8 avril 2021

Liens entre combinatoire et géométrie tropicale.

§1. Matroïdes

leurs multiples descriptions.

§2. Algorithme glouton et polytope de Bergman.

E ensemble fini

poids $w : E \to \mathbb{R}$

$\mathcal{I}$ ensemble de parties de E

- non vide
- stable par inclusion : $A \subset B$, $B \in \mathcal{I} \Rightarrow A \in \mathcal{I}$

Suites admissibles $(e_1, \dots, e_n)$ d'éléments E :

- $\{e_1, \dots, e_n\}$ est de cardinal n et appartient à $\mathcal{I}$
- pour tout $m \in \{1, \dots, e_n\}$: $w(e_m)$ minimise $w(e)$ pour les $e \in E - \{e_1, \dots, e_{m-1}\}$ tq $\{e_1, \dots, e_{m-1}, e\} \in \mathcal{I}$
- Pour $e \in E - \{e_1, \dots, e_n\}$, $\{e_1, \dots, e_n, e\} \notin \mathcal{I}$.

Origine de cet algorithme : l'algorithme de Kruskal pour construire une forêt maximale d'un graphe.
(E = arêtes du graphe)

Lien avec les matroïdes :

<u>Théorème</u>. M matroïde, $w : M \to \mathbb{R}$, $A \subset M$ $w(A) = \sum_{e \in A} w(e)$
$(e_1, \dots, e_n)$ suite d'éléments distincts de M
telle que $\begin{cases} w(e_1) \leq \dots \leq w(e_n) \\ \{e_1, \dots, e_n\} \text{ est une base de } M \end{cases}$
Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est admissible (pour $\mathcal{I} = \mathcal{I}_M$ - parties libres de M, poids w)
$\Leftrightarrow$ $w(\{e_1, \dots, e_n\}) \leq w(B)$
pour toute base B de M.

<u>Théorème</u> : Si pour tout poids w, l'algorithme glouton ne fournit que des parties maximales A de $\mathcal{I}$ de poids $w(A)$ minimal alors $\mathcal{I}$ est l'ensemble des parties libres d'un matroïde sur E

Preuve : l'algorithme s'arrête quand $\{e_1, \dots, e_n\}$ est libre et maximale

— il fournit des bases du Matroïde M

$B = (e_1, \dots, e_n)$ suite « gloutonne »

$B' = (f_1, \dots, f_n)$ une base de M $\quad w(f_1) \leq \dots \leq w(f_n)$

Lemme $\quad w(e_i) \leq w(f_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Récurrence sur i

On suppose $w(e_i) \leq w(f_i)$ si $i < m$

et on démontre $w(e_m) \leq w(f_m)$

~~Supposons $w(e_m) > w(f_m)$~~

$L = \{e_1, \dots, e_{m-1}\}$ $\quad L' = \{f_1, \dots, f_m\}$

Axiome des parties libres : il existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tq $f_j \notin L$

et $\{e_1, \dots, e_{m-1}, f_j\} \in \mathcal{I}_M$.

algorithme : $w(f_j) \geq w(e_m)$

donc $w(f_m) \geq w(e_m)$

Alors $w(B') \geq w(B)$

Preuve. On doit prouver le troisième axiome des parties libres.

$L, L' \in \mathcal{I}$ $\quad$ $\mathrm{Card}(L) < \mathrm{Card}(L')$

Raisonnement par l'absurde : $\boxed{L \cup \{e\} \notin \mathcal{I} \quad \forall e \in L' - L}$

π

Définition d'un poids w :

$$w(e) = 0 \quad \text{si } e \in L \cap L'$$

$0 < \alpha < \alpha' < \beta$ $\quad$ $w(e) = \alpha$ si $e \in L - L'$, $\quad 0 < \alpha < 1$ paramètre

$$w(e) = \alpha' \quad \text{si } e \in L' - L$$

$$w(e) = \beta \quad \text{si } e \notin L \cup L'$$

L'application de l'algorithme glouton

- commence par sélectionner $L \cap L'$
- puis le reste de L
- ensuite ceux de L' si possible : justement, non : impossible par l'hypothèse faite
- seulement alors ceux de $E - (L \cup L')$

Imaginons qu'il ait fourni $B \subset L \cup (E - (L \cup L'))$

$$w(B) = w(L) + w(B - L) = \mathrm{Card}(B - L) \cdot \beta$$

On peut peut aussi rechercher une partie maximale B' de S qui contient L'

$$\begin{aligned} w(B') &= w(L') + w(B' - L') \\ &= w(L') + w(B' \cap (L - L')) + w(B' - (L \cup L')) \\ &= \alpha' \cdot \mathrm{Card}(L') + \alpha \,\mathrm{Card}(B' \cap (L - L')) + \beta \,\mathrm{Card}(B' - (L \cup L')) \end{aligned}$$

choix de $\alpha, \alpha', \beta \Rightarrow w(B') < w(B)$
contredit l'hypothèse que l'algorithme glouton fournit des parties maximales de poids minimal.

