29 mars 2021

Décomposition en orbites d'une variété torique.

Soit X une variété torique pour un tore T

L'action de T sur X « découpe » X en orbites

$x \in X \rightsquigarrow O_x =$ son orbite

$x \in X(\kappa)$ $\quad \kappa = \kappa(x)$ corps résiduel du point x

$T \times_k X \to X$ $\quad T_\kappa \times_\kappa X_\kappa \longrightarrow X_\kappa$

$T_\kappa \longrightarrow X_\kappa$ $\quad t \mapsto t \cdot x$

image - sous-schéma localement fermé

= ouvert d'un sous-schéma fermé

décomposition finie de X en parties localement fermées et disjointes - par récurrence « noethérienne ».

relation d'ordre : $O < O'$ si $\overline{O} \subset \overline{O'}$

la plus grande orbite : celle qui est ouverte

les plus petites : jusqu'à des points fixes.

Description combinatoire $\qquad\qquad \Sigma$ éventail de X

1) Constructions de points « canoniques » $\quad x_\sigma \in X_\sigma(k) \qquad \sigma \in \Sigma$

$\sigma \in \Sigma \quad \rightsquigarrow \quad \sigma^\perp = \sigma^\circ \cap (-\sigma)^\circ = \{ m \in M_{\mathbb{R}} \ / \ \langle x, m \rangle = 0 \quad \forall x \in \sigma \}$

sous espace vectoriel de codimension $\dim(\sigma)$

$\sigma^\perp \cap M$ sous monoïde (sous groupe) de $\sigma^\circ \cap M$.

$$\varphi_\sigma : \sigma^\circ \cap M \longrightarrow \{0,1\} \qquad \text{(monoïde multiplicatif } \subset (k, \times))$$

$$m \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } m \in \sigma^\perp \cap M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\varphi_\sigma(0) = 1$

$\varphi_\sigma(m+m') = \varphi_\sigma(m)\,\varphi_\sigma(m')$

$m \notin \sigma^\perp \cap M \Rightarrow \exists x \in \sigma \quad \langle x, m \rangle < 0 \qquad (\leq 0$ par hyp.$)$

$\Rightarrow \langle x, m+m' \rangle < 0$

$\Rightarrow \varphi_\sigma(m+m') = 0$

$m, m' \in \sigma^\perp \cap M \Rightarrow m+m' \in \sigma^\perp \cap M$.

$x_\sigma \in X_\sigma(k)$ point correspondant

Stabilisateur de x_σ

R une k algèbre, $t \in T(R)$ $\qquad t \cdot x_\sigma = x_\sigma$

$t \leftrightarrow \tau : M \to R^\times$

$t \cdot x_\sigma \leftrightarrow \sigma^\vee \cap M \to R$, $\quad m \mapsto \tau(m)\varphi_\sigma(m) = \begin{cases} \tau(m) & \text{si } m \in \sigma^\perp \cap M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$t \cdot x_\sigma = x_\sigma \iff \tau(m) = 1$ si $m \in \sigma^\perp \cap M$.

sous-tore de T -

ses caractères sont $M/\sigma^\perp \cap M$

ses cocaractères sont $(M/\sigma^\perp \cap M)^\vee = (\sigma^\perp)^\perp = \langle\sigma\rangle \cap N$

(O_σ = orbite de x_σ)

tore quotient T_σ

ses caractères sont $\sigma^\perp \cap M$

ses cocaractères sont $N/(\langle\sigma\rangle \cap N)$

$T \times X \to X$

$T \to X \quad t \mapsto t \cdot x_\sigma$

$T_\sigma \times O_\sigma \to O_\sigma$

$\dim(T_\sigma) = \operatorname{rang}(\sigma^\perp \cap M) = \operatorname{codim}(\sigma)$

L'orbite de x_σ s'identifie à T_σ

On peut aussi voir ces points en termes de cocaractères

Prop. $\lambda : \mathbb{G}_m \to T$ cocaractère $\leftrightarrow n \in N$

λ s'étend en un morphisme $\bar{\lambda} : \mathbb{A}^1 \to X_\Sigma \iff -n \in \Sigma$

