25 mars 2021

Variétés toriques affines associées à un cône (polyédral, rationnel, fortement convexe) de $\mathbb{R}^n$

tore $T \simeq \mathbb{G}_m^n$, caractères $M \simeq \mathbb{Z}^n$, cocaractères $N \simeq \mathbb{Z}^n$

dualité parfaite $N \times M \to \mathbb{Z}$; $\langle n, m \rangle$ $\left(= \sum n_j m_j \right)$

$\sigma \subset N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$

$\sigma^\circ \subset M_{\mathbb{R}}$ cône polaire $\{ m \in M_{\mathbb{R}} ,\ \langle n, m \rangle \leq 0 \quad \forall n \in \sigma \}$

($\sigma^{\circ\circ} = \sigma$ dualité convexe)

$\sigma^\circ \cap M$ monoïde de type fini (lemme de Gordan)

$k^{(\sigma^\circ \cap M)}$ algèbre de ce monoïde

$\subset k^{(M)} \simeq k[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]$

$X_\sigma = \mathrm{Spec}\left(k^{(\sigma^\circ \cap M)}\right)$ variété torique affine

$\overset{\cup}{T} = \mathrm{Spec}\left(k^{(M)}\right)$

Éventails (fan)

Déf. Un éventail est un ensemble fini Σ de cônes (dans $N_\mathbb{R}$) (fortement convexes rationnels polyédraux) tel que :

1) toute face d'un cône de Σ appartient à σ
2) Si $\sigma, \tau \in \Sigma$, $\sigma \cap \tau \in \Sigma$ et est une face de chacun des cônes σ, τ.

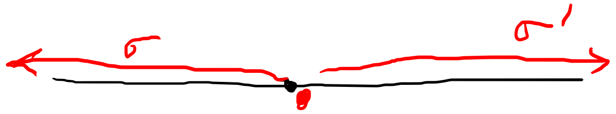
(= décomposition polyédrale conique)

support de l'éventail $\quad |\Sigma| = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$

Exemples

1) $\sigma \subset N_\mathbb{R}$ cône, $\quad \Sigma = \{ \text{faces de } \sigma \}$

2) $N = \mathbb{Z}$

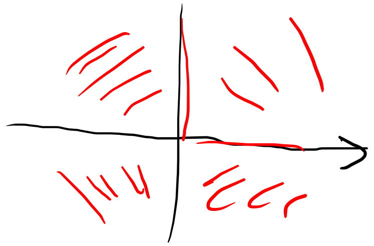


$\Sigma = \{ \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+, \{0\} \}$

3) Produits d'éventails $\quad \Sigma', \Sigma''$ éventails de $N'_\mathbb{R}, N''_\mathbb{R}$

$\rightsquigarrow \{ \sigma' \times \sigma'', \ \sigma' \in \Sigma', \ \sigma'' \in \Sigma'' \}$ est un éventail de $(N' \times N'')_\mathbb{R}$.

Ex.

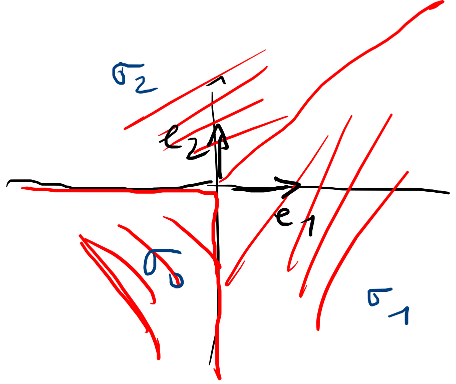


4 cônes de dim 2 $\qquad \pm\mathbb{R}_+ \times \pm\mathbb{R}_+$

_______ 1 $\qquad \mathbb{R}_+ \times \{0\}, \ldots$

1 cône — 0 $\qquad \{0\}$

4)



