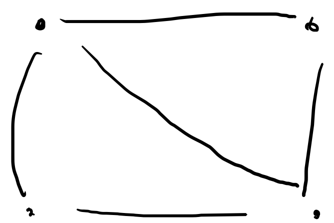
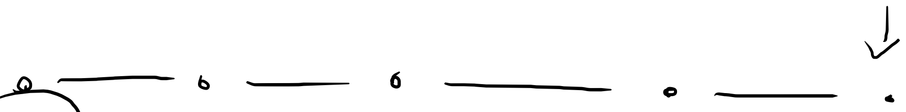




3			
2	1		
1	2		
2	0	1	
0	2	1	
1	0	2	
1	1	0	1
0	2	0	1
1	0	1	1

1er avril 2021 Combinatoire, matroïdes et géométrie tropicale

chap. 5 des notes

§1. Arrangements d'hyperplans (repoussé)

§2. Matroïdes

Whitney, 1935 — abstraire l'idée d'indépendance linéaire

de nombreuses façons de définir un matroïde,
équivalentes ~~mais~~ pas de manière absolument évidentes
mais toujours de façon élémentaire

Définition M ensemble fini
une structure de matroïde sur M est la donnée de diverses parties de $\mathcal{P}(M)$

- parties libres
- bases
- parties génératrices
- circuits

· plats ...

Il suffit de définir une de ces familles de parties
(+ axiomes convenables)
pour en déduire les autres.

Axiomes des parties libres

(1) ϕ est libre

(2) si $A \subset B \subset M$ et B est libre, alors A est libre

(3) si A et B sont libres et $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$, il existe $b \in B - A$ tel que $A \cup \{b\}$ soit libre

Une partie qui n'est pas libre est liée
Une partie libre maximale est une base
Un circuit est une partie liée minimale
(boucle : $\{a\}$ partie liée à un élément)

Exemples venant de l'algèbre linéaire

(1) corps K, V espace vectoriel / K
famille $(v_i)_{i \in M}$ d'éléments de V.

Une partie A est libre si $(v_i)_{i \in A}$ est ~~libre~~ linéairement indépendante.
Une boucle, $(v_a)_a$ est liée $\Leftrightarrow$ $v_a = 0$.
Une base $(v_a)_{a \in A}$ est une base de Vect $(v_i)_{i \in M}$

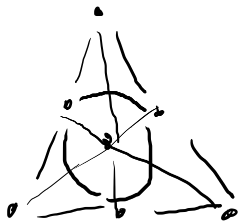
(2) espace affine: V $(v_i)_{i \in M}$

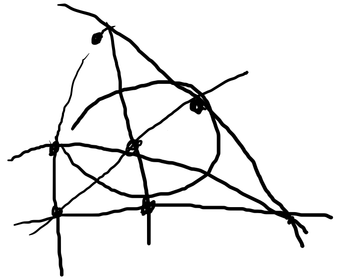
Une partie A est libre si $(v_i)_{i \in A}$ est affinement libre
base: repère affine de $(v_i)_{i \in M}$

(3) version pour les espaces projectifs
base repère projectif.

$\rightarrow$ matroïdes représentables

Exemple   matroïde de Fano   plan projectif sur $\mathbb{F}_2$





$\bar{0}, 1$

7 points

reliés pour indiquer les relations de liaison

Prop. On ne peut pas réaliser ce matroïde comme matroïde ~~sur~~ représentable sur un corps de car$(K) \neq 2$.

