22 mars 2021

géométrie torique

§3. Variétés toriques affines.

$\mathbb{R}^n \supset \sigma$ cône convexe polyédral, rationnel, ne contenant pas de droite.

$\mathbb{R}^n \supset \sigma^\circ$ cône polaire $(\sigma^\circ = \{y \mid \langle x, y\rangle \leq 0 \ \forall x \in \sigma\})$

$\mathbb{Z}^n \supset S_\sigma = \sigma^\circ \cap \mathbb{Z}^n$ sous-monoïde additif de $\mathbb{Z}^n$

$X_\sigma = \mathrm{Spec}(k^{(S_\sigma)})$ — variété torique de tore $\mathbb{G}_m^n$

$\cup$

$T = \mathrm{Spec}(k^{(\mathbb{Z}^n)})$ $=$ $\qquad k^{(\mathbb{Z}^n)} = k[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]$

Lemme de Gordan : S_σ est un monoïde de type fini

$\exists\ m_1, \dots, m_r \in S_\sigma$ tels que $S_\sigma = \langle m_1, \dots, m_r\rangle$
$= \{n_1 m_1 + \dots + n_r m_r,\ n_j \geq 0\}$

$T = D(T^{m_1 + \dots + m_r}) \subset X_\sigma$
ouvert dense.

$k^{(S_\sigma)} \subset k^{(\mathbb{Z}^n)}$ $\qquad k$ algèbre de type fini intègre.

Remarque Variante « sans coordonnées »

$N \simeq \mathbb{Z}^n$ gr. abélien libre de rang fini $N \subset N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$

$\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ cône convexe polyédral, rationnel

$\sigma^\circ \subset \underbrace{M_{\mathbb{R}}}_{\simeq}$ cône polaire

$M = N^\vee$ dual de N, $M \simeq \mathbb{Z}^n$

$M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$.

$\simeq N_{\mathbb{R}}^\vee$

$S_\sigma = \sigma^\circ \cap M \subset M$

$k^{(S_\sigma)} \subset k^{(M)}$

$\underset{\mathrm{Spec}(k^{(S_\sigma)})}{X_\sigma} \supset T = \mathrm{Spec}(k^{(M)})$ tore de groupe de caractères égal à M.

$N \leftrightarrow$ cocaractères de T.

Description fonctorielle

R k-algèbre

points ? $X_\sigma(R) \supset T(R)$

$$\operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(k^{(S_\sigma)}, R) \qquad \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(k^{(M)}, R)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \operatorname{Hom}_{\text{Monoïds}}(S_\sigma, (R, \times)) \\ \cup \\ \operatorname{Hom}_{\text{Monoïds}}(S_\sigma, R^\times) \end{array}} \qquad \operatorname{Hom}_{\text{Monoïds}}(\underbrace{M}_{M \text{ est un groupe}}, (R, \times)) = \operatorname{Hom}_{\text{groups}}(M, R^\times)$$

car $\langle S_\sigma \rangle = M$

$S_\sigma - S_\sigma = M$

si le cône σ ne contient pas de droite

(hypothèse qui sera faite systématiquement)

Action de $T(R)$ sur $X_\sigma(R)$

$\varphi : S_\sigma \to R$, $x \in X_\sigma(R)$, $\tau : S_\sigma \to R^\times$, $t \in T(R)$ $\rightsquigarrow$ $s \mapsto \varphi(s)\tau(s)$ correspond à $t \cdot x \in X_\sigma(R)$

Cette description montre qu'on peut définir un point de X_σ à valeurs
non seulement dans une k-algèbre R,
mais dans un monoïde Δ

$X_\sigma(\underbrace{[0,1]}_{\text{multiplicatif}})$ $\qquad$ $S_\sigma \longrightarrow [0,1]$ /

$\cup$ $\qquad$ $\cup$

$T([0,1])$ $\qquad$ $S_\sigma \longrightarrow \{1\}$.

