Variétés toriques

Un chapitre de géométrie algébrique où la géométrie combinatoire / convexe rejoint l'algèbre

Voie d'accès à des conjectures combinatoires (McMullen, prouvée par Stanley) concernant le nombre de faces de polytopes.
Liées au polynôme d'Erhart d'un polytope qui compte les points entiers dans ce polytope

$\mathbb{R}^n \supset \Delta$ polytope à sommets entiers $(\subset \mathbb{Z}^n)$

$P_\Delta(t) = \mathrm{Card}(t\Delta \cap \mathbb{Z}^n) \qquad t \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

est un polynôme en t

$\leftrightarrow$ polynôme de Hilbert d'une variété X_Δ.

<u>torique</u> $\leftarrow$ tore $\rightarrow$

$S_1 \times S_1$ $\qquad S_1^{\,n}$

$\searrow$ $\mathbb{C}^\times$ $\quad (\mathbb{C}^\times)^n$ $\quad \mathbb{G}_m^{\,n}$ $\qquad$ groupe algébrique

§ 1. Tores algébriques, caractères, graduations

$\mathbb{G}_m^n$ tore de dimension n

$= \mathrm{Spec}\,(K[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}])$

K anneau de base ($K = \mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$, ...)

si R est une K-algèbre

$$\mathbb{G}_m^n(R) = \mathrm{Hom}_{K\text{-sch}}(\mathrm{Spec}(R), \mathrm{Spec}(K[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]))$$

$$= \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(K[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}], R)$$

$$= (R^\times)^n$$

$$f \longmapsto (f(T_1), \dots, f(T_n))$$

description du schéma par ses « points » (R-points) R variable

fonctoriellement

$R \xrightarrow{u^*} S$ $\qquad$ $\mathrm{Spec}(S) \xrightarrow{u} \mathrm{Spec}(R)$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(S) \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "\varphi\circ u"'] & \mathrm{Spec}(R) \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{G}_m^n \end{tikzcd}$$

$\varphi \longmapsto \varphi \circ u$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m^n(R) & \longrightarrow & \mathbb{G}_m^n(S) \\ \wr & & \wr \\ (R^\times)^n & \longrightarrow & (S^\times)^n \\ (a_1, \dots, a_n) & \longmapsto & (u^*(a_1), \dots, u^*(a_n)) \end{array}$$

$\varphi \mapsto (\varphi^*(T_1), \dots, \varphi^*(T_n))$

$\psi \mapsto (\psi^*(T_1), \dots, \psi^*(T_n))$

$\psi = \varphi \circ u$

$\psi^* = u^* \circ \varphi^*$

Les structures de groupes de $(K^\times)^n$, compatibles aux morphismes $u^\vee$, fait de $\mathbb{G}_m^n$ un schéma en groupes (avatar en géométrie algébrique des groupes de Lie de la géométrie différentielle)

$$\mathbb{G}_m^n \times_K \mathbb{G}_m^n \xrightarrow{\mu} \mathbb{G}_m^n \qquad \text{loi de groupe}$$

$$e : \mathrm{Spec}(K) \longrightarrow \mathbb{G}_m^n \qquad \text{élément neutre} \qquad \mathbb{G}_m^n(K) = (K^\times)^n \ni (1, \dots, 1)$$

$$\mathbb{G}_m^n \xrightarrow{i} \mathbb{G}_m^n \qquad \text{inversion}$$

(axiomes / propriétés de μ, e, i qui traduisent l'associativité et la commutativité des lois de groupes sur $(K^\times)^n$, le fait que $(1, \dots, 1)$ est neutre, que l'inverse soit donné par i)

cela se traduit également en termes de la K-algèbre $K[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]$ (algèbre de Hopf)

$$K[T^{\pm 1}] \xrightarrow{\mu^*} K[T^{\pm 1}] \otimes K[T^{\pm 1}] \qquad \mu^*(T_i) = T_i \otimes T_i$$

$$K[T^{\pm 1}] \xrightarrow{e^*} K \qquad e^*(T_i) = 1$$

$$K[T^{\pm 1}] \xrightarrow{i^*} K[T^{\pm 1}] \qquad i^*(T_i) = T_i^{-1}$$

(axiomes / propriétés qui traduisent ...)