Alors, si σ est le plus petit cône de Σ contenant $-n$,

on a $\bar{\lambda}(0) = x_\sigma$

Preuve. $\lambda \in \mathrm{Hom}_{k\text{-Sch}}(\mathrm{Spec}(k[T,T^{-1}]), T)$

$\lambda \leftrightarrow \boxed{M \longrightarrow (k[T,T^{-1}])^\times}$ $m \longmapsto T^{\langle n,m\rangle}$

? $\bar{\lambda} \in \mathrm{Hom}_{k\text{-Sch}}(\mathrm{Spec}(k[T]), X)$

$\bar{\lambda} \leftrightarrow \boxed{\sigma^\circ \cap M \longmapsto (k[T], \times)}$ morphisme de monoïdes.

(si $\bar{\lambda}(0) \in X_\sigma$ σ minimal)

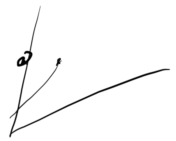
Condition nécessaire et suffisante : $\langle n, m\rangle \geq 0$ $\forall m \in \sigma^\circ \cap M$

$\langle -n, m\rangle \leq 0$

$\bar\lambda$ se prolonge à $\mathbb{A}^1 \to X_\sigma \iff -n \in \sigma$

Point limite $\bar\lambda(0)$: $\leftrightarrow$ $\sigma^\circ \cap M \to k$

$$m \mapsto T^{\langle n, m\rangle}\Big|_{T=0} = \begin{cases} 0 & \text{si } \langle n, m\rangle > 0 \\ 1 & \text{si } \langle n, m\rangle = 0. \end{cases}$$



$\{n\}^\perp = \tau^\perp$ si τ est la plus petite face de σ qui contient $-n$.

$\bar\lambda(0) = x_\sigma$, où σ est le plus petit cône contenant $-n$.

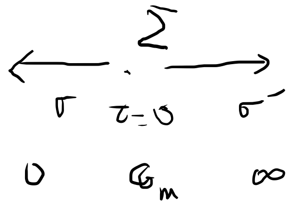
<u>Théorème</u> : (1) Les orbites de ces points x_σ sont deux à deux disjointes, leur réunion est X_Σ

(2) Un point x appartient à l'orbite de x_σ $\iff$ σ est le plus petit cône de Σ ~~tel~~ que $x \in X_\sigma$

(3) $\overline{O_\sigma} \subset \overline{O_\tau} \iff \tau$ est une face de σ

(4) $X_\sigma = \bigcup_{\substack{\tau \subset \sigma \\ \tau \in \Sigma}} O_\tau$ $\qquad\qquad$ $\overline{O_\sigma} = \bigcup_{\substack{\tau \supset \sigma \\ \tau \in \Sigma}} O_\tau$

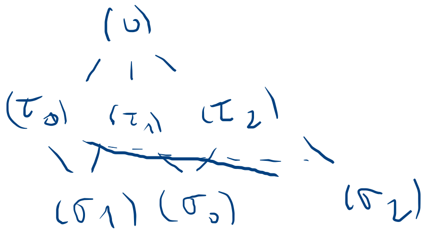
Exemple (1) $\mathbb{P}_1$



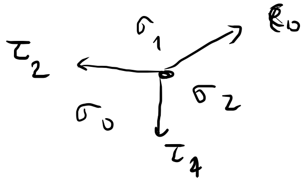
$\mathbb{P}_1 = \mathbb{G}_m \cup 0 \cup \{\infty\}$ $\qquad$ $(\sigma), (\sigma') \lessdot (0)$

$[1:t]$ $\quad$ $[1:0]$ $\quad$ $[0:1]$

$t \neq 0$



(2) $\mathbb{P}_2$



$x_0 = [1:1:1]$

Une orbite $\mathbb{G}_m^2$ $\qquad$ $[1:t:t^{-1}]$

trois orbites $\simeq \mathbb{G}_m$ $\qquad$ $x_{\tau_0}(1:1:0)$ $[1:t:0)$ $\quad$ $(1:0:1)$ $[t:0:1]$ $\quad$ $(0:1:1)$ $[0:1:t]$

trois points fixes $\qquad$ $x_{\sigma_2} = [0:0:1]$, $\underset{= \sigma_1}{(0:1:0)}$ $(1:0:0] = x_{\sigma_0}$