(exercice)

Théorème : 0% des matroïdes sont représentables

$$\frac{\text{Card}(\text{cl. de matroïde représentables sur } \{1, \dots, n\})}{\text{Card}(\text{cl. de matroïde sur } \{1, \dots, n\})} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Exemples a) M matroïde
$A \subset M$ $\qquad M \mid A$ a pour parties libres les parties libres de M qui sont contenues dans A

b) M, M' $\qquad M \sqcup M'$ a pour parties libres les parties de la forme $A \sqcup A'$ où A est une partie libre de M
A' ——— M'

exercice : si M est représentable, $M \mid A$ aussi.
M, M' sont ——— s $\quad M \sqcup M'$ aussi

Axiomes des circuits (partie liée minimale)

(1) $\emptyset$ n'est pas un circuit ($\emptyset$ est libre)

(2) si C et C' sont des circuits distincts, alors $C \not\subset C'$ (et $C' \not\subset C$)
(sinon C' ne serait pas minimal)

(3) si C et C' sont des circuits distincts
et $e \in C \cap C'$, il existe un circuit $D \subset C \cup C' - \{e\}$

On raisonne par l'absurde en supposant que $(C \cup C') - \{e\}$ ne contient pas de circuit
c'est à dire $(C \cup C') - \{e\}$ est libre.

$C \neq C'$ donc (axiome 2) $C' \not\subset C$
donc il existe $f \in C' - C$ $C' - \{f\}$ est libre

Soit L une partie libre maximale de $C \cup C'$ qui contient $C' - \{f\}$
$f \notin L$ car C' n'est pas libre
$L \not\supset C$ car C n'est pas libre

soit $g \in C - L$ $g \neq f$ car $g \in C$, $f \in C' - C$
$\mathrm{Card}(L) \leq \mathrm{Card}(C \cup C') - 2 < \mathrm{Card}(C \cup C' - \{e\})$

Donc il existe $\left| \begin{array}{l} x \in C \cup C' - \{e\} \\ x \notin L \end{array} \right.$ tq $L \cup \{x\}$ sont libre | contredit la maximalité de L

Inversement si une famille de parties de M vérifie les axiomes des circuits
des parties qui ne contiennent pas de circuit
sont les parties libres d'une structure de matroïde
qui a ces circuits pour circuits.

Disons que $A \subset M$ est libre si A ne contient pas de circuit

(1) $\emptyset$ est libre car $\emptyset$ n'est pas un circuit

(2) si $A \subset B$ et B est libre,
alors A est libre (sinon, A contient un circuit, donc B aussi)

(3) L, L' parties libres tq $\mathrm{Card}(L) < \mathrm{Card}(L')$
Parmi toutes les parties libres de $L \cup L'$,
on en choisit une L'' de cardinal maximal
et telle que $\mathrm{Card}(L - L'')$ est minimal.

Comme L' est libre $\mathrm{Card}(L'') \geq \mathrm{Card}(L') > \mathrm{Card}(L)$.

Si $L'' \supset L$: soit $a \in L'' - L$ $\quad L \cup \{a\} \subset L''$, donc est libre
$a \in L' - L$ $\square$

Sinon, si $L'' \not\supset L$?

soit $e \in L - L''$

$\ast$ Pour $f \in L'' - L$, posons $A_f = (L' \cup \{e\}) - \{f\} \subset L \cup L'$

$\mathrm{Card}(A_f) = \mathrm{Card}(L'')$

$\mathrm{Card}(A_f - L) = \mathrm{Card}(L'' - L) - 1$

par choix de L'', A_f n'est pas libre, c'est-à-dire contient un circuit C_f

résumé :

- $f \notin C_f$
- $e \in C_f$ car $A_f \subset L'' \cup \{e\}$, $A_f - \{e\} \subset L''$ est libre

$C_f \subset A_f \subset L'' \cup \{e\}$

- $C_f \cap (L'' - L) \neq \emptyset$

sinon : $C_f \cap L' \subset L$, $C_f \subset L'' \cup \{e\}$ $\Big\}$ $C_f \subset L \cap L' \cup \{e\} \subset L$, absurde

$\ast$ $f \in L'' - L$, $g \in C_f \cap (L'' - L)$ $f \neq g$

$g \notin C_g$ $C_f \neq C_g$

$e \in C_f \cap C_g$

axiome (3) des circuits : il existe un circuit $D \subset (C_f \cup C_g) - \{e\}$