Un tore (déployé) est un schéma en groupes T isomorphe à $\mathbb{G}_m^n$

(même intérêt dans cette définition que de faire la différence entre un ev. et $\mathbb{R}^n$)

Un caractère d'un tore T est un morphisme de tores $T \to \mathbb{G}_m$
cocaractère $\mathbb{G}_m \to T$

$\mathcal{X}^*(T)$ caractères de T - groupe abélien $T \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} \mathbb{G}_m$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "(\varphi,\psi)"] \arrow[rr, bend right, "\varphi\psi"'] & \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \arrow[r, "\mu"] & \mathbb{G}_m \end{tikzcd}$$

$\mathcal{X}_*(T)$ cocaractères de T - groupe abélien $\mathbb{G}_m \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} T$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_m \arrow[r, "(f,g)"] \arrow[rr, bend right, "fg"'] & T \times T \arrow[r, "\mu_T"] & T \end{tikzcd}$$

fonctorialité $S \xrightarrow{\alpha} T$ morphismes de tores

$\alpha^* : \mathcal{X}^*(T) \to \mathcal{X}^*(S)$ $\quad \varphi \mapsto \varphi \circ \alpha$

$\alpha_* : \mathcal{X}_*(S) \to \mathcal{X}_*(T)$ $\quad f \mapsto \alpha \circ f$.

Proposition : 1) . $Id_{\mathbb{G}_m} : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ est une base de $\mathcal{X}^*(\mathbb{G}_m)$ et de $\mathcal{X}_*(\mathbb{G}_m)$

. Tout morphisme $\mathbb{G}_m \xrightarrow{f} \mathbb{G}_m$ est de la forme $f^* : k[T^{\pm 1}] \to k[T^{\pm 1}]$, $T \longmapsto T^n$

pour un unique entier n.

2) $$\mathcal{X}_*(T \times T') \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}_*(T) \times \mathcal{X}_*(T')$$

$$\mathcal{X}^*(T \times T') \xleftarrow{\sim} \mathcal{X}^*(T) \times \mathcal{X}^*(T')$$

En particulier : si $T \underset{\alpha}{\xrightarrow{\sim}} \mathbb{G}_m^n$, $\mathcal{X}^*(T) \underset{\alpha_*}{\xrightarrow{\simeq}} \mathbb{Z}^n$ $\mathcal{X}_*(T) \underset{\alpha^*}{\xleftarrow{\simeq}} \mathbb{Z}^n$

3) $$\mathcal{X}^*(T) \times \mathcal{X}_*(T) \longrightarrow \mathbb{Z}$$ est une dualité parfaite

$\varphi : T \to \mathbb{G}_m$ $f : \mathbb{G}_m \to T$ $\qquad \varphi \circ f : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$

Preuve : La partie 1) n'est pas formelle

$f : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ $\quad f^* : K[T^{\pm 1}] \longrightarrow K[T^{\pm 1}]$

$T \longmapsto \varphi(T) \in K[T^{\pm 1}]^\times$ inversible.

$\varphi(T) = a\,T^m \quad m \in \mathbb{Z}$.

$f \circ e = e \qquad \varphi(1) = 1 \qquad a = 1$.

$f = f_m \qquad f_m^*(T) = T^m$.

2) est formel

3) se ramène au cas $T = \mathbb{G}_m^n$

$$\begin{array}{ccccc} X^*(\mathbb{G}_m^n) & \times X_*(\mathbb{G}_m^n) & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \\ \varphi & , f & \longmapsto & \langle f, \varphi \rangle & (\text{ou } \langle \varphi, f \rangle) \\ (m_1, \dots, m_n) & (p_1, \dots, p_n) & \longmapsto & \sum m_i p_i & (= \langle m, p \rangle \text{ ou } \langle p, m \rangle) \end{array}$$

$K[T^{\pm 1}] \to K[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]$
$T \longmapsto T_1^{m_1} \cdots T_n^{m_n}$

$K[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}] \to K[T^{\pm 1}]$
$T_1 \to T^{p_1}$
$\dots$
$T_n \to T^{p_n}$