<u>Démonstration</u> $x \in X_\Sigma$ corps de définition K $(K = \kappa(x))$

$x \in X_\Sigma(K)$

Soit σ le plus petit cône tel que $x \in X_\sigma(K)$

Démontrons que $x \in O_\sigma$

$x \leftrightarrow \varphi : \sigma^0 \cap M \longrightarrow (K, \times)$

On veut écrire $\varphi = \tau \cdot \varphi_\sigma$ $\varphi(m) = \begin{cases} \tau(m) & \text{si } m \in \sigma^\perp \cap M \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

pour $\tau \leftrightarrow t \in T(K)$

Soit $m \in \sigma^0 \cap M$ tel que $\varphi(m) \neq 0$

Ouvert principal de X_σ défini par $T^m \neq 0$

$= D(T^m)$

$\leftrightarrow$ monoïde $-\mathbb{N} \cdot m + \sigma^0 \cap M$

$\leftrightarrow$ face τ de σ

$\leftrightarrow$ $x \in X_\tau$

Par minimalité : $\tau = \sigma$

$-m \in \sigma^0$ donc $m \in \sigma^\perp$ car $m \in \sigma^0$

donc $m \in \sigma^\perp \cap M \iff \varphi(m) \neq 0$ (car $\sigma^\perp \cap M$ est un sous-monoïde du monoïde $\sigma^0 \cap M$ qui est un groupe)

$\varphi|_{\sigma^\perp \cap M} : \sigma^\perp \cap M \to k^\times$ se prolonge en $\tau : M \to k^\times$
(car $M/\sigma^\perp \cap M$ est sans torsion)

$\varphi = \tau \cdot \varphi_\sigma$ $\qquad x = t \cdot x_\sigma \qquad (t \leftrightarrow \tau)$

On obtient (3) et (4) en appliquant ce qu'on vient de faire :

a) aux variétés X_σ $\leftrightarrow$ éventail $= \{$faces de $\sigma\}$
$\leftrightarrow$ cônes $\tau \subset \sigma$

b) aux variétés toriques $\overline{O_\tau}$ $\leftrightarrow$ cônes $\sigma \supset \tau$.

<u>Remarque</u> Éventail de $\overline{O_\tau}$? $(\tau \in \Sigma)$

variété torique de tore T_τ (quotient du tore T)

caractères : $\tau^\perp \cap M$ $= M_\tau$

cocaractères : $N/(\langle\tau\rangle \cap N)$ $= N_\tau$) $\qquad N_{\mathbb{R}} \to N_{\tau,\mathbb{R}}$

éventail de $\overline{O_\tau}$: projections de σ dans N_τ
pour $\sigma \supset \tau$

Le calcul de $\overline{O_\tau} \cap X_\sigma$ $\quad (\sigma > \tau)$
démontre que $\overline{O_\tau} = X_{\Sigma_\tau}$

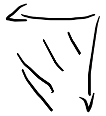
en particulier $\overline{O_\tau}$ est une variété torique normale.
(pas évident a priori)

Remarque . Si les cônes de Σ sont tous simpliciaux,
c'est encore le cas pour Σ_τ

. Si les cônes de Σ sont lisses (engendrés par une partie d'une base de N)
c'est aussi le cas pour Σ_τ.

X_Σ est lisse et les adhérences $\overline{O_\tau}$ sont également lisses.