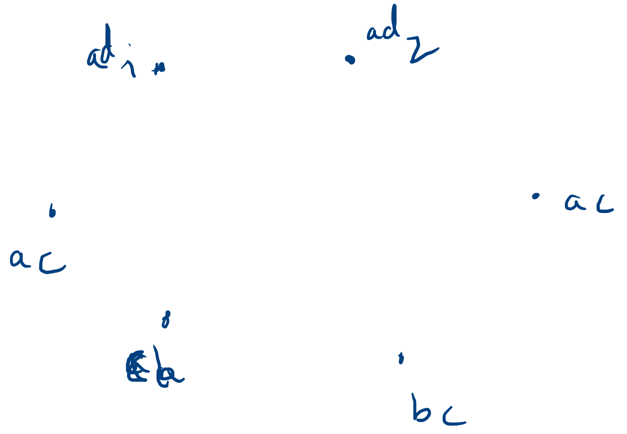
Donc $D \subset L''$, contredit l'hypothèse que L'' est libre.

D'où vient la terminologie circuit (boucle) : de la théorie des graphes.

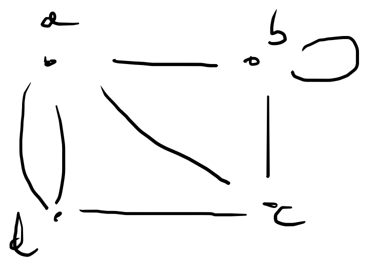
soit G un graphe fini (non orienté, arêtes multiples et boucles possibles)

$M = \{$ arêtes de G $\}$

circuit = circuit dans le graphe : suites d'arêtes qui forment une boucle minimale



circuits :
$(ad)_1$, dc, ca
$(ad)_2$, dc, ca
$(ad)_1$, $(ad)_2$
$(ad)_1$, dc, cb, ba
$(ad)_2$, dc, cb, ba
ac, cb, ba
(bb)



partie libre : sous graphe qui ne contient pas de circuit
= forêt (arbre)

Proposition soit L une partie libre de M
et $e \in M$ tq $L \cup \{e\}$ ne soit pas libre
| Il existe un unique circuit $C \subset L \cup \{e\}$
| De plus, $e \in C$

Proposition : Il existe des bases
Deux bases ont même cardinal

Axiomes des bases
(1) Il existe des bases
(2) si B et B' sont des bases et $a \in B - B'$,
il existe $b \in B' - B$ tq $(B \cup \{b\}) - \{a\}$ soit une base.

lemme d'échange en algèbre linéaire

partie libre : contenue dans une base

Rang matroïde M

$A \subset M$ $\quad rg_M(A)$ = cardinal des bases de $M|A$.

Proposition : $\quad$ A est libre $\iff rg_M(A) = \mathrm{Card}(A)$

A est une base $\iff rg_M(A) = rg_M(M) = \mathrm{Card}(A)$

Axiomes du rang

(1) $\quad 0 \leq rg_M(A) \leq \mathrm{Card}(A)$

(2) $\quad$ si $A \subset B$, alors $rg_M(A) \subset rg_M(B)$

(3)

$$rg_M(A \cup B) + rg_M(A \cap B) \leq rg_M(A) + rg_M(B)$$

Partie engendrée : $\langle A \rangle = \{ x \in M \mid rg_M(A) = rg_M(A \cup \{x\}) \}$

A est génératrice si $\langle A \rangle = M$

$A \mapsto \langle A \rangle$ est parfois appelé « opérateur de clôture »

Axiomes de la clôture

(1) $A \subset \langle A \rangle$

(2) si $A \subset B$, alors $\langle A \rangle \subset \langle B \rangle$

(3) $\langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle$

$rg(A \cup \{a,b\}) = rg_M(A \cup \{b\}) > rg_M(A)$

(4) si $a \in M$, $A \subset M$, $b \in \langle A \cup \{a\} \rangle \setminus \langle A \rangle$

alors $a \in \langle A \cup \{b\} \rangle$

Proposition

A est une base

$\Leftrightarrow$ A est génératrice minimale

$\Leftrightarrow$ A est libre et génératrice

$\Leftrightarrow$ A est libre maximale.