$X_\sigma(\mathbb{R}_+)$ $\qquad$ $S_\sigma \to \mathbb{R}_+$

$\cup$

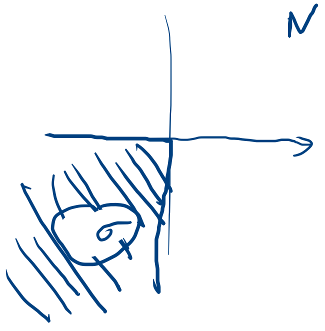
$T(\mathbb{R}_+)$ $\qquad$ $S_\sigma \to \mathbb{R}_+^*$

Exemple → Cox - Little - Schenck Toric varieties
référence la plus récente et la plus détaillée.

Fulton, Toric varieties
Oda, — (titres similaires)

(Attention aux conventions de signe, $\sigma^\circ = -\sigma^\vee \dots$)

a) $0 \leq r \leq n$ $\mathbb{Z}^n$ base canonique $(e_1, \dots, e_n)$



$\sigma = \text{cone}(-e_1, -e_2, \dots, -e_r) \subset \mathbb{R}^n$

$\sigma^\circ = \{ (y_1, \dots, y_n) \mid -y_1, \dots, -y_r \leq 0 \}$

$= \mathbb{R}_+^r \times \mathbb{R}^{n-r}$

$S_\sigma = \sigma^\circ \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{N}^r \times \underline{\mathbb{Z}^{n-r}}$

$k^{(S_\sigma)} = k[T_1, \dots, T_r, T_{r+1}^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]$

$X_\sigma = \mathbb{A}_k^r \times \mathbb{G}_{m,k}^{n-r}$.

Si R est une k-algèbre,

$$X_\sigma(R) = \{ (x_1, \dots, x_n) \in R^n \mid x_{r+1}, \dots, x_n \in R^\times \} \simeq R^r \times (R^\times)^{n-r}$$

$$\cup$$

$$T(R) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = (R^\times)^n$$

Cas similaire — par changement de base — lorsque σ est engendré par une partie d'une base de N.

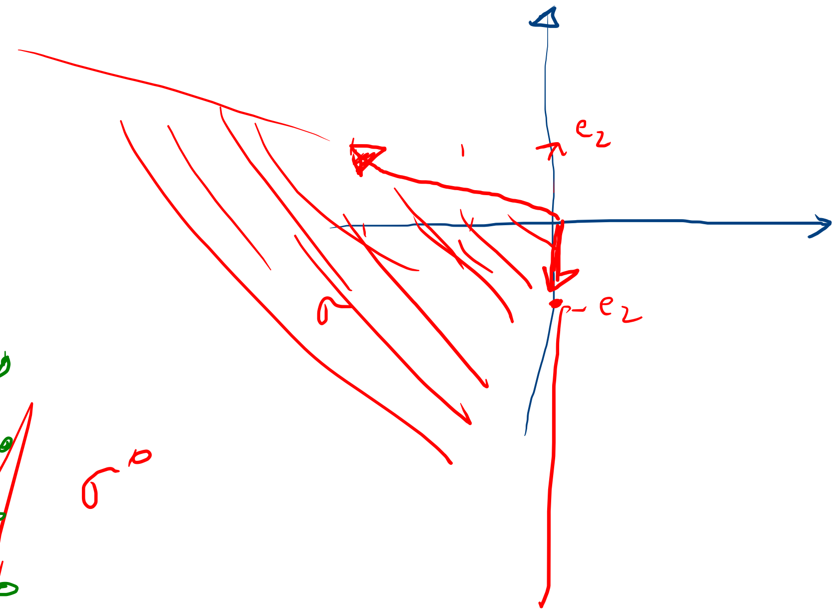
on trouve $X_\sigma \simeq \mathbb{A}^r \times \mathbb{G}_m^{n-r}$,

$r = \dim(\sigma)$.

b) $\boxed{n=2}$ $\quad d \geq 1$ $\quad \sigma = \text{cone}(-e_2, e_2 - d e_1)$