Exemple $\quad X_\Sigma = \mathbb{A}^n$



$$\overline{O}_\sigma \simeq \mathbb{A}^{n_\sigma} \qquad n_\sigma = n - \dim(\sigma)$$

Tropicalisation étendue

Points d'une variété torique à valeurs dans un <u>monoïde</u>

. En particulier le monoïde tropical $\mathbb{T} = (\mathbb{R}_+, \times) \xrightarrow[\log]{\simeq} (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, +)$

caractère de T

si X est une variété torique affine, associée à un sous monoïde S de $\overset{\cdot}{M}$

$X = \mathrm{Spec}\,(k^{(S)})$

Anneau $X(R) \leftrightarrow$ morphismes de monoïdes de S dans $(R, \times)$

Permet de définir $X(P)$ pour tout <u>monoïde</u> P

$$X(P) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Monoids}}(S, P)$$

<u>Exemple</u> $S = \mathbb{N}^n$ $(\leftrightarrow X = \mathbb{A}^n)$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Monoids}}(S, P) = P^n$$

$$\underline{\qquad\qquad}(S, \mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+^n$$

$P \xrightarrow{u} Q$ morphisme de monoïdes

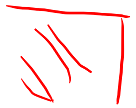
$X(P) \longrightarrow X(Q)$

$(\mathbb{C}, \times) \xrightarrow{|\cdot|} (\mathbb{R}_+, \times)$

monoïde tropicale $\mathbb{T}$ $= \mathbb{R}_+^n$ $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^n$

$$\begin{tikzcd}
X(\mathbb{C}) \arrow[r, "|\cdot|"] & X(\widehat{\mathbb{R}_+}) \arrow[r, "\log"] & X(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \\
T(\mathbb{C}) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "|\cdot|"] & T(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+^{*n} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "\log"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, phantom, "\cup"]
\end{tikzcd}$$

opposé du cône



$\mathbb{R}_-^n$ définissent $\mathbb{A}^n$

Cette construction s'étend aux variétés toriques définies par des éventails.

ensembles $X_\sigma(P) = \mathrm{Hom}_{\text{monoïdes}}(\sigma^\circ \cap M, P)$

$\tau \subset \sigma$ $X_\tau \hookrightarrow X_\sigma$ $\sigma^\circ \subset \tau^\circ = \sigma^\circ + \mathbb{R} \cdot m$ $m \in \overset{\sigma^\circ \cap}{M}$ définissant la face τ

X

$\sigma^\circ \cap M \subset \tau^\circ \cap M$

$X_\tau(P) \subset X_\sigma(P)$

" morphismes $\sigma^\circ \cap M \to P$ qui appliquent m sur un élément inversible de P.

recollement $\rightsquigarrow X_\Sigma(P)$

(Cette construction n'est « correcte » que si le monoïde P est « local »)

- $X_\Sigma(P)$

  $T \to T'$
  $X_\Sigma \to X_{\Sigma'}$ $\rightsquigarrow$ $X_\Sigma(P) \longrightarrow X_{\Sigma'}(P)$

- $P \to Q$ $\rightsquigarrow$ $X_\Sigma(P) \to X_\Sigma(Q)$.

Exemples $P = \{0, 1\}$ multiplication $P \longrightarrow (K, \times)$

$\rightsquigarrow x_\sigma$ points.

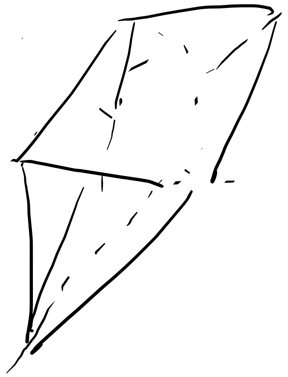
$\sigma \mapsto x_\sigma$ $\Sigma \xrightarrow{\sim} X_\Sigma(\{0,1\})$

$X_\Sigma(\mathbb{R}_+)$? recollement de $X_\sigma(\mathbb{R}_+)$ $\quad \sigma \in \Sigma$
est un espace topologique

si $\Sigma = (\text{faces de } \sigma)$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Hom}(\sigma^\circ \cap M, \mathbb{R}_+) = -\sigma$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\sigma^\circ \cap M, \mathbb{R}_+) & = & -\sigma \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{Hom}(\sigma^\circ \cap M, \mathbb{R}_+^*) & \cong & (\mathbb{R}_+^*)^n \end{array}$$

[montre qu'il faut probablement ne pas faire le changement de signe que j'ai proposé !]



