différentiabilité de $f$)




$\mathbb{Z}^n \ni e_C$ vecteur normal à $C$ primitif

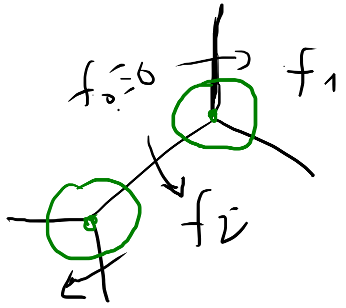
$w_C \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ poids

$$\sum_{C \supset D} w_C \, e_C \in \langle \vec{D} \rangle$$

condition d'équilibre

**Preuve** : faite la semaine dernière. Il manquait un argument.

Principe : construire $f$ composante connexe de $\mathbb{R}^n - S$ par composante connexe.

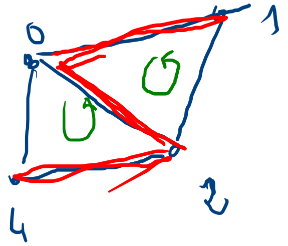



$G$ graphe « dual » : sommets $\pi_0(\mathbb{R}^n - S)$

arêtes cellules de dim $n-1$ de $S$

arbre maximal $\rightarrow$ définit $f$

Il reste à vérifier que $f$ convient : son comportement le long des arêtes restantes.




condition d'équilibre

$G$ est connexe $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n$ est connexe

$H_1(G)$ est engendré par les cycles liés à la condition d'équilibre

$\Leftrightarrow$ $H_1(\mathbb{R}^n) = 0$.

Rem. Il y a un formalisme de (super)formes différentielles en géométrie tropicale (Aaron Lagerberg 2012) et de (super) courants

$S$ équilibre $\leftrightarrow$ supercourants de bidegré $(1,1)$ le courant est fermé $d'[S] = d''[S] = 0$

Un lemme de Poincaré et $H_1(\mathbb{R}^n) = 0$ permettent de comprendre / démontrer géométriquement ce résultat.

Passage entre géométrie tropicale paramétrée par « équations »

Mikhalkin. courbe tropicale (paramétrée)

$\Gamma^*$ graphe fini,

Digression : définition d'un graphe

Essentiellement : des sommets et des arêtes
Subtilités : le formalisme est souple → arêtes multiples, boucles
→ réalisation géométrique fonctorielle.

Notion initiale : « graphe orienté » — CARQUOIS

Déf. Un carquois est la donnée d'un ensemble $S$ de sommets,
d'un ensemble $F$ de flèches
et de deux applications
source, $s : F \longrightarrow S$
but, $t : F \longrightarrow S$

Réalisation géométrique : $S \sqcup F \times [0;1] \Big/ \begin{array}{l} s(a) \sim (a,0) \\ t(a) \sim (a,1) \end{array}$

Déf. Un graphe est un carquois $(S, F, s, t)$
tel que $F$ est muni d'une involution $a \mapsto \bar{a}$ sans point fixe
telle que $s(\bar{a}) = t(a)$ et $t(\bar{a}) = s(a)$.

Carquois $\longrightarrow$ graphe

$(S, F, s, t) \rightsquigarrow S, \ F \times \{\pm 1\}$,

$s(a,1) = s(a)$ $\quad$ $s(a,-1) = t(a)$

$t(a,1) = t(a)$ $\quad$ $t(a,-1) = s(a)$

involution $(a,1) \leftrightarrow (a,-1)$.

graphe $\longrightarrow$ Carquois

Choix d'une orientation : choix, pour toute paire $\{a, \bar{a}\}$ de flèches du graphe, d'une des deux flèches.

Les carquois sont équivalents aux graphes orientés.