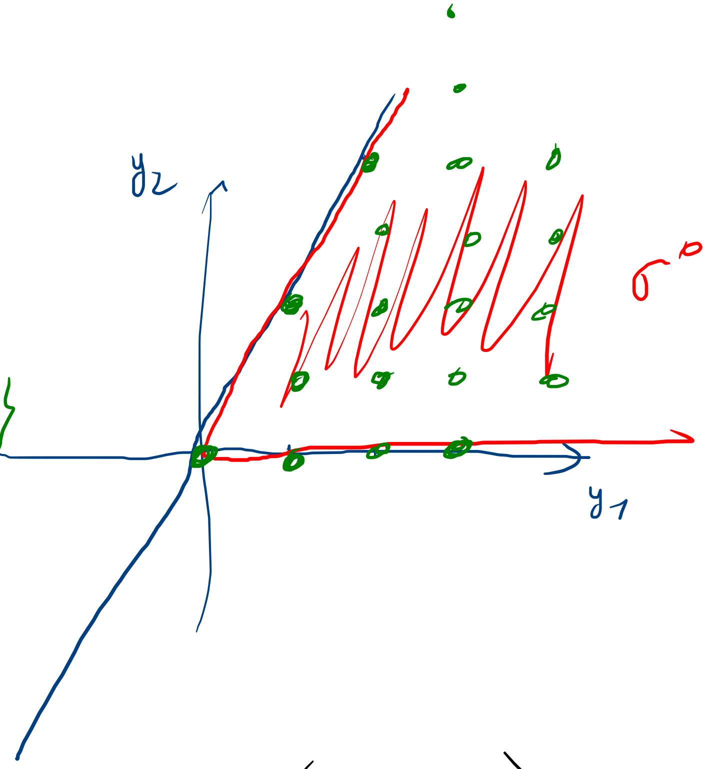
$$\sigma^\circ = \{(y_1, y_2) \mid -y_2 \leq 0,\ y_2 - d y_1 \leq 0\}$$

$$= \{0 \leq y_2 \leq d y_1\}$$



$S_\sigma = \sigma^\circ \cap \mathbb{Z}^2$ $\quad d=2$

$= \{0, (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), \dots, (2,4), \dots\}$



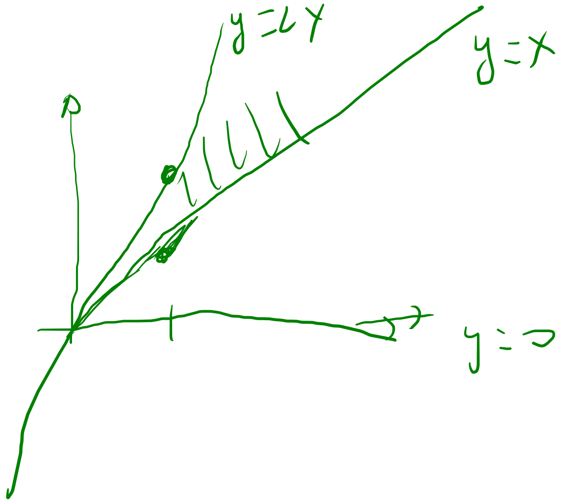
$\sigma^\circ = \text{cone}((1,0), (1,2))$

mais $S_\sigma \neq \langle (1,0), (1,2) \rangle$ ne contient pas $(1,1)$

<u>Lemme</u> $S_\sigma = \langle (1,0), (1,1), (1,2), \dots, (1,d) \rangle$

En effet :

$(y_1, y_2) \in \mathbb{N}^2 \qquad 0 \le y_2 \le \overset{d=2}{\overline{2}}\, y_1$



$(y_1, y_2) = a\,(1,0) + b\,(1,1) + c\,(1,2)$

$$\begin{cases} a + b + c = y_1 \\ b + 2c = y_2 \end{cases}$$

si $y_2 \le y_1$: $\quad (y_1, y_2) = y_2\,(1,1) + (y_1 - y_2)\,(1,0)$.

si $y_1 \le y_2 \le 2y_1$: $\quad (y_1, y_2) = (y_2 - y_1)\,(1,2) + (2y_1 - y_2)(1,1)$

si $(e-1)\,y_1 \le y_2 \le e\,y_1$,

chang! de variables.