$K[T^{\pm 1}] \to K[T^{\pm 1}]$
$T \to T^{p_1 m_1 + \dots + p_n m_n}$

Action de tores sur un schéma

En topologie une action d'un groupe G sur un espace X est donnée par une application continue $\alpha : G \times X \to X$
+ axiomes qui expriment que c'est une action de groupes :

$$\begin{cases} \alpha(e, x) = x \\ \alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x) \end{cases}$$

Idem en géométrie algébrique : si G est un K-schéma en groupes et X un K-schéma,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"] & \\ \mathrm{Spec}(K) \arrow[r, "e"] & G \end{tikzcd}$$

une action de G sur X est un morphisme de K-schémas
$\alpha : G \times_K X \longrightarrow X$

vérifiant les deux axiomes : (1)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{(e \circ p, Id_X)}"] \arrow[rr, bend right, "Id_X"'] & G \times X \arrow[r, "\alpha"] & X \end{tikzcd}$$

$$\alpha \circ (e \circ p, Id_X) = Id_X$$

(2)

$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "{(\mu, Id_X)}"] \arrow[dr, "{(Id_G, \mu)}"'] & G \times X \arrow[r, "\mu"] & X \\ & G \times X \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

$$\mu \circ (\mu, Id_X) = \mu \circ (Id_G, \mu).$$

Point de vue fonctoriel meilleur; plus clair en tout cas:

pour toute k-algèbre R, $\alpha(R) : G(R) \times X(R) \longrightarrow X(R)$ est une action du groupe $G(R)$ sur l'ensemble $X(R)$.

On peut déterminer les actions d'un tore sur un K-schéma affine

T tore $\quad M = \mathcal{X}^*(T) \quad (\simeq \mathbb{Z}^n) \qquad \mathcal{O}(T) \simeq K^{(M)}$

$\mathbb{G}_m^n = \operatorname{Spec}(K\underbrace{[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]}_{= K^{(\mathbb{Z}^n)}})$

$X = \operatorname{Spec}(A) \qquad K$-algebre.

$T \times_K X \xrightarrow{\alpha} X \qquad \alpha^* : A \longrightarrow K^{(M)} \otimes_K A$

$\alpha^*(a) = \sum_m T^m \otimes \alpha_m(a)$

$\alpha_m : A \to A \quad K$-linéaire

$f = \sum c_m T^m$, $m \in \mathbb{Z}^n$ polynôme de Laurent

$T \times T \times T \xrightarrow{(\mu, \mathrm{Id})} T \times X \xrightarrow{\alpha} X$

$T \times T \times X \xrightarrow{(\mathrm{id}_T, \alpha)} T \times X \xrightarrow{\alpha} X$

$A \xrightarrow{\alpha^*} k^{(M)} \otimes A \underset{\mathrm{Id}_{k^{(n)}} \otimes \alpha^*}{\overset{\mu^* \otimes \mathrm{Id}_A}{\rightrightarrows}} k^{(M)} \otimes k^{(M)} \otimes A$

α est une action : ① $a = \sum_{m \in M} \alpha^*_m(a)$

② $\sum_{m,n} \alpha_n^*(\alpha_m^*(a))\, T^m S^n = \sum_n \alpha_n^*(a)(ST)^n$

projecteurs « orthogonaux » $\alpha_n^* \circ \alpha_m^* = 0$ si $n \neq m$

$= \mathrm{id}$ si $n = m$.

$A_n = \alpha_n^*(A) = \mathrm{im}\ (\alpha_n^*)$

$A \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_n A_n$ α donne une graduation de A par des sous $k$ev.

Isomorphisme d'algèbres. $A_m \cdot A_n \subset A_{m+n}$

Déf. Une M-graduation de la K-algèbre A est une famille $(A_m)_{m \in M}$ de sous-modules de A tels que

$$\left| \begin{array}{l} A = \bigoplus A_m \\ A_m A_n \subset A_{m+n} \end{array} \right.$$

Les M-graduations de A correspondent ainsi aux actions du tore T de caractères M sur $\mathrm{Spec}(A)$

§2. Variétés toriques

T K-tore

Une variété torique (de tore T) est un K-schéma (de type fini, séparé, intègre) muni d'une action de T dont un point $x \in X(K)$ possède une orbite dense.