<u>Réalisation géométrique d'un graphe :</u>

$S \amalg A \times [0,1] \ / \quad s(a) \sim (a,0)$

$t(a) \sim (a,1)$

$(a,u) \sim (\bar{a}, 1-u)$

Valence d'un sommet d'un graphe : nombre d'arêtes issues de ce sommet

Nombres de Betti d'un graphe : $G = (S, A, s, t, a \mapsto \bar{a})$ (fini)

$$\mathbb{Z}^{(A)} \xrightarrow{u} \mathbb{Z}^{(S)}$$

$$[a] \mapsto [t(a)] - [s(a)]$$

$$\mathrm{Ker}(u) \supset \langle [a] + [\bar{a}] \rangle = \mathrm{Ker}_0(u)$$

$$H_0(G) = \mathrm{coker}(u) \simeq \mathbb{Z}^{b_0(G)}$$

$$H_1(G) = \mathrm{Ker}(u) / \mathrm{Ker}_0(u) \simeq \mathbb{Z}^{b_1(G)}$$

caractéristique d'Euler : $\chi(G)$ $b_0(G) - b_1(G)$ $\in \mathbb{Z}$

genre du graphe : $g = 1 - \chi(G)$ ($= b_1(G)$ si $G$ est connexe)

forêts : . graphes sans boucle non triviale $b_1(G) = 0$

arbres graphes connexes : $b_0(G) \leq 1$ $b_1(G) = 0$.

$\Gamma^*$ graphe fini $\qquad\qquad \Gamma = |\Gamma^*| - |\Gamma_1|$ ,

$\cup$

$\Gamma_1$ = sommets de valence 1 ( « sommets à l'infini » )

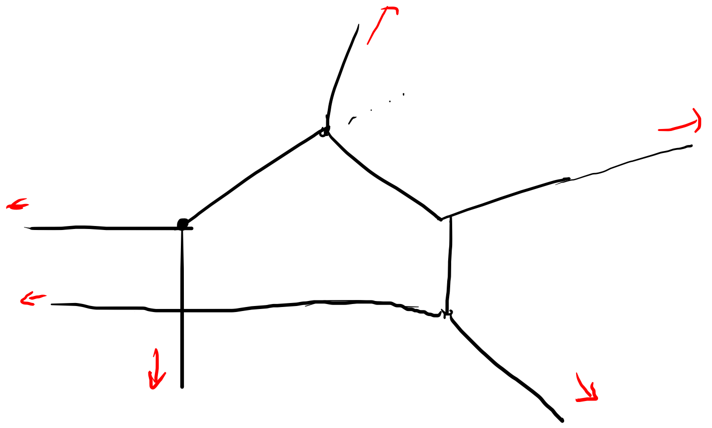
$h : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n$

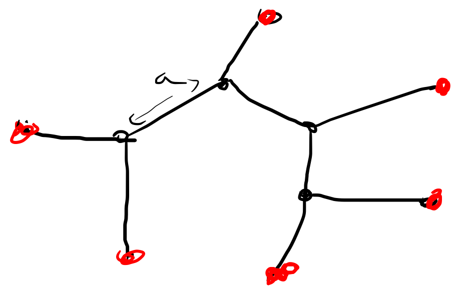
· propre et continue.

· rectiligne sur chaque arête.

· " identifiées à $[0, a]$ ou à $[0, +\infty[$ — et affines

$E \rightsquigarrow h'_E$ dérivé.





$$h'_E \in \mathbb{Z}^n \qquad h'_E = \underbrace{w_E}_{\in \mathbb{N}} \underbrace{e_E}_{\in \mathbb{Z}^n,\ \text{primitif}}$$

· condition d'équilibre en chaque sommet

$$\sum_{s(E)=x} h'_E = 0$$

$\rightsquigarrow h_*(\Gamma) \subset \mathbb{R}^n$

est un sous espace polyédral rationnel pondéré équilibré purement de dim 1

Estimation de sa dimension (subtil en général)
- les conditions linéaires ne sont pas forcément indépendantes.