$(y_1, y_2) \longrightarrow (y_1, y_2 - (e-1)y_1)$

$(y_1, y_2) = (y_2 - (e-1)y_1)(1, e) + (ey_1 - y_2)(1, e-1)$

L'algèbre $k^{(S_\sigma)}$ est plus compliquée

$$\begin{array}{c} \| \\ k[T_1, T_1T_2, \dots, T_1T_2^d] \subset k[T_1^{\pm 1}, T_2^{\pm 1}] \end{array}$$

$$k[X_0, \dots, X_d] \xrightarrow{\varphi} k[T_1^{\pm 1}, T_2^{\pm 1}] \quad : \quad \text{d'image } k^{(S_\sigma)}$$

$$X_j \longmapsto T_1 T_2^j$$

correspond à $j : X_\sigma \hookrightarrow \mathbb{A}^{d+1}$ immersion fermée

idéal de l'image $=$ $\ker(\varphi)$

relations binomiales : $\varphi(X_a X_b) = \varphi(X_c X_d)$

si $a+b = c+d$

$$\mathcal{A} = \{ \overbrace{(1,0)}^{m_0}, \dots, \overbrace{(1,d)}^{m_d} \} \subset \mathbb{Z}^2$$

$$T = \mathbb{G}_m^2 \xrightarrow{\gamma_\sigma} \mathbb{G}_m^{d+1}$$

$$X_\sigma = \overline{\gamma_\sigma(T)} \subset \mathbb{A}^{d+1}$$
$$\qquad \| \; Y_{\mathcal{A}}$$

$$\mathbb{Z}^{d+1} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^2$$
$$(a_0, \dots, a_d) \longmapsto \sum a_j \underbrace{(1,j)}_{m_j}$$

Idéal de $Y_{\mathcal{A}}$ = $\langle x^a - x^b$, où $\varphi(a) = \varphi(b)$, $a, b \geq 0 \rangle$

voire $\langle x^a - x^b$, où (a,b) "engendre" le "noyau" du morphisme de monoïdes $\varphi : \mathbb{N}^{d+1} \to \mathbb{Z}^2$

$\varphi : S \to T$ morphisme de monoïdes

$K_\varphi = \{ (s,s') \in S \times S \mid \varphi(s) = \varphi(s') \}$ sous monoïde de $S \times S$.

$\Gamma \subset S \times S$

on suppose que K_φ est le plus petit sous monoïde de $S \times S$ qui contient Γ

$\Gamma' = \{ (b,a) \mid (a,b) \in \Gamma \}$ et $\Delta = \{ (a,a) \mid a \in S \}$

$$I(Y_{\mathcal{A}}) = \{ X^a - X^b \mid (a,b) \in \Gamma \}$$

Exercice

Déterminer plus explicitement $I(Y_A)$

cf. C-L-S, (1.2.22)

Example 1.2.22. Fix a positive integer d and let $\sigma = \mathrm{Cone}(de_1 - e_2, e_2) \subseteq \mathbb{R}^2$. This has dual cone $\sigma^\vee = \mathrm{Cone}(e_1, e_1 + de_2)$. Figure 7 on the next page shows $\sigma^\vee$ when $d = 4$. The affine semigroup $S_\sigma = \sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^2$ is generated by the lattice points

$(1,i)$ for $0 \le i \le d$. When $d = 4$, these are the white dots in Figure 7. (You will prove these assertions in Exercise 1.2.8.)

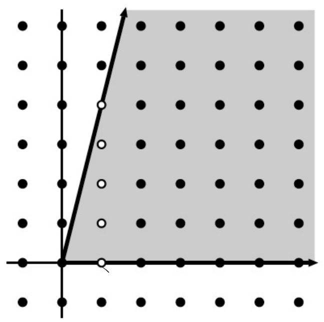


Figure 7. The cone $\sigma^\vee$ when $d = 4$

By §1.1, the affine toric variety U_σ is the Zariski closure of the image of the map $\Phi : (\mathbb{C}^*)^2 \to \mathbb{C}^{d+1}$ defined by

$$\Phi(s,t) = (s, st, st^2, \ldots, st^d).$$

This map has the same image as the map $(s,t) \mapsto (s^d, s^{d-1}t, \ldots, st^{d-1}, t^d)$ used in Example 1.1.6. Thus U_σ is isomorphic to the rational normal cone $\widehat{C}_d \subseteq \mathbb{C}^{d+1}$ whose ideal is generated by the 2×2 minors of the matrix