Polytope associé à un matroïde (Edmonds 1970
Gelfand, Goresky, Macpherson, Serganova, ~1980)

- M matroïde $(E = M)$
Dans $\mathbb{R}^M$ base canonique $(e_m)_{m \in E}$
$A \subset M \rightsquigarrow e_A = \sum_{m \in A} e_m$ $\quad (e_A = \mathbb{1}_A)$

polytope : $P_M = \mathrm{conv}(e_B,\ B \text{ base de } M) \subset [0,1]^M$
$\subset \left(\sum_{m \in M} x_m = \deg(M) \right)$

Théorème Les arêtes de P_M (faces de dimension 1) sont de la forme $e_i - e_j$ pour $i, j \in M$.

Inversement :
Théorème si P est un polytope contenu dans $[0,1]^M \cap \left(\sum_{m \in M} x_m = d \right)$ où $d \in \mathbb{N}$, dont les arêtes sont de la forme $e_i - e_j$, il existe une unique structure de matroïde sur M telle que $P = P_M$

Preuves. Les sommets de P_M sont de la forme e_B, B base de M

$B \neq B^-$ deux bases telles $[e_B, e_{B^-}]$ soit une arête de P_M

$e_B - e_{B^-}$ a pour coordonnés : • 0 si $m \notin B \cup B^-$ ou $m \in B \cap B^-$

• 1 si $m \in B - B^-$

• -1 si $m \in B' - B$.

dire que $e_B - e_{B'} = e_i - e_j$

signifie que B' ~~est~~ obtenue à partir de B en ajoutant j et retranchant i.

$d = rg(M)$

$\mathrm{Card}\,(B \Delta B^-) = 2$

Supposons $\mathrm{Card}\,(B \Delta B^-) = 2p > 2$ et prouvons que $\frac{1}{2}(e_B + e_{B^-})$ appartient à l'enveloppe convexe des autres vecteurs.

$B - B' = \{1, .., p\}$ $B' - B = \{p+1, .., 2p\}$

B B^-

(re)numérotation à volonté des éléments de B, B^-

B_1 B'_1

lemme d'échange

B_2 B'_2

$B_k = B - \{k\} \cup \{e'_k\}$ $B'_k = B' - \{p+k\} \cup \{e_k\}$

$e'_k \in B' - B$ $e_k \in B - B^-$

B $\quad$ B^-

$B_1 = B - \{1\} \cup \{p+1\}$ $\qquad$ $B'_1 = B' - \{p+1\} \cup \{2\}$

$B_2 = B - \{2\} \cup \{p+2\}$ $\qquad$ $B'_2 = B' - \{p+2\} \cup \{3\}$

$$(*) \quad (B_k) + (B'_k) = (B) + (B^-) - (k) + (k+1)$$

$$(**) \quad (B_k) + (B'_{k-1}) = (B) + (B') + (p+k) - (p+k-1) + .$$

Supposons qu'au cran $k+1$, ça ne marche plus.

- $B_{k+1} = B - \{k+1\} \cup \{p+m\}$ $\qquad 1 \leq m \leq k$

Alors $\big((B_{k+1}) + (B'_k)\big) + \big((B_k) + (B'_{k-1})\big) + \dots + \big((B_{m+1}) + (B'_m)\big)$

$$= \left[(B) + (B^-) + (\cancel{p+m}) - (\cancel{p+k})\right] + \left[(B) + (B^-) + (\cancel{p+k}) - (p + (\cancel{k-1}))\right]$$

$$+ \cdots + \left[(B) + (B^-) + (\cancel{p+m+1}) - (\cancel{p+m})\right]$$

$$= (k+1-m)\,\big((B) + (B^-)\big)$$

Le milieu de l'arête $[e_B, e_{B^-}]$ est dans l'enveloppe convexe des autres vecteurs e_{B_k}, $e'_{B'_k}$.

cela contredit l'hypothèse que $(e_B, e_{B'})$ est une arête

Même argument similaire si $B'_k = B - \{p+k+1\} \cup \{m\}$ $\quad 1 \leq m \leq p$

$$\left((B'_{k+1}) + (B_{k+1})\right) + \cdots + (B'_m + B_m)$$
$$= (k+2-m)\left((B) + (B^-)\right)$$

contredit encore l'hypothèse que $[e_B, e_{B^-}]$ est une arête.