$T \cdot x = O_x$ orbite de x est un ouvert de T

T_x = stabilisateur de x — sous schéma en groupes de T

$\rightsquigarrow$ tore quotient T/T_x

de caractères les caractères φ de T tels que $\varphi|_{T_x} \equiv 1$.

(gr. abélien libre de rang $\leq \dim(T)$)

X est une variété torique de tore T/T_x.

permet de supposer que $T_x = \{1\}$. $\quad T \cdot x = O_x \simeq T$

X contient un ouvert dense U stable par l'action de T

$$T \times X \xrightarrow{\alpha} T \;,\quad T \times \underset{\underset{T}{\wr\!\wr}}{U} \to T$$

$$T \times T \xrightarrow{\mu} T$$

« compactification (partielle) équivariante de T ».

Exemples 1) $\mathbb{G}_m \subset \mathbb{G}_m$

$\mathbb{G}_m \subset \mathbb{P}_1$ $\qquad$ $\mathbb{G}_m \subset \mathbb{A}^1$

$t \mapsto [1:t]$ $\qquad$ inclusion

$t \cdot [x_0 : x_1] = [x_0 : t x_1]$ $\qquad$ $t \cdot x = tx$

R K-algèbre $\quad t_i \in R^\times \quad x_i \in R$

2) $\mathbb{G}_m^n \subset \mathbb{A}^n$ $\qquad$ $\underset{\in \mathbb{G}_m^n(R)}{(t_1, \dots, t_n)} \cdot \underset{\in \mathbb{A}^n(R)}{(x_1, \dots, x_n)} = (t_1 x_1, \dots, t_n x_n)$

$R^{\times n} \times R^n \longrightarrow R^n$ action.

$\mathbb{G}_m^n \subset \mathbb{P}_n$ $\qquad$ $(t_1, \dots, t_n) \cdot [x_0 : \dots : x_n] = [x_0 : t_1 x_1 : \dots : t_n x_n]$

$\mathbb{G}_m^{n+1} \times \mathbb{A}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{A}^{n+1}$ $\qquad$ $(t_0, \dots, t_n) \cdot (x_0, \dots, x_n) = (t_0 x_0, \dots, t_n x_n)$

$\mathbb{G}_m^{n+1} \times \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n$ $\qquad$ $(t_0, \dots, t_n) \cdot [x_0 : \dots : x_n] = (t_0 x_0 : \dots : t_n x_n)$

le point $[1 : \dots : 1]$ a un stabilisateur non trivial : $t_0 = t_1 = \dots = t_n$

3) T tore de caractères M $\qquad T = \mathbb{G}_m^d \qquad M = \mathbb{Z}^d$

$\mathcal{A} = (m_1, \dots, m_n) \in M^n$

$T \longrightarrow \mathbb{G}_m^n \circlearrowleft \mathbb{A}^n$

$\circlearrowleft \mathbb{P}_{n-1}$

$Y_{\mathcal{A}}$ = adhérence dans $\mathbb{A}^n$ de l'orbite du point $(1, \dots, 1)$ sous l'action de T

$X_{\mathcal{A}}$ ——— $\mathbb{P}_{n-1}$ ———

L'Idéal de $Y_{\mathcal{A}}$ dans $K[T_1, \dots, T_n] = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.

est engendré par les «binômes» $T^p - T^q$ $\quad T_1^{p_1} \cdots T_n^{p_n} - T_1^{q_1} \cdots T_n^{q_n}$

où $p, q \in \mathbb{N}^n$ satisfont $\sum p_i m_i = \sum q_i m_i$

L'idéal homogène de $X_{\mathcal{A}}$ dans $K[T_1, \dots, T_n]$ est engendré par ceux de ces binômes $T^p - T^q$ qui sont homogènes

$$\begin{cases} \sum p_i m_i = \sum q_i m_i \\ \sum p_i = \sum q_i \end{cases}$$

Preuve $\quad T \xrightarrow{t} \mathbb{A}^n \qquad \varphi : K[T_1,\dots,T_n] \to K^{(M)}$