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{d-2} & x_{d-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{d-1} & x_d \end{pmatrix}.$$

Note that the cones σ and $\sigma^\vee$ are simplicial but not smooth. ◇

Cône lisse dans $N_\mathbb{R}$: engendrés par une partie d'une base de N

Cônes simpliciaux dans $N_\mathbb{R}$: engendrés par une partie d'une base de $N_\mathbb{R}$.

Exercice (cf C-L-S, 1.2.20)

$\sigma = \mathrm{Cone}(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3) \subset \mathbb{R}^3$

cône non simplicial.

décrire X_σ, un plongement de X_σ dans un espace affine associé à des générateurs de S_σ, et l'idéal correspondant.

Fonctorialité

N, N' gr. ab. libre de rang fini — duaux M, M'

$v : N \to N'$ morph. de groupes — transposé : $u : M' \to M$

tores T, T' de $\left|\begin{array}{l}\text{cocaractères } N, N' \\ \text{caractères } M, M'\end{array}\right.$ $\quad k^{(M')} \to k^{(M)}$

$\varphi : T \to T'$ $\quad (\varphi_* = v \quad , \quad \varphi^* = u \quad)$

$\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$, $\sigma' \subset N'_{\mathbb{R}}$ cône convexe polyhédraux rationaux. (sans droits)

$$\begin{array}{ccc}
X_\sigma & \overset{?\, f}{\dashrightarrow} & X_{\sigma'} \\
\cup & & \cup \\
T & \xrightarrow[\varphi]{} & T'
\end{array}$$

φ se prolonge en un morphisme $f : X_\sigma \to X_{\sigma'}$ si et seulement si

$$v_{\mathbb{R}}(\sigma) \subset \sigma'$$

($\exists$ I l y a alors un unique prolongement!)

<u>Preuve</u> $S_\sigma = \sigma^\circ \cap M \subset M$ $\qquad S_{\sigma'} = \sigma'^\circ \cap M'$

$u : M' \longrightarrow M$ $\qquad f^* : k^{(S_{\sigma'})} \to k^{(S_\sigma)}$

$v : N \longrightarrow N'$ $\qquad f : X_\sigma \to X_{\sigma'}$

Si $\boxed{v(\sigma) \subset \sigma'}$: $\qquad k^{(M')} \longrightarrow k^{(M)} \quad T^m \mapsto T^{u(m)}$

$u : M' \to M$

on vérifie que si $m \in S_{\sigma'}$, alors $u(m) \in S_\sigma$

$m \in M \cap \sigma'^\circ$

- $u(m) \in M$
- oui (?) $u(m) \in \sigma^\circ$

$n \in \sigma$ $\qquad \langle \cancel{u}(m), n \rangle \leq 0$?

Or $\langle u(m), n \rangle = \langle m, v(n) \rangle \leq 0$

car $\begin{pmatrix} v(n) \in \sigma' \\ m \in \sigma'^\circ \end{pmatrix}$

d'où $k^{(S_{\sigma'})} \longrightarrow k^{(S_\sigma)}$

induit par u

$u(m) \in S_\sigma$

Reste à voir que cette condition est nécessaire – et et l'unicité du prolongement.

Soit $f : X_\sigma \longrightarrow X_{\sigma'}$

$$\begin{tikzcd} X_\sigma \arrow[r, "f"] & X_{\sigma'} \\ T \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "\varphi"] & T' \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k^{(S_\sigma)} \arrow[d] & k^{(S_{\sigma'})} \arrow[l, "f^*"'] \arrow[d] \\ k^{(M)} & k^{(M')} \arrow[l, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}$$

soit $m \in S_{\sigma'} = M' \cap \sigma'^0$

$$\sum_{p \in S_\sigma} c_p T^p = f^*(T^m) \in \mathcal{O}(X_\sigma)$$

$$\sum_{p \in S_\sigma} c_p T^p = f^*(T^m)\Big|_T = \varphi^*(T^m) = T^{u(m)}$$

donc $f^*(T^m) = T^{u(m)}$ nécessairement

En particulier $u(m) \in S_\sigma$

$$\boxed{u(S_{\sigma'}) \subset S_\sigma}$$

Unicité du prolongement

Existence – équivalente à $u(S_{\sigma^-}) \subset S_\sigma$.