Axiomes des parties génératrices

(1) M est génératrice

(2) si $A \subset B$ et A est génératrice, alors B est génératrice

(3) si A et B sont génératrices
et $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$
il existe $b \in B - A$ tel que $B - \{b\}$ soit génératrice

Plat $\quad A = \langle A \rangle$

(Pour $M \mapsto (v_i)_{i \in M}$
A est plat ssi il existe $W \subset V$ s ev
tq $A = \{ i \mid v_i \in W \}$)

Axiomes des plats

(1) M est plat

(2) A, B plats $\Rightarrow$ $A \cap B$ est un plat

(3) si A est un plat et $A \neq M$,
l'ensemble des plats qui contiennent A et sont distincts de A
et qui sont minimaux pour ces propriétés
recouvre M

Structure de treillis sur l'ensemble ordonné des plats

- $\inf(A,B) = A \cap B$
- $\sup(A,B) = \langle A \cup B \rangle = \bigcap_{\substack{C \text{ plat} \\ C \supset A \cup B}} C$

($\langle A \rangle$ est le plus petit plat contenant A)

chaîne : suite non vide strictement croissante $(x_0, \dots, x_m)$ m = longueur

x_0 : base $\qquad x_m$: sommet

hauteur(x) = borne supérieure des longueurs de chaînes de sommet x

cohauteur(x) = borne supérieure des longueurs de chaînes de base x

$\mathrm{ht}(x) + \mathrm{coht}(x)$ est indépendant de x

atome : $\mathrm{ht}(x) = 1$.

Axiomes du treillis des plats

(1) Ce treillis est caténaire

(2) $\mathrm{ht}(x) + \mathrm{ht}(y) \geq \mathrm{ht}(\inf(x,y)) + \mathrm{ht}(\sup(x,y))$

(3) Pour tout x, il existe m, $x_1, \dots, x_m$ des atomes du treillis tel que

$$x = \sup(x_1, \dots, x_m).$$

$(V = \mathrm{vect}(v_i))$ En algèbre linéaire

$$\mathrm{rg}_M(A) = \dim(\mathrm{vect}(v_i)_{i \in A})$$

$$\mathrm{ht}(P_W) = \dim(W) \qquad \mathrm{coht}(P_W) = \mathrm{codim}\, W$$

atoms : $i \in M$ tq $v_i \neq 0$ (non-boucles)

plat minimal $\{i \mid v_i = 0\} = \{\text{boucles de } M\}$

~~Algorithme glouton~~

développ^t durable

E ens. fini

$w : E \longrightarrow \mathbb{R}$ (poids)

$w(A) = \sum_{a \in A} w(a)$ si $A \subset E$.

$\mathcal{I}$ = ensemble de parties de E
- contenant ϕ
- stable par sous ensemble.

$(e_1, \dots, e_m)$ est **admissible** si

(1) $\{e_1, \dots, e_m\} \in \mathcal{I}$ et est de cardinal m

(2) si $0 \le n < m$, $w(e_{n+1}) = \inf\limits_{\substack{a \notin \{e_1, \dots, e_n\} \\ \{e_1, \dots, e_n, a\} \in \mathcal{I}}} w(a)$

(3) pour tout $a \notin \{e_1, \dots, e_n\}$, $\{e_1, \dots, e_n, a\} \notin \mathcal{I}$.

<u>Théorème</u> (Edmonds, 1970)

$M = E$ matroïde, $\mathcal{I}$ = parties libres de M

caractérise les parties admissibles : bases de poids minimal, ordonnées par poids croissant.

$(e_1, \dots, e_m)$ est admissible

$\Leftrightarrow$ $\{e_1, \dots, e_m\}$ est une base de M (de cardinal m)

$w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_m)$

pour toute base B de M, $w(B) \geq w(e_1) + \dots + w(e_m)$

<u>Réciproque</u> : si ~~le~~ algorithme ~~glouton~~ économe ne produit(*) que des parties maximales de poids minimal, $\mathcal{I}$ est l'ensemble des parties libres d'un matroïde.

((*) pour toute fonction poids)