Trois cônes de dim 2

$\sigma_0 = \mathbb{R}_-^2 = \text{cone}(-e_1, -e_2)$

$\sigma_1 = \text{cone}(-e_2, e_1+e_2)$

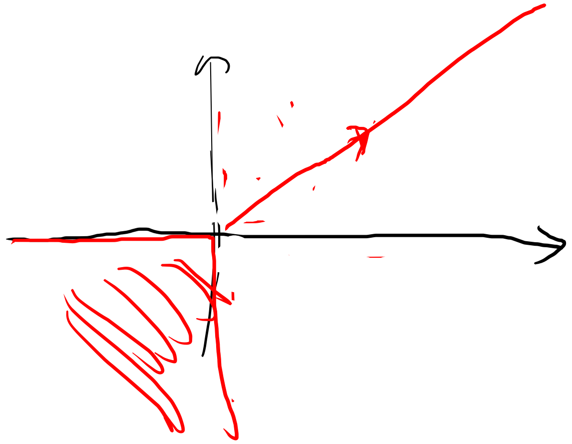
$\sigma_2 = \text{cone}(-e_1, e_1+e_2)$

Trois rayons $\mathbb{R}_- e_1$, $\mathbb{R}_- e_2$, $\mathbb{R}_+(e_1+e_2)$

Un cône de dim 0 $\{0\}$

Observation: Un éventail est déterminé par ses cônes maximaux

5)



. Un cône maximal de dim 2
. ——— de dim 1.

. Deux autres cônes de dim 1
$(\mathbb{R}_- e_1, \mathbb{R}_- e_2)$

Variété torique X_Σ associée à un éventail

On <u>recolle</u> les variétés X_σ , $\sigma \in \Sigma$

$\sigma, \tau \in \Sigma$
$\sigma \cap \tau$ est une face de σ, τ $\qquad$ $X_{\sigma\cap\tau}$ est un ouvert de X_σ et un ouvert de X_τ

$j^\sigma_{\sigma\cap\tau} : X_{\sigma\cap\tau} \hookrightarrow X_\sigma$ $\qquad$ immersions ouvertes.

$j^\tau_{\sigma\cap\tau} : X_{\sigma\cap\tau} \hookrightarrow X_\tau$

$V_{\sigma\tau} = j^\sigma_{\sigma\cap\tau}(X_{\sigma\cap\tau}) \subset X_\sigma$. $\qquad$ $\varphi_{\sigma\tau} : V_{\tau\sigma} \xrightarrow{\sim} V_{\sigma\tau}$

$V_{\tau\sigma} = j^\tau_{\sigma\cap\tau}(X_{\sigma\cap\tau}) \subset X_\tau$

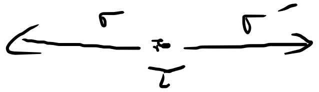
condition de cocycle : σ, τ, ψ cônes de Σ

$$V_{\sigma\tau} \cap V_{\sigma\psi} \xleftarrow{\varphi'_{\sigma\tau}} V_{\tau\sigma} \cap V_{\tau\psi} \xleftarrow{\varphi'_{\tau\psi}} V_{\psi\sigma} \cap V_{\psi\tau}$$

$\varphi'_{\sigma\psi}$

$\varphi'_{\sigma\psi} = \varphi'_{\sigma\tau} \circ \varphi'_{\tau\psi}$
(relation de cocycle)

__Exemples__ 1) $\Sigma = \{ \text{faces d'un cône } \sigma \}$ $\rightsquigarrow$ $X_\Sigma = X_\sigma$

2) 

$\sigma^\circ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ $\quad X_\sigma = \mathrm{Spec}(k[T]) \simeq \mathbb{A}^1$

$(\sigma')^\circ \cap \mathbb{Z} = -\mathbb{N}$ $\quad X_{\sigma'} = \mathrm{Spec}(k[U]) \simeq \mathbb{A}^1 \quad U = T^{-1}$