– ______ $u(\sigma'^{\circ}) \subset \sigma^{\circ}$

car | σ'° et σ° sont engendrés par des vecteurs <u>entiers</u>
| $u(M^-) \subset M$.

– équivalente à $v(\sigma) \subset \sigma^-$

par dualité :

$u(\sigma'^{\circ}) \subset \sigma^{\circ}$

$u(\sigma'^{\circ}) \subset \sigma^{\circ} \iff v(\sigma) \subset \sigma'$

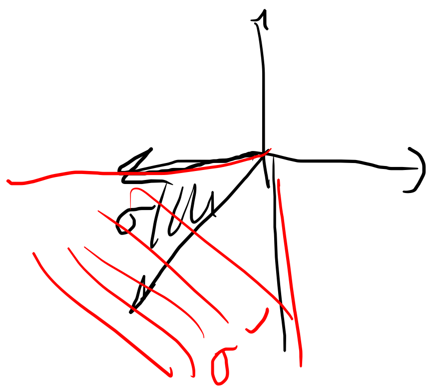
$\Leftarrow$: $y \in \sigma'^{\circ}$, $x \in \sigma$ $\langle x, u(y) \rangle = \langle v(x), y \rangle \leq 0$ ✓

$\Rightarrow$ on a $v(\sigma^{\circ\circ}) \subset \sigma'^{\circ\circ}$ par le même argument

et $\sigma^{\circ\circ} = \sigma$,

$\sigma'^{\circ\circ} = \sigma'$ | par dualité des cônes.

Exercice



$\sigma = \mathrm{cone}\left((-1,0),\ (-1,-1) \right)$ cône lisse.

$\sigma' = \mathrm{cone}\left((-1,0),\ (0,-1) \right)$

$$\sigma \subset \sigma' \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{G}_m^2 \arrow[r, phantom, "\subset"] & X_\sigma \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr, "f"] & X_{\sigma'} \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\ & & \mathbb{A}^2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_m^2 \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & X_\sigma \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{A}^2 \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ \mathbb{G}_m^2 \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{A}^2 \end{tikzcd}$$

décrire f.

En fait $X_\sigma \simeq \mathbb{A}^2$ (pas par f !!)

écrire $\tilde{f}$ — on trouve $\tilde{f}(u,v) = (u, uv)$
ou quelque chose d'approchant.

Une injection de cônes ne correspond pas à une injection des variétés toriques correspondantes.

Prop. Si τ est une *face* de σ,
alors le morphisme $X_\tau \to X_\sigma$ qui prolonge id_T
est une immersion ouverte (identifie X_τ à un ouvert de X_σ)

Preuve. τ est une face de σ $\Leftrightarrow$ il existe $m \in M_{\mathbb{R}}$
tq $\langle \cdot, m \rangle < 0$ sur $\sigma - \tau$
(et $\langle \cdot, m \rangle \equiv 0$ sur τ

comme σ est rationnel, on peut trouver un tel $m \in M$

$m \in \sigma^\circ$ $\quad$ $m \in \tau^\circ$
$-m \in \tau^\circ$

$$\boxed{S_\tau = S_\sigma + \mathbb{N} \cdot m} \qquad X_\tau = D(T^m)$$

$S_\sigma \subset S_\tau$ $\quad$ $m \in S_\tau$ $\quad$ donc $S_\sigma + \mathbb{N} \cdot m \subset S_\tau$
$\sigma^\circ \subset \tau^\circ$
$\tau \subset \sigma$

Autre inclusion : soit $w \in S_\tau = \tau^\circ \cap M$

σ est convexe polyedral rationnel,
$\sigma = \text{cone}\langle x_1, \dots, x_s \rangle$ $x_j \in N$.