<u>Cas fondamental</u> $\Gamma$ est un graphe 3-valent
$b$ = nombre de bouts = nombre de points de valence 1 dans $\Gamma^*$
$g$ = genre $(\Gamma)$

$\Gamma$ 3-valent
$s$ sommets de valence 3
$b$ ——— 1

$e$ arêtes (bornées)
$b$ bouts

$a$ = nb. d'arêtes (bornées) dans la forêt

la dimension de ce polyèdre est $\geq b + (n-3)(1-g)$

$$\boxed{3s + b = 2(e+b)}$$ compter (sommet, arête issue de)

$$\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma^*) = (s+b) - (e+b) = \boxed{s - e = 1-g}$$

$$\chi(\text{forêt}) = b_0(\text{forêt}) - b_1(\text{forêt}) = b_0(\Gamma) = (s+b) - (b+a)$$

$$\boxed{b_0(\Gamma) = s - a}$$

$$\dim \geq n\, b_0(\Gamma) + a - (n-1)(e-a) = b + (n-3)(1-g).$$

On peut "allonger" les arêtes bornées de $\Gamma$

$\rightsquigarrow$ déformation $\tilde{h}$ de $h$

Dans cette déformation : $\tilde{h}(E) \parallel h(E)$

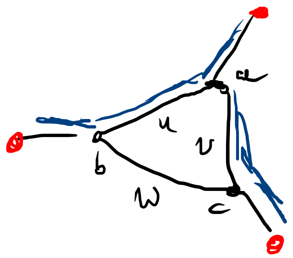
on conserve le parallélisme

<u>Type combinatoire</u> d'une courbe tropicale de graphe $\Gamma$ $(= |\Gamma^*| - |\Gamma_1|)$ fini

$$h_1 \sim h_2 \iff h_1'(E) \parallel h_2'(E)$$

? Espace des courbes tropicales de type combinatoire donné.

<u>Prop.</u> C'est l'intérieur d'un polyèdre.




On choisit dans $\Gamma$ une forêt maximale

on fixe $h(a) \in \mathbb{R}^n$ détermine la branche infinie qui part de a et le début des deux branches bleues.

$\underline{\underline{2}}$ paramètres $> 0$

en b : branches infinies fixées. $\Big\}$ on parcourt la forêt bleue

reste une équation par arête restante $\overrightarrow{h(b)h(c)} \parallel h'_u$

équation linéaire.

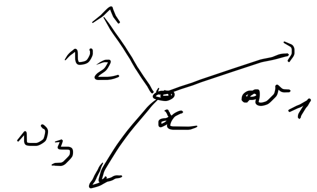
- G. Mikhalkin (2005) Enumerative tropical algebraic geometry in $\mathbb{R}^2$.
- E. Shustin (2006) A tropical approach to enumerative geometry.
- A. Gathmann, H. Markwig (2007 – ).

* * *

$\boxed{n=2}$ Courbe tropicale <u>lisse</u> : simple et chaque sommet a <u>multiplicité 1</u>.

<u>simple</u> : $\Gamma$ est 3-valent
$h : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ est une immersion
$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x$ a au plus deux antécédents,
et s'il en a deux, ce ne sont pas des sommets de $\Gamma$

<u>multiplicité</u> en un sommet 3-valent




$v_j = \underset{\in \mathbb{N}}{w_j} \cdot \underset{\in \mathbb{Z}^2}{e_j}$

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

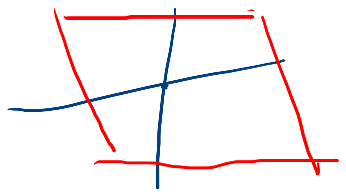
$$m_x = |v_1 \wedge v_2| = |v_2 \wedge v_3| = |v_3 \wedge v_1|$$

↳ multiple de $w_1 w_2$, $w_2 w_3$, $w_3 w_1$.