La construction des base $B_1, B'_1, \ldots,$ s'arrête donc à B_p, B'_p.

$$B'_p = B' - \{2p\} + \{m\} \qquad m \in B - B^- \qquad 1 \leq m \leq p$$

contradiction sauf si $p = 1$.

<u>Réciproque</u> soit $P \subset [0,1]^M \cap (\sum x_m = d)$

Dont les arêtes sont de la forme $e_i - e_j$

Les sommets de P sont de la forme e_A $A \subset M$.

v sommet, $[v, v']$ arête

$v' - v = e_i - e_j$ $\quad v'_m - v_m \in \{0, +1, -1\}$

$0 \leq v'_m, v_m \leq 1$

$v_m = v'_m$ si $m \neq i, j$

$v'_i = 1 \quad v_i = 0$

$v'_j = 0 \quad v_j = 1$.

« base » partie B de M telle que e_B est un sommet de P

vérification du lemme d'échange.

B, B' deux « bases » $m \in B - B'$

arêtes $[B, B_1], \ldots, [B, B_n]$ arêtes issues de B

$B_i - B$ est de la forme $e_{b_i} - e_{a_i}$ $a_i \neq b_i$ $\begin{cases} a_i \in B - B_i \\ b_i \in B_i - B \end{cases}$

$P \subset$ cone de sommet B, engendré par les rayons $B_i - B$

$P - B \subset$ cone $(B_1 - B, \ldots, B_n - B)$

$B' \in P$ $\quad B' - B = \sum_{i=1}^{n} c_i (B_i - B)$ $\quad c_i \geq 0$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \left(e_{b_i} - e_{a_i} \right)$$

le coefficient d'indice m dans $(B'-B)$ est -1.

car $m \in B$ $\quad m \notin B'$

$$-1 = \cancel{\sum_{\substack{i=1 \\ b_i = m}}^{n} c_i} - \sum_{\substack{i=1 \\ a_i = m}}^{n} c_i = - \sum_{a_i = m} c_i$$

donc il existe i tel que $a_i = m$ et $c_i > 0$

soit $p = b_i \in B_i - B$

le coefficient d'indice p dans $(B') - (B)$ est $\sum_{b_i = p} c_i - \cancel{\sum_{a_i = p} c_i}$

$$= \sum_{b_i = p} c_i = c_i + (\text{autres term}) > 0$$

donc $p \in B'$ $\quad B_1 := B - \{m\} \cup \{p\}$ est une base.

Proposition (Ardila-Klivans)
Soit M un matroïde
$w : M \to \mathbb{R}$ poids
L'ensemble des bases de poids minimal de M
est l'ensemble des bases d'un matroïde M_w sur l'ensemble $|M|$
Et ~~son~~ polytope P_{M_w} est une face du polytope P_M.

Les bases de poids minimal ont toutes le même poids μ
si B est une base de poids minimal, $e_B \in (\sum w_i x_i = \mu) = H_w$
$P_{M_w} = \mathrm{conv}(e_B, \ B$ de poids $\mu) \subset P_M \cap$ (hyperplan H_w)
∴ les autres sommets de P_M sont du même côté de H_w

$P_M \cap H_w$ est une face de P_M
ses sommets sont les e_B, B base de poids μ
ses arêtes sont des arêtes de P_M.

$\longrightarrow$ P_{M_w} est un polytope associé à un matroïde

<u>Éventail de Bergman</u> associé au matroïde M

$$\Sigma_M = \{ w \in \mathbb{R}^M \mid M_w \text{ n'a pas de boucle} \}.$$

c'est une partie de $\mathbb{R}^M$

conique ($w \to w' = cw$, $c > 0$

les bases w minimales sont w' minimales)

$M_{w'} = M_w$

c'est le support d'un éventail de $\mathbb{R}^M$

- purement de dimension $1 + rg(M)$
- <u>unimodulaire</u> (lisse)

chacun de ses cônes sont engendrés par ~~une~~ une partie d'une base de $\mathbb{Z}^M$

Filtration $\mathcal{F}^w$ du matroïde M

$$\mathcal{F}^w_t M = \{ m \in M \mid w(m) \leq t \}$$

$$\phi = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{m+1} = M$$

si $\cancel{x} \in F_i$ et $y \in F_j - F_i$ alors $w(y) > w(x)$

$x \in \cancel{F}_1 \iff w(x)$ est minimal

$x \in F_2 - F_1 \iff w(x)$ —— parmi les éléments de $M - F_1$

etc.

Prop. $w \in \Sigma_M \iff F_1, \ldots, F_m$ sont des plats du matroïde M