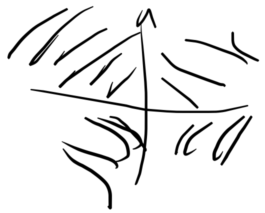
$(\tau)^\circ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ $\quad X_\tau = \mathrm{Spec}(k[T, T^{-1}])$

recollement : deux droites affines recollées par l'inversion de leurs paramètr

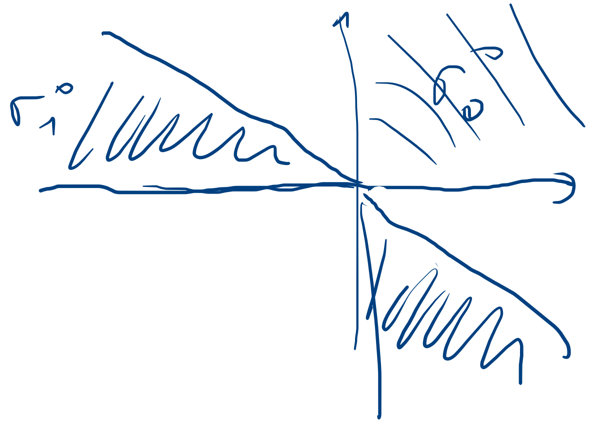
$\mathbb{P}_1$ droite projective

3) $X_{\Sigma' \times \Sigma''} = X_{\Sigma'} \times_k X_{\Sigma''}$

$\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$



4)



· $\sigma_0 = \mathbb{R}_-^2$ $\qquad \sigma_0^\circ = \mathbb{R}_+^2$ $\qquad X_{\sigma_0} = \mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(k[T_1, T_2])$

· $\sigma_1 = \mathrm{cone}(-e_2, e_1 + e_2)$

σ_1° $\quad \begin{cases} -m_2 \leq 0 \\ m_1 + m_2 \leq 0 \end{cases}$ $\quad$ rayons : $\begin{matrix} (-1, 0) \\ (-1, 1) \end{matrix}$

$$X_{\sigma_1} = \mathrm{Spec}\,(k[T_1^{-1}, T_1^{-1} T_2]) \simeq \mathbb{A}^2$$

· σ_2° $\quad \begin{matrix} -m_1 \leq 0 \\ m_1 + m_2 \leq 0 \end{matrix}$ $\quad$ rayons $\begin{matrix} (0, -1) \\ (1, -1) \end{matrix}$

$$X_{\sigma_2} = \mathrm{Spec}\,(k[T_2^{-1}, T_2^{-1} T_1])$$

recollement : plan projectif $\quad \mathbb{P}_2 = \mathrm{Proj}(k[T_0, T_1, T_2])$

X_{σ_0} $\quad (T_0 = 1)$

X_{σ_1} $\quad (T_1 = 1)$ $\qquad \mathrm{Spec}\left(k\left[\frac{T_0}{T_1}, \frac{T_2}{T_1}\right]\right)$

X_{σ_2} $\quad (T_2 = 2)$ $\qquad \mathrm{Spec}\left(k\left[\frac{T_0}{T_2}, \frac{T_1}{T_2}\right]\right)$

En dimension n : $\mathbb{R}^n$ base canonique $(e_1, \dots, e_n)$

$e_0 = e_1 + \dots + e_n$.

$n+1$: cônes : * $\mathbb{R}_-^n$ = cone $(-e_1, \dots, -e_n)$ $\quad (\sigma_0)$

* $1 \leq j \leq n$: cône $(-e_1, \dots, \widehat{-e_j}, \dots, -e_n, e_0)$

(enlevé) $\quad (\sigma_j)$

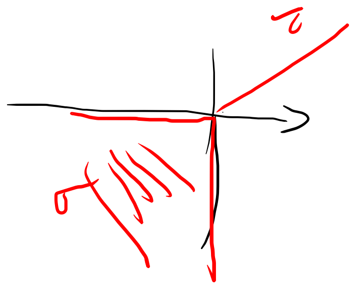
recollement : espace projectif de dim n $\quad \mathbb{P}_n = \mathrm{Proj}\,(k[T_0, \dots, T_n])$