**Prop.** $h : \Gamma \to \mathbb{R}^2$ a. $\quad n = 2 \quad \rightsquigarrow \quad h_*(\Gamma) = V_f$ $\quad$ $f$ affine par morceaux convexe

$f \leftrightarrow$ polytope de Newton subdivision duale de $V_f$

$h : \Gamma \to \mathbb{R}^2$ est simple si et seulement si la subdivision de $h_*(\Gamma)$ n'a que des triangles et des parallélogrammes.



sommets 3-valents $\leftrightarrow$ triangles

croisement de deux branches $\leftrightarrow$ parallélogrammes

$$\chi(V_f) = \frac{1}{2}\big(\underbrace{b}_{\text{nombre de bouts}} - \underbrace{t}_{\text{nombre de triangles}}\big)$$

**Prop.** Si $h : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ est simple, alors

1) c'est le seul paramétrage simple de $h_*(\Gamma)$
2) tout autre paramétrage de $h_*(\Gamma)$ est de genre $> g(\Gamma)$.

En effet : la seule ambiguité est aux points doubles de $h_*(\Gamma)$

+ si c'est un paramétrage simple : pas de point quadruple
donc pas d'ambiguité

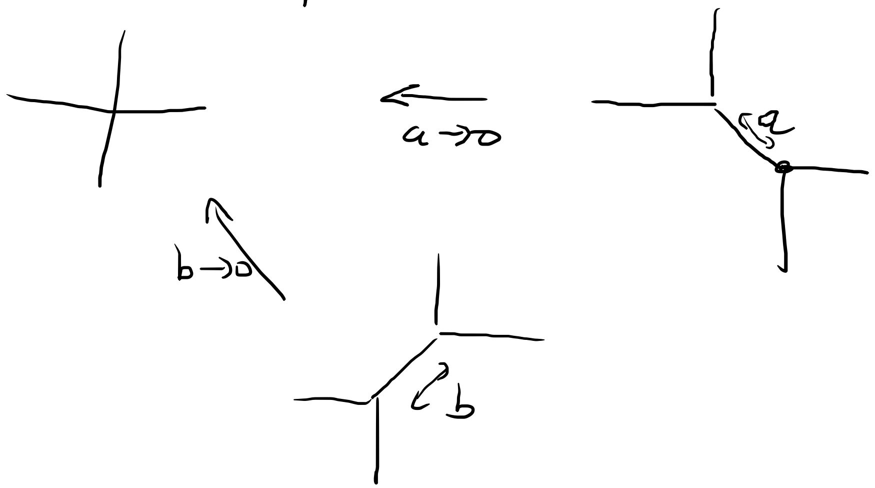
+ si c'est un paramétrage non simple : $\tilde{h} : \tilde{\Gamma} \to \mathbb{R}^n$
$\tilde{\Gamma}$ est déduit de $\Gamma$ en identifiant deux points
qui donnent le point double
$\longrightarrow$ augmente le genre de 1.

Intérêt des courbes lisses : elles n'ont pas de déformation non triviale

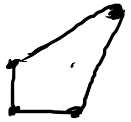
$h : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\qquad$ $h' : \Gamma' \longrightarrow \mathbb{R}^n$ autre type combinatoire.
$h'_t$
$t \to 0 \qquad h'_t(\Gamma) \longrightarrow h(\Gamma)$

Ex. de déformation non triviale.

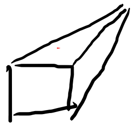
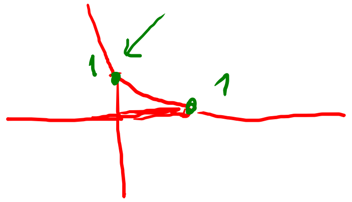
(1) « lissification d'un point double »




$a \to 0$

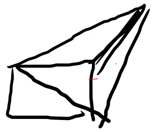
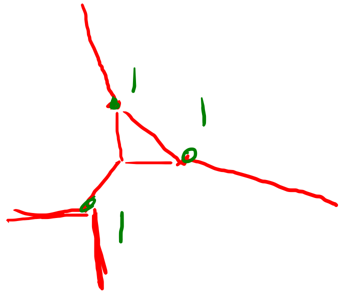
(2) $\Delta =$  $= \mathrm{conv}\big( (0,0) \quad (1,0) \quad (0,1) \quad (2,2) \big)$