$$T_i \mapsto T^{m_i}$$

$$I(Y_t) = \mathrm{Ker}(\varphi)$$

$p, q \in \mathbb{N}^n$ tq $\sum p_i m_i = \sum q_i m_i$, alors $\varphi(T^p - T^q) = 0$

car $\varphi(T^p - T^q) = \varphi(T_1^{p_1} \cdots T_n^{p_n}) - \varphi(T_1^{q_1} \cdots T_n^{q_n})$

$$= T^{p_1 m_1} \cdots T^{p_n m_n} - T^{q_1 m_1} \cdots T^{q_n m_n} = 0.$$

Inversement, $P = \sum_{p \in \mathbb{N}^n} c_p T^p \in \mathrm{Ker}(\varphi)$

$$0 = \varphi(P) = \sum c_p \, \varphi(T_1^{p_1} \cdots T_n^{p_n}) = \sum_{p \in \mathbb{N}^n} c_p T^{p_1 m_1 + \cdots + p_n m_n}$$

$$= \sum_{m \in M} \Big(\sum_{\substack{p \text{ tq} \\ p_1 m_1 + \cdots + p_n m_n = m}} c_p \Big) T^m$$

$c_p \neq 0 \Rightarrow \exists\, q \neq p$ tq $\begin{cases} p_1 m_1 + \cdots + p_n m_n = q_1 m_1 + \cdots + q_n m_n \\ c_q \neq 0 \end{cases}$

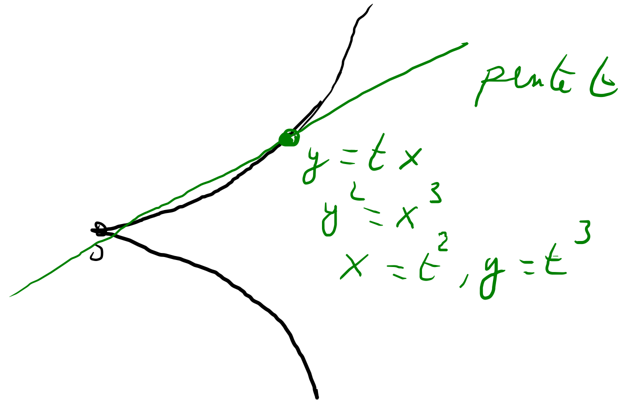
$P = c_p(T^p - T^q) + Q \qquad \mathrm{supp}(Q) \subset \mathrm{supp}(P) - \{p\} -$

$\varphi(Q) = 0 \qquad$ par récurrence, $P \in \langle T^p - T^q \rangle \dots$

Cas projectif : analogue

Exemple $T = \mathbb{G}_m$ $\quad A : (2,3)$ $\quad t \longmapsto (t^2, t^3)$

$\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{A}^2$



$$Y_A = V(y^2 - x^3)$$

$$X_A = \mathbb{P}_1$$

Monoïdes : S monoïde commutatif, ~~additivement~~ (fin)

$S \xrightarrow{\text{injectif}} S^{gr} = M$ $\quad \{(s,t)\}/ \quad (s,t) \equiv (s',t')$ si $s + t' = s' + t$ $\quad s - t$

$\cdot\ S^{gr} \simeq \mathbb{Z}^n$

$K^{(S)}$ algèbre du monoïde S $\quad \subset \quad K^{(M)}$

$= \{ \sum c_s T^s \}$

$e_i = s_i - t_i$

$$\mathrm{Spec}\,(K^{(S)}) \supset T = D(T^{s_1}, \ldots, T^{t_i}) = D(T^{s_1 + \cdots + s_n + t_1 + \cdots + t_n})$$

$k^{(S)}$ a une M-graduation évidente

$$\left(k^{(S)}\right)_m = \begin{cases} k & \text{si } m \in S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

T agit sur $\mathrm{Spec}(k^{(S)})$.