vu par ses $(n+1)$ ouverts principaux $\simeq \mathbb{A}^n$

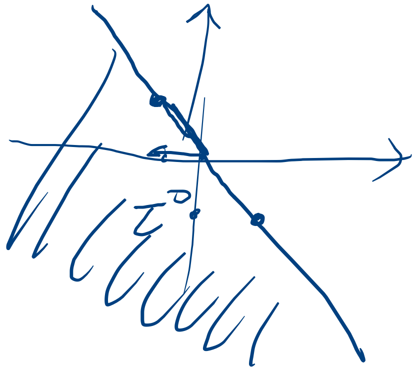
$X_{\sigma_0} \simeq \mathbb{A}^n \qquad T_0 = 1$

$X_{\sigma_j} \simeq \mathbb{A}^n \qquad T_j = 1$.

5)



- $X_\sigma \simeq \mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(k[T_1, T_2])$
- $X_\tau \simeq$



$\tau = \mathbb{R}_+ (1,1)$

τ° : $m_1 + m_2 \leq 0$

engendré par $(-1,1), (1,-1), (0,-1)$
$(-1,0)$

$$k[T_1^{-1}T_2, T_1 T_2^{-1}, T_1^{-1}, T_2^{-1}]$$

$$\simeq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m.$$

la variété obtenue est contenue dans $\mathbb{P}_2$.

complémentaire de quoi ? (exercice)

Proposition : Pour tout $x \in X_\Sigma$, il existe un plus petit cône $\sigma \in \Sigma$ tel que $x \in X_\sigma$

↳ **preuve** : On choisit σ **minimal** tel que $x \in X_\sigma$
soit $\tau \in \Sigma$ tel que $x \in X_\tau$
Prouvons que $\sigma \subset \tau$.

Sinon $\sigma \cap \tau$ est une face de σ (distincte de σ)
et $X_{\sigma \cap \tau}$ est un ouvert de X_Σ qui s'identifie à $X_\sigma \cap X_\tau$
Il contient x (car $x \in X_\sigma$ et $x \in X_\tau$)
ce qui **contredit** le choix de σ $(\sigma \cap \tau \subset \sigma)$

Théorème : 1) X_Σ est un schéma séparé

2) X_Σ est propre si et seulement si $|\Sigma| = N_\mathbb{R}$.

Remarque : X_Σ est affine si et seulement si Σ a un unique cône maximal
(à vérifier)

Preuve   Critères valuatifs de séparation / de propreté.

(cf. Mumford
Red Book of
Variétés & Schemes)

Un k-schéma (de type fini) X est séparé, resp. propre si et seulement si pour toute k-algèbre R qui est un anneau de valuation discrète, de corps de fractions K, l'application « évidente »

$$X(R) \longrightarrow X(K)$$

est injective, resp. bijective.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(K) \arrow[d] \arrow[r, dashed] & X \\ \mathrm{Spec}(R) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Observation. ① Les schémas affines sont séparés. $X = \mathrm{Spec}(A)$

$$X(R) = \mathrm{Hom}_k(A, R)$$
$$\downarrow \qquad (R \subset K)$$
$$X(K) = \mathrm{Hom}_R(A, K)$$

② $\mathrm{Spec}(R) = \{ (0), \underline{m} \}$ ← idéal maximal de R.

$f : \mathrm{Spec}(R) \to X$
ouvert U de X contenant $f(\underline{m})$
alors f se factorise par U (continuité de f)

③ Si U est un ouvert dense donné de X, Il suffit de prouver que tout élément de $U(K)$ a au plus, resp exactement, un antécédent dans $X(R)$

$$\begin{tikzcd}
X(R) \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & X(K) \\
& U(K) \arrow[u, phantom, "\cup"]
\end{tikzcd}$$

Alors : • la séparation va se déduire de l'existence du plus petit cône $\sigma \in \Sigma$ tel que X_σ contient un point donné et que X_σ est affine.

• la <u>propriété</u> :

$\lambda : \mathbb{G}_m \longrightarrow T$ cocaractère, associé à un élément $n \in N$.