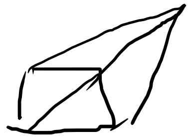
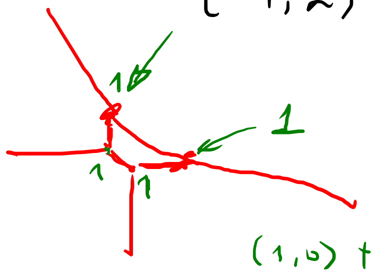
a)  non simple. ( point quadruple )

b)  

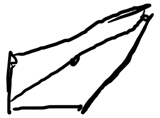
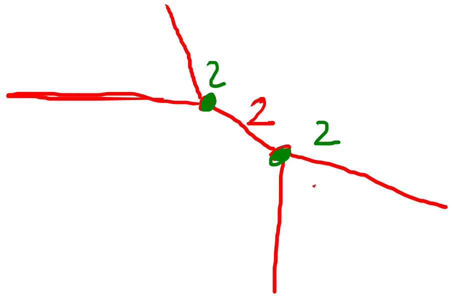

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$(-1,2) + (0,-1) + (1,-1) = 0.$$

c)  

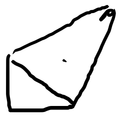
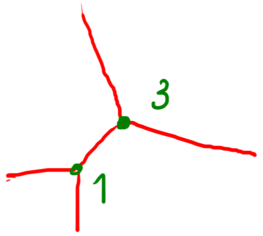

e)  


$$(1,0) + (0,-1) + (-1,1) = 0$$

d)  


$$(-1,0) + (-1,2) = 2\,(1,-1)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

f)  


$$(-1,2) + (2,-1) + (1,1) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

# Position générale en géométrie tropicale

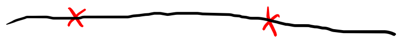
**Déf.** $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^2$ sont en position générale tropicale si pour toute courbe tropicale $h : \Gamma \to \mathbb{R}^2$, genre $g$, $b$ bouts, passant par ces points,

alors
- ou bien $g + b - 1 > m$
- ou bien $\left[ \begin{array}{l} g + b - 1 = m \\ h \text{ est simple} \\ \text{les } p_i \text{ ne sont pas des sommets} \end{array} \right.$

Une courbe trop. simple de genre $g$ avec $b$ bouts dépend de $g+b-1$ paramètres.

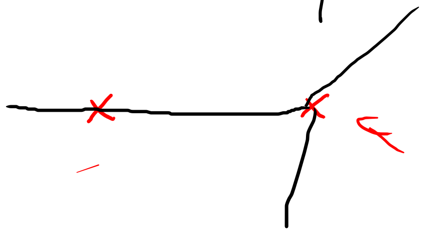
**Ex.** $m = 2$ : cela signifie que la pente $(p_1 p_2)$ est irrationnelle

- si cette pente est $0$ disons



$g = 0 \quad b = 2$

$g + b - 1 = 1 < 2$



← sommet

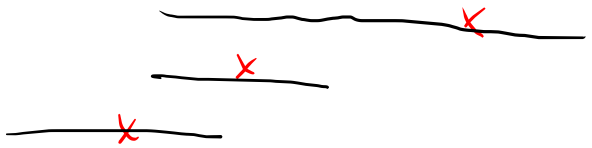
$g = 0$, $b = 3$

$g + b - 1 = 2$

-  $\Rightarrow g + b - 1 \geq 3$

(argument omis)

Remarque 1) Par $m$ points $p_1, \dots, p_m$ on peut faire passer une courbe tropicale $h : \Gamma \to \mathbb{R}^2$ avec $g + b - 1 = m$



$\Gamma$ $m$ composantes connexes

$\chi(\Gamma) = m$ $\qquad g(\Gamma) = 1 - m$

$b = 2m$ $\qquad g + b - 1 = m.$

2) Si $p_1, \dots, p_m$ sont en position générale, alors $(p_1, \dots, p_q)$ aussi pour $q \leq m$.