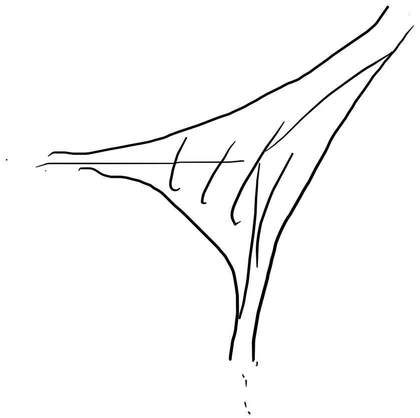
De la sorte $X_\Sigma(\mathbb{R}_+)$ « compactifie » $(\mathbb{R}_+^*)^n = T(\mathbb{R}_+)$

est compact ssi Σ est complet.

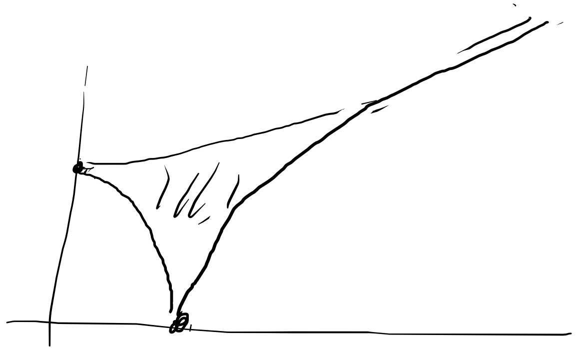
$$\mathbb{C} \xrightarrow{|\cdot|} \mathbb{R}_+$$

$$\begin{array}{ccccc} \overline{U}_f & \subset & X_\Sigma(\mathbb{C}) & \longrightarrow & X_\Sigma(\mathbb{R}_+) \\ & & \cup & & \\ U_f & \subseteq & T(\mathbb{C}) & \longrightarrow & T(\mathbb{R}_+) \end{array}$$

$\underline{n=2}$ $\qquad f = X + Y + 1$



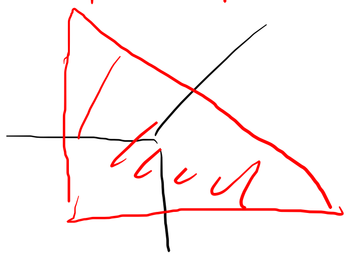
$\sigma = \mathbb{R}^2_{\cdot}$



$\subset \mathbb{R}^2_+$

$$\boxed{X_\Sigma \simeq \Delta}$$

polytope $\Delta = \mathrm{conv}(0, (1,1), (0,1))$



Version non archimédienne

$X_\Sigma \rightsquigarrow X_\Sigma^{an}$ par recollement des espaces $X_\sigma^{an} = \mathcal{M}\left(k^{(\sigma^\circ \cap M)}\right)$

$k \xrightarrow{|\cdot|} \mathbb{R}_+$

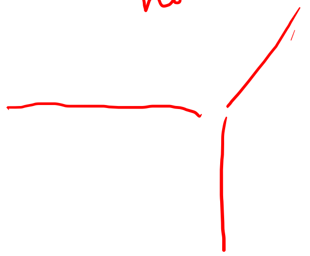
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_f & \subset & T \\ \cap & & \cap \\ \overline{\mathcal{V}}_f & \subset & X_\Sigma \end{array}$$

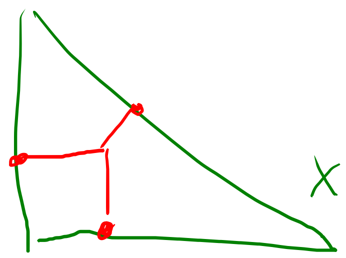
$X_\Sigma^{an} \longrightarrow X_\Sigma(\mathbb{T})$

$\overline{\mathcal{V}}_f^{an} \subset X_\Sigma^{an} \rightsquigarrow \lambda\left(\overline{\mathcal{V}}_f^{an}\right) \subset X_\Sigma(\mathbb{T})$

linéaire par morceaux

amibe non archimédienne :





$X_\Sigma(\mathbb{T})$

compactification de l'amibe non archimédienne.