$M \longrightarrow k[T, T^{-1}]^\times \qquad m \longmapsto T^{\langle n, m \rangle}$

λ se prolonge-t-il en $\bar{\lambda} : \mathbb{A}^1 \to X_\Sigma$

si c'est le cas $\bar{\lambda}(0) \in X_\Sigma \qquad \sigma \in \Sigma$ tel que $\bar{\lambda}(0) \in X_\sigma$

$\bar{\lambda} : \mathbb{A}^1 \to X_\sigma$.

$$\begin{tikzcd}
\sigma^\circ \cap M \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & (k[T], \times) \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
M \arrow[r] & k[T, T^{-1}]
\end{tikzcd}$$

Cela signifie que $\langle n, m\rangle \geq 0$ si $m \in \sigma^\circ \cap M$

Comme σ° est un cone polyédral rationnel

$$\langle -n, m\rangle \leq 0 \quad \forall m \in \sigma^\circ$$

$$-n \in \sigma^{\circ\circ} = \sigma. \qquad \boxed{-n \in \sigma}$$

Conclusion : $\lambda : \mathbb{G}_m \to T$ (associé à $n \in N$) se prolonge en $\bar{\lambda} : \mathbb{A}^1 \to X_\Sigma$ si et seulement si $-n \in |\Sigma|$

Prop. (fonctorialité des variétés toriques)

T, T' tores $\quad M, M'$ caractères $\quad N, N'$ cocaractères

Σ, Σ' éventails dans $N_{\mathbb{R}}, N'_{\mathbb{R}}$

$f : T \to T'$ morphisme de tores $\longleftrightarrow$ $v : N \longrightarrow N'$

$v_{\mathbb{R}} : N_{\mathbb{R}} \longrightarrow N'_{\mathbb{R}}$

Pour que f se prolonge en un morphisme $\tilde{f} : X_\Sigma \to X_{\Sigma'}$ il et il suffit que pour tout cône $\sigma \in \Sigma$ il existe un cône $\sigma' \in \Sigma'$ tel que $v_{\mathbb{R}}(\sigma) \subset \sigma'$

(Un tel prolongement est alors unique)

variétés toriques à un polytope $P \subset M_{\mathbb{R}}$

P polyèdre de $M_{\mathbb{R}}$

$\rightsquigarrow$ éventail normal Σ_P dont les cônes sont les $N_F(P) = (P-F)^\circ$ — cône normal à P le long de F

où F parcourt l'ensemble des faces de P

NB $(P-F)^\circ = \{ f \in N_{\mathbb{R}},\ f(x) \leq f(y)\ \ \forall x \in P,\ \forall y \in F \}$

= formes linéaires qui sont majorées sur P et l'atteignent leur maximum sur F

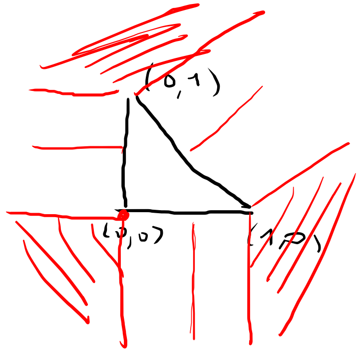
support de Σ_P = formes linéaires majorées sur P

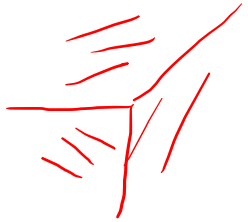
si P est un polytope : $|\Sigma_P| = N_{\mathbb{R}}$ éventail complet

si $\dim(P) = rg(M) = \dim(M_{\mathbb{R}})$ - les cônes normaux $N_F(P)$ sont fortement convexes

si P est rationnel, les cônes normaux sont rationnels.

Exemples 1)

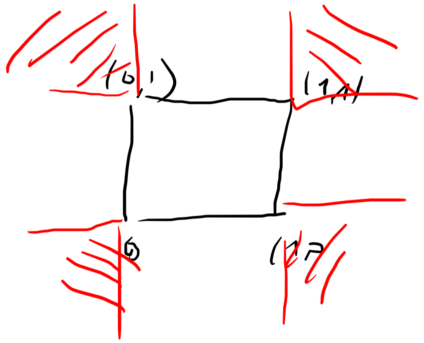




Éventail de $\mathbb{P}_2$.