En effet : si $h : \Gamma \to \mathbb{R}^2$ passe par $p_1, \dots, p_q$ et contredit l'hypothèse « $p_1, \dots, p_q$ en pos. générale »

$\Gamma' = \Gamma \sqcup (m-q)$ droites

$h' : \Gamma' \to \mathbb{R}^2$ passe par $p_1, \dots, p_m$.

$\chi(\Gamma') = \chi(\Gamma) + m - q \qquad g(\Gamma') = g(\Gamma) + q - m$

$b(\Gamma') = b(\Gamma) + 2(m-q)$

$g' + b' - 1 = g + q - m + b + 2(m-q) - 1$

$= \underbrace{g + b - 1}_{q} + m - q = m$

# Th de Mikhalkin

$\Delta$ polygone $\qquad b = \mathrm{Card}\,(\partial(\Delta) \cap \mathbb{Z}^2)$

$g =$

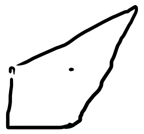
$\mathcal{P} = (p_1, \cdots, p_n)$ en position générale

$N_g(\Delta, \mathcal{P})$ nombre de courbes tropicales de polyèdre de Newton $\Delta$ passant par $\mathcal{P}$ genre $g$.

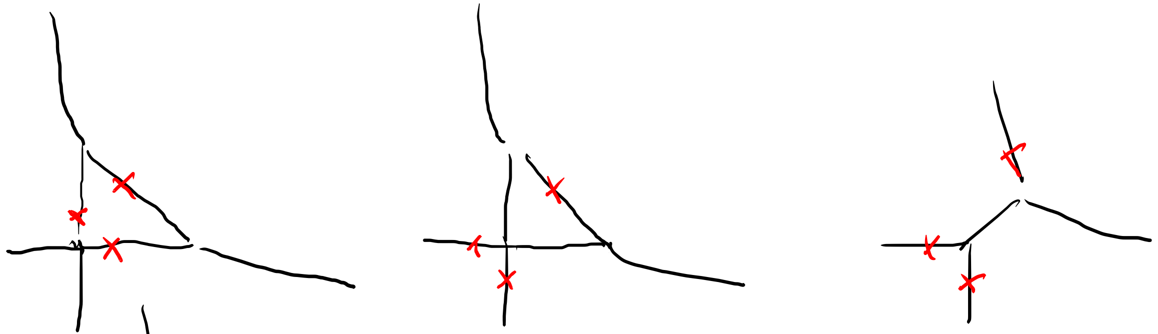
comptées avec multiplicité.

ne dépend pas du choix de $\mathcal{P}$.

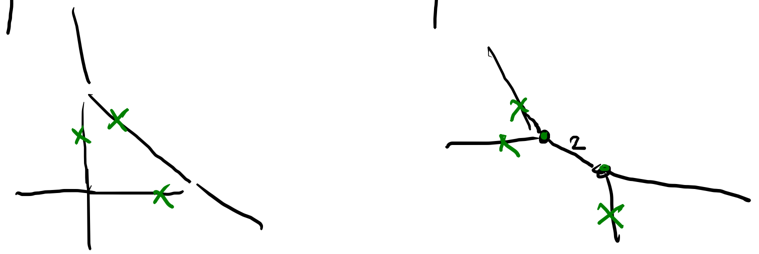
$$\mu(C) = \prod_{x \text{ sommet}} \mu_x$$

$\Delta =$ 

Exemple.



$N_g(\Delta) = 5 = 1 + 1 + 3$




$N_g(\Delta) = 5 = 1 + 4$