$c = \sup_j |\langle x_j, w\rangle| \in \mathbb{N}$.

On va prouver $w - cm \in S_\sigma = \sigma^\circ \cap M$

- $w - cm \in M$ ok car $c \in \mathbb{N}$
- $w - cm \in \sigma^\circ$?

$\langle x_j, w - cm\rangle = \langle x_j, w\rangle - c\langle x_j, m\rangle$

premier cas : $\langle x_j, m\rangle \geq 1$: alors $\langle x_j, w\rangle - c\langle x_j, m\rangle \leq 0$
car $\langle x_j, w\rangle \leq c$.

second cas : $\langle x_j, m\rangle = 0$
alors $x_j \in \tau$ donc $\langle x_j, w\rangle \leq 0$ car $w \in \tau^\circ$
et $<$

Dans les deux cas $\langle x_j, w - cm\rangle \leq 0$
Cela prouve que $w \in S_\sigma + \mathbb{N}\cdot m$.

Alors $\quad X_\tau = D(T^m) \subset X_\sigma$

- $m \in S_\sigma \qquad T^m \in \mathcal{O}(X_\sigma)$, σ

- $m \in S_\tau \quad$ ~~ar~~ $\quad T^m \in \mathcal{O}(X_\tau)$
  $-m \in S_\tau \qquad T^{-m} \in \mathcal{O}(X_\tau)$

$$\left.\begin{array}{l} m \in S_\tau \quad T^m \in \mathcal{O}(X_\tau) \\ -m \in S_\tau \quad T^{-m} \in \mathcal{O}(X_\tau) \end{array}\right) \quad T^m \in \mathcal{O}(X_\tau)^\times$$

a priori, $T^m \notin \mathcal{O}(X_\sigma)^\times$
car $-m \notin S_\sigma$.
(sinon $\tau = \sigma$)

$$S_\tau = S_\sigma \overset{!}{\underset{-}{\oplus}} \mathbb{N} \cdot m$$

(erreur de signe)

changement de signe par rapport aux notes en ligne
peut être une coquille dans les notes.

Le sous-monoïde S_σ de M est <u>saturé</u>

si $m \in M$, et $\exists\, n \geq 1$ tq $n \cdot m \in S_\sigma$, alors $m \in S_\sigma$.

(Pas vrai pour le sous-monoïde $(0, 2, 3, \dots)$ de $\mathbb{Z}$)

Conséquence : L'algèbre $k^{(S_\sigma)}$ (k corps) est <u>intégralement close</u>

La variété X_σ est <u>normale</u>

Inversement : si X est une variété torique affine <u>normale</u>, elle est de cette forme.

Cf. $k[T_1, \dots, T_n]$ est intégralement clos, car factoriel (Gauss)

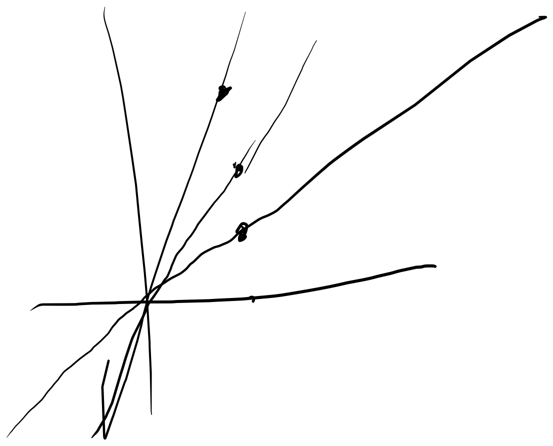
<u>mais</u> $k^{(S_\sigma)}$ n'est pas factoriel en général.

Prop. X_σ est lisse sur k

si et seulement si σ est un cône lisse.

($\Leftarrow$ se déduit du calcul de X_σ pour $\sigma = \text{cone}(-e_1, \dots, -e_r)$)

$\Rightarrow$ est plus délicat.



Désingularisation des variétés toriques

$\leftrightarrow$ décomposition de σ en cônes lisses