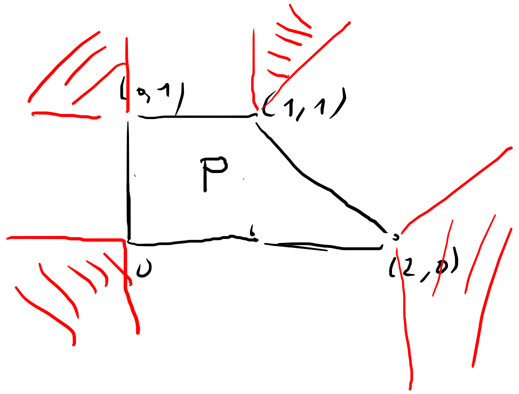
$P = \Delta_n = \mathrm{conv}(0, e_1, \dots, e_n) \subset \mathbb{R}^n \rightsquigarrow$ éventail de $\mathbb{P}_n$.

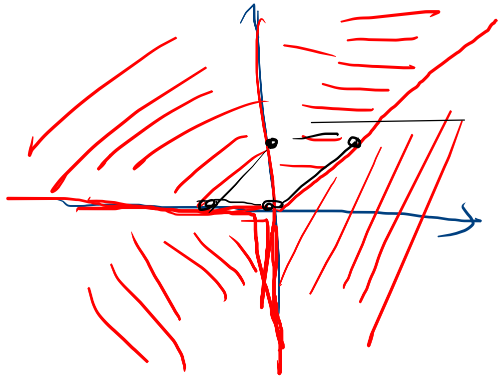
2)



Éventail de $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$

3)





raffinement de l'éventail de $\mathbb{P}_2$

$$\begin{array}{ccc} X_P & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}_2 \\ \cup & & \cup \\ \mathbb{G}_m^2 & = & \mathbb{G}_m^2 \end{array}$$

f est l'éclatement de $\mathbb{P}_2$ en le point $[0:1:0]$

P polytope à sommets entiers

$S = P \cap M$ $\quad s \in S \leftrightarrow$ caractère $\chi_s : T \to \mathbb{G}_m$

$\chi_S : T \longrightarrow \mathbb{G}_m^S \longrightarrow \mathbb{P}_S$ $\qquad (z_1, \dots, z_r) \longrightarrow [z_1 : \dots z_r]$

$\mathbb{P}_S \simeq \mathbb{P}_{\mathrm{Card}(S)-1}$ $\qquad \mathbb{G}_m^r \longrightarrow \mathbb{P}_{r-1}$

Variété torique X_S = adhérence de Zariski de $\chi_S(T)$ dans $\mathbb{P}_S$

χ_S se prolonge de manière unique en $f : X_P \longrightarrow X_S \subset \mathbb{P}_S$.

$S \ni v$ sommet de P

$\sigma_v : N_v(P) = \{$ forme linéaire φ sur $M_{\mathbb{R}}$ tq $\sup_P \varphi = \varphi(v)\}$.

$\Rightarrow$ si $s \in S$, $s - v \in \sigma_v^0$

$\chi_s \chi_v^{-1}$ se prolonge en $X_v \longrightarrow \mathbb{A}^1$

$T \longrightarrow \mathbb{G}_m^S \longrightarrow \mathbb{P}_S$

$X_v \xrightarrow{\text{se prolonge}} [\chi_s(t)]_{s \in S} = [\chi_s(t)\chi_v(t)^{-1}]_{s \in S}$

$\cup$

$\mathbb{A}^{(S-v)}$

<u>Fait</u> : Si P est « assez gros » (par exemple si on remplace P par un multiple assez grand nP)

alors $X_P \to X_S$ est un isomorphisme.

<u>Paragraphe</u> : décomposition de X_Σ en orbites du tore.