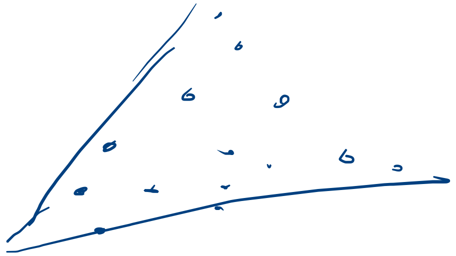
construction de variétés toriques affines (de tore $\mathbb{G}_m^n$)
à partir de sous monoïdes de $\mathbb{Z}^n$ (qui engendrent $\mathbb{Z}^n$)

si S est un monoïde de type fini, $k^{(S)}$ est une k alg. de type fini

§3 Variétés toriques affines et géométrie polyédrale.

Principe : $C \subset \mathbb{R}^n$ cône convexe polyédral

$\rightsquigarrow$ $S = C \cap \mathbb{Z}^n$ est un monoïde.



Lemme de Gordan Si C est un cône convexe polyédral rationnel, alors $C \cap \mathbb{Z}^n$ est un monoïde de type fini.

Preuve : $C = \text{cone}(v_1, \dots, v_m)$ $\quad v_i \in \mathbb{Q}^n \rightsquigarrow \underline{v_i \in \mathbb{Z}^n}$

$S = C \cap \mathbb{Z}^n$

$K = [0,1]\, v_1 + \dots + [0,1]\, v_m = \{ \sum t_i v_i \quad 0 \leq t_i \leq 1 \} \subset C$

polytope de $\mathbb{R}^n$
donc il ne contient qu'un nombre fini de points de $\mathbb{Z}^n$

$A = K \cap \mathbb{Z}^n \subset S$

- $\langle A \rangle \subset S$
- $v \in S = C \cap \mathbb{Z}^n$

$v = \sum t_i v_i \qquad t_i \in \mathbb{R}_+$

$= \underbrace{\sum (\underbrace{t_i - \lfloor t_i \rfloor}_{\leq 1}) v_i}_{\in K} + \underbrace{\sum \lfloor t_i \rfloor v_i}_{\in \langle A \rangle}$

$= v' + v''$

$\boxed{S = \langle A \rangle}$

$v'' \in \langle A \rangle$
$v' \in \mathbb{Z}^n \cap C = S$
donc $v' \in \mathbb{Z}^n \cap K = A$
donc $v \in \langle A \rangle$.

<u>Remarque</u> : la conclusion est (en général) fausse sans l'hypothèse que C est rationnel

$$S = \{ (x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid y \leq x\sqrt{2} \}$$

Cela va fournir une correspondance systématique

(Cônes convexes polyédraux rationnels) de dim n dans $\mathbb{R}^n$ $\longrightarrow$ (Variétés toriques affines) de tore $\mathbb{G}_m^n$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, mapsto] \arrow[dr] & & \mathrm{Spec}(k[S]) \\ & \text{monoïde } S = C \cap \mathbb{Z}^n \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

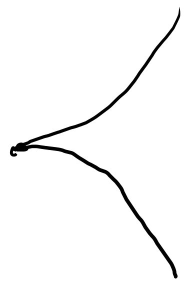
Pour aller plus loin, on va dualiser cette construction

$$\begin{tikzcd} \left(\begin{array}{c} \sigma \text{ cône convexe polyédral rationnel de } \mathbb{R}^n \\ \sigma \cap (-\sigma) = \mathrm{linsp}(\sigma) = 0 \end{array} \right) \arrow[r, squiggly] \arrow[d, squiggly] & \sigma^\circ \subset \mathbb{R}^n = \{ y \mid \langle x, y \rangle \leq 0 \ \forall x \in \sigma \} \arrow[d] \\ \text{Variété torique } X_\sigma & \sigma^\circ \cap \mathbb{Z}^n \text{ monoïde} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Remarque $S = C \cap \mathbb{Z}^n$ est un monoïde particulier

si $m \in \mathbb{Z}^n$, $d \geq 1$, $dm \in S$, alors $m \in S$.

(monoïde saturé)



$V(Y^2 = X^3)$

$S = \{0, 2, 3, 4, \dots\} \subset \mathbb{Z}$.

non saturé.

traduit la singularité de la courbe (point de